Notions élémentaires de topologie

Exercice 1 $N : (x, y) \longmapsto |5x + 3y|$ est-elle une norme de $\mathbb{R}^2$? Quelles sont toutes les normes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$?

Exercice 2 Pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| \quad , \quad \|X\|_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \|X\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Montrer que $\|.\|_1, \|.\|_2, \|.\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ Représenter graphiquement les boules unités de chacune d'entre elles. Peut-on "comparer" ces trois normes ? Ecriver les définitions des distances d_1,d_2 et d_∞ associées à chacune d'entre elles.

Exercice 3 (Normes sur $\mathbb{R}^2$) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x, y) = \text{Max}(\sqrt{x^2 + y^2}, |x-y|)$ et $N_2(x, y) = \sqrt{x^2/9 + y^2/4}$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unités fermées associées à ces normes.
2. Montrer que $N_2 \leqslant \|.\|_\infty \leqslant \|.\|_2 \leqslant N_1 \leqslant \|.\|_1 \leqslant 4N_2$.

Exercice 4 Montrer que chacune des applications suivantes défini une norme sur $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n : x_i \in \mathbb{R}\}$

$$x \to \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, , x \to \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^2|}, x \to \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (admise).

Exercice 5 Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies et continues sur [-1,1].

1. Montrer que les trois applications suivantes sont des normes sur E :

$$f \longrightarrow \|f\|_1 = \int_{-1}^{+1} |f(x)|dx, \quad f \longrightarrow \|f\|_2 = (\int_{-1}^{+1} f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$f \longrightarrow \|f\|_\infty = \sup_{x \in [-1,+1]} \{|f(x)|\}$$

2. Montrer que $(E, \|.\|_\infty)$ est un espace complet.

Exercice 6 Soit (E, d) un espace métrique complet, et f une application de E dans E telle qu'il existe $k \in \mathbb{R},\ 0 < k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) \leqslant k\ d(x, y) \quad \forall x \in E,\ \forall y \in E.$

1. Montrer que f est continue sur (E, d).
2. Soient $x_0 \in E$ et pour $n \geqslant 0,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est de Cauchy dans (E, d).
3. Montrer que cette suite converge vers un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de $f(l) = l$. Montrer que ce point fixe est unique.
4. Application : montrer que le système $\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & = \frac{1}{5}(2\sin x_1 + \cos x_2) \\ x_2 & = \frac{1}{5}(\cos x_1 + 3\sin x_2) \end{array} \right.$ admet une solution unique $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7 Représenter graphiquement et déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts.
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x - 1| < 1\}$; $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leqslant 1\}$;
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leqslant 1\}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$;
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}$; $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$.

Exercice 8 On définit un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^2$ en posant

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 2\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 < 1\}.$$

Déterminer l'intérieur et l'adhérence de A.

Exercice 9 Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants sont-ils ouverts ? Fermés ? Compacts ?

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - \sin(y) \leqslant 4\}$$
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - 4e^y > 4\}$$
$$C = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \mid \cos(x) \geqslant 0\}$$

Exercice 10 Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E. Montrer :

1. $C_{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_A}$, $C_{\bar{A}} = \overset{\circ}{C_A}$
2. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

   En **déduire** $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

Exercice 11 Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}.$$

Démontrer que

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = 0$$

et que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 12 Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Démontrer que les deux limites itérées

$$\lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) \quad \text{et} \quad \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y)$$

n'existent pas, et que

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

existe et est égale à 0.

Exercice 13 Étudier la continuité des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_1(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0),$$
$$f_1(0,0) = 0.$$
$$f_2(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0),$$
$$f_2(0,0) = 0.$$

Université Paul Sabatier
UFR MIG - Département de Mathématiques

CALCUL DIFFÉRENTIEL - Feuille 2

UE08, Licence 2ème Année

I. Continuité :

1. Pour la fonction suivante, trouver le domaine de définition Ω, montrer que c'est un ouvert, et étudier la continuité de f sur cet ouvert.
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x+y}{x-y} \end{array}$$

2. La fonction suivante est-elle continue en $(0,0)$?
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

3. Examiner la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} & ; \quad x^2 \neq y^2 \\ \frac{3}{2}x & ; \quad x^2 = y^2 \end{cases} \end{array}$$

II. Dérivées partielles, classes de fonctions, théorème de Schwarz :

1. Pour la fonction suivante, étudier sa continuité dans $\mathbb{R}^3$ et calculer ses dérivées premières. Cette fonction appartient-elle à $\mathcal{C}^1$?
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & ; \quad (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases} \end{array}$$

2. Prouver que f n'est pas continue en $(0,0)$ mais qu'elle admet une dérivée en $(0,0)$ selon tout vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$.La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x-y} & ; \quad x \neq y \\ 0 & ; \quad x = y \end{cases} \end{array}$$

3. Pour la fonction suivante, déterminer son domaine de définition, calculer ses dérivées partielles et dire si elle est $\mathcal{C}^1$.
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{x^2-y^2} \end{array}$$

4. Pour la fonction suivante, déterminer son domaine de définition, calculer ses dérivées partiellles du premier et du second ordre, puis trouver un ouvert dans lequel elle est de classe $\mathcal{C}^2$.
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \sqrt{1-x^2-y^2} \end{array}$$

5. Montrer que $\partial^2_{xy} f(0,0)$ et $\partial^2_{yx} f(0,0)$ existent et sont distinctes. Que conclure ?
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

6. Trouver une condition suffisante et nécessaire sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que f soit solution de l'équation de Laplace :

$$\partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f + \partial^2_{zz} f = 0$$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & e^{ax+by} sin(cz) \end{array}$$

III. Dérivées partielles de fonctions composées :

1. Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Exprimer à l'aide de la dérivée de F, les dérivées partielles de la fonction f. f est-elle $\mathcal{C}^1$?
$$f(x,y) = F(\frac{2x+3y}{1+x^2+y^2})$$
2. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.On pose, pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.Soit : $F(x,y,z) = \varphi(r)$. Montrer que, dans l'ouvert $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$:
$$(\frac{d\varphi}{dr})^2 = (\partial_x F)^2 + (\partial_y F)^2 + (\partial_z F)^2$$
3. Soit U ouvert de $\mathbb{R}^2$ et u, v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2(U)$ tq :
$$\partial_x u = \partial_y v \quad \text{et} \quad \partial_y u = -\partial_x v$$
Montrer que si f désigne u ou v, on a :
$$\partial^2_{xx} f + \partial^2_{yy} f = 0$$
Soient $z = x+iy \in \mathbb{C}$, avec $u(x,y) = Re(z^3)$ et $v(x,y) = Im(z^3)$. Montrer que u, v vérifient les hypothèses ci-dessus.
4. Soient $u, v, f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. On pose $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$. Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction F.

Université Paul Sabatier
UFR MIG - Département de Mathématiques

CALCUL DIFFÉRENTIEL - Feuille 3
UE08, Licence 2ème Année

Différentielles :

Exercice 1 : On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme Euclidienne que l'on note $\|\cdot\|_2$. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 - y^2$.

1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, calculez $f(x + h, y + k) - f(x, y)$.
2. On définit pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'application (dépendant de x et y)
$$\begin{array}{rccl} L_{x,y} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (h,k) & \mapsto & \begin{pmatrix} 2\,x \\ -2\,y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 2\,x\,h - 2\,y\,k. \end{array}$$
Montrez que $L_{x,y}$ est continue.
3. Montrez que $L_{x,y} = Df(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 2 : Calculer la différentielle des fonctions suivantes
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & e^x \sin(y), \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} g : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & x^2 e^{yz} h(y, zx), \end{array}$$
où h est une fonction différentiable de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : La troisième loi de Kepler donne la relation
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM},$$
entre la masse M du soleil, la période T de révolution d'une planète autour du soleil, a la longueur du petit axe de l'orbite, et G la constante de gravitation. En supposant qu'on connaît des mesures de a, T et G à Δa, ΔT et ΔG près, on veut en déduire la masse du soleil, ainsi que l'incertitude liée à celles sur a, T et G :

1. Exprimez M en fonction des autres variables.
2. Calculez $M(a + \Delta a, T + \Delta T, G + \Delta G)$ en fonction de $M(a, T, G)$, de $\Delta a, \Delta T, \Delta G$ et d'un reste.
3. Quels termes peut-on négliger dans la formule précédente si les incertitudes sont suffisamment petites ? Déduisez en une estimation de l'incertitude ΔM sur la masse du soleil (i.e majorer $\Delta M = |M(a+\Delta a, T+\Delta T, G + \Delta G) - M(a, T, G)|$.

Changement de variables :

Exercice 4 : Déterminer toutes les fonctions de $C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ solution de l'équation aux dérivées partielles (EDP) suivante :
$$\partial_x f - \partial_y f = 0,$$
en utilisant le changement de variables $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = x - y$.

Exercice 5 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$. On veut déterminer les fonctions de $C^1(D; \mathbb{R})$ telles que
$$x\partial_x f + y\partial_y f = 0.$$

1. Vérifier que $\phi(x, y) = \frac{y}{x}$ est solution.
2. Soit $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que $g \circ \phi$ est solution.

3. Soit f une solution, montrer que $F(u,v) = f(u,uv)$ ne dépend que de v.
4. Donner toutes les solutions.

Formule de Taylor - Calculs d'extrema :

Exercice 6 : Ecrivez le développement de Taylor à l'ordre 2 au point $(1,2)$ de la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + x\,y^2 + y^2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 7 : Déterminer si les matrice suivantes peuvent être des matrices Hessiennes. Si oui, trouver