Cours de Calcul Différentiel

Lubomir Gavrilov

CHAPITRE 1

Formule de Taylor

1. Rappels

THÉORÈME 1.1. *Soit* $f \in C^{k+1}(U)$, $U =]a-R, a+R[$, $a, R \in \mathbb{R}$, $R > 0$. *Alors* $\forall u, |u| < R$ *il existe* $\theta \in]0,1[$ *tel que*

$$f(a+u) = f(a) + f'(a)\frac{u}{1!} + \dots f^{(k)}(a)\frac{u^k}{k!} + f^{(k+1)}(a+\theta u)\frac{u^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{1.1}$$

Preuve Soit $g(s) = f(a+su)$. La formule (1.1) est équivalente à

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \dots \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}. \tag{1.2}$$

Nous allons montrer d'abords par récurrence que

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \dots \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} g^{(k+1)}(s) ds. \tag{1.3}$$

Pour $k = 0$ c'est la formule

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(s) ds.$$

Supposons que $f \in C^{k+1}(U)$ et la formule soit vraie au rang $k-1$ c'est à dire

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \dots \frac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!} + \int_0^1 \frac{(1-s)^{(k-1)}}{(k-1)!} g^{(k)}(s) ds.$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-s)^{(k-1)}}{(k-1)!} g^{(k)}(s) &= [-(1-s)^{(k)}(k)! g^{(k)}(s)]_{s=0}^{s=1} + \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} g^{(k+1)}(s) ds \\ &= \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} g^{(k+1)}(s) ds\end{aligned}$$

d'où le résultat. Finalement $g^{(i)}(s) = u^i f^{(i)}(a+su)$ et donc

$$\int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} g^{(k+1)}(s) ds = u^{(k+1)} \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(a+su) ds$$

d'où

$$\inf_{\theta \in [0,1]} f^{(k+1)}(a+\theta u) \leq f^{(k+1)}(a+su) \leq \sup_{\theta \in [0,1]} f^{(k+1)}(a+\theta u)$$

$$\inf_{\theta \in [0,1]} f^{(k+1)}(a+\theta u) \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} ds \leq \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(a+su) ds$$

$$\int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(a+su) ds \leq \sup_{\theta \in [0,1]} f^{(k+1)}(a+\theta u) \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} ds$$

$$\inf_{\theta\in[0,1]} \frac{f^{(k+1)}(a+\theta u)}{(k+1)!} \leq \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(a+su)ds \leq \sup_{\theta\in[0,1]} \frac{f^{(k+1)}(a+\theta u)}{(k+1)!}.$$

Il s'en suit, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\frac{f^{(k+1)}(a+\theta u)}{(k+1)!} = \int_0^1 \frac{(1-s)^k}{k!} f^{(k+1)}(a+su)ds.$$

Le Théorème est démontré.

2. Formule de Taylor à l'ordre deux

Désormais on suppose que $U = B(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < R\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$,$f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}(U)$. Si l'on pose $g(s) = f(a+su)$, $\|u\| < R$, $s \in [0,1]$, alors la formule (1.2) appliquée à l'ordre deux s'écrit

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \frac{g''(\theta)}{2!} \tag{2.1}$$

où

$$g'(0) = \frac{d}{ds} f(a+su)|_{s=0} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).u_i.$$

De même

$$\begin{aligned} g''(\theta) &= \frac{d}{d\theta}(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+\theta u).u_i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\theta u).u_i u_j. \end{aligned}$$

Si $Df(a)$ désigne la différentielle de f en a alors

$$Df(a).u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).u_i.$$

Définition 2.1. Soit $f \in C^2(U)$. On appelle matrice Hessienne de f en $a \in U$ la matrice

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

D'après le Théorème de Schwarz $H_f(a)$ est une matrice symétrique.

Définition 2.2. Soit $f \in C^2(U)$. On appelle différentielle seconde de f en a la forme bi-linéaire

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (u,v) \to v^t H_f(a) u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).u_i u_j.$$

Nous écrivons aussi

$$D^2 f(a)(u,v) = v^t H_f(a) u.$$

Ainsi, nous avons prouvé

THÉORÈME 2.3 (formule de Taylor à l'ordre deux). *Soit* $f \in C^2(U)$. *Alors il existe* $\theta \in]0,1[$ *tel que*

$$f(a+u) = f(a) + Df(a).u + \frac{1}{2}D^2 f(a+\theta u)(u,u).$$

Puisque les dérivées partielles d'ordre deux de f sont continues, nous avons

$$\lim_{\theta \to 0} \|H_f(a+\theta u) - H_f(a)\| = 0$$

L'inégalité

$$\left\|D^2 f(a+\theta u)(u,u) - D^2 f(a)(u,u)\right\| \leq \|H_f(a+\theta u) - H_f(a)\| \, \|u\|^2$$

montre que

$$\frac{1}{2}D^2 f(a+\theta u)(u,u) = \frac{1}{2}D^2 f(a)(u,u) + o(\|u\|^2).$$

Cela permet de reformuler Théorème 4.2 de la manière suivante

THÉORÈME 2.4. *Soit* $f \in C^2(U)$, $a \in U$. *Alors*

$$f(a+u) = f(a) + Df(a).u + \frac{1}{2}D^2 f(a)(u,u) + o(\|u\|^2).$$

3. Conditions d'optimalité

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$.

DÉFINITION 3.1. On dit que f présente un minimum local en $a \in U$ s'il existe $\epsilon > 0$, tel que

$$\forall x \in B(a,\epsilon), f(a) \leq f(x).$$

On définirait de même un maximum local.

THÉORÈME 3.2 (condition nécessaire). *Si* f *est différentiable en* a *et présente un minimum (ou maximum) local en* a, *alors*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

THÉORÈME 3.3 (condition nécessaire). *Si* $f \in C^2(U)$ *et présente un minimum (ou maximum) local en* a, *alors la matrice Hessienne* $H_f(a)$ *est semi-définie positive (negative).*

THÉORÈME 3.4 (condition suffisante). *Soit* $f \in C^2(U)$. *Si*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

et la matrice Hessienne $H_f(a)$ *est définie positive (negative), alors* f *présente en* a *un minimum (maximum) local strict.*

4. Formule de Taylor d'ordre supérieur

Soit $U = B(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| < R\}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$,$f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^{k+1}(U)$. Si l'on pose $g(s) = f(a+su)$, $\|u\| < R$, $s \in [0,1]$, alors la formule (1.2) appliquée à l'ordre $k+1$ s'écrit

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \frac{g''(0)}{2!} + \cdots + \frac{g^{(k-1)}(0)}{(k-1)!!} + \frac{g^{(k)}(\theta)}{k!} \tag{4.1}$$

Il reste à calculer les dérivées $g^{(i)}(0)$. Nous les avons déjà calculer pour $i = 1,2$ et par récurrence on remarque que

$$g^k(0) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n=k} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_n}}(a) u_1^{i_1}u_2^{i_2}\ldots u_n^{i_n}.n_{i_1 i_2\ldots i_n} \tag{4.2}$$

où $n_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ sont des nombres entiers qui ne dépendent pas de la fonction f. Pour les calculer nous posons $a = (0,0,\ldots,0)$, $f(x) = x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}$. Il s'en suit que $g(s) = s^k u_1^{i_1}u_2^{i_2}\ldots u_n^{i_n}$, $g^k(0) = u_1^{i_1}u_2^{i_2}\ldots u_n^{i_n}k!$,

$$\frac{\partial^k x^{j_1}\partial x^{j_2}\ldots\partial x^{j_n}}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_n}}(0) = 0, \text{ si } (j_1,j_2,\ldots,j_n) \neq (i_1,i_2,\ldots,i_n)$$

et

$$\frac{\partial^k x^{j_1}\partial x^{j_2}\ldots\partial x^{j_n}}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_n}}(0) = i_1!.i_2!\ldots i_n!, \text{ si } (j_1,j_2,\ldots,j_n) = (i_1,i_2,\ldots,i_n).$$

La formule (4.2) implique

$$u_1^{i_1}u_2^{i_2}\ldots u_n^{i_n}k! = i_1!.i_2!\ldots i_n! u_1^{i_1}u_2^{i_2}\ldots u_n^{i_n}.n_{i_1 i_2\ldots i_n}$$

$$n_{i_1 i_2\ldots i_n} = \frac{k!}{i_1!.i_2!\ldots i_n!}.$$

Ainsi, nous avons démontré les théorèmes suivants

Théorème 4.1 (formule de Taylor d'ordre $k+1$). *Soit $f \in C^{k+1}(U)$. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$f(a+u) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n \leq k} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_n}}(a)\frac{u_1^{i_1}u_2^{i_2}\ldots u_n^{i_n}}{i_1!.i_2!\ldots i_n!}$$

$$+ \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n = k+1} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_n}}(a+\theta u)\frac{u_1^{i_1}u_2^{i_2}\ldots u_n^{i_n}}{i_1!.i_2!\ldots i_n!}.$$

Théorème 4.2 (formule de Taylor d'ordre $k+1$). *Soit $f \in C^{k+1}(U)$. Alors*

$$f(a+u) = \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_n \leq k+1} \frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_n}}(a)\frac{u_1^{i_1}u_2^{i_2}\ldots u_n^{i_n}}{i_1!.i_2!\ldots i_n!} + o(\|u\|^{k+1}).$$

Si nous introduisons les notation $\alpha = (i_1,i_2,\ldots,i_n)$, $|\alpha| = i_1 + i_2 + \ldots i_n$, $\alpha! = i_1!.i_2!\ldots i_n!$, $x^\alpha = x_1^{i_1}x_2^{i_2}\ldots x_n^{i_n}$, $\partial x^\alpha = \partial x^{i_1}\partial x^{i_2}\ldots\partial x^{i_n}$ les formules de Taylor s'écrivent sous la forme

$$f(a+u) = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a)\frac{u^\alpha}{\alpha!} + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a+\theta u)\frac{u^\alpha}{\alpha!}$$

ou encore

$$f(a+u) = \sum_{|\alpha| \le k+1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) \frac{u^\alpha}{\alpha!} + o(\|u\|^{k+1}).$$

Bibliographie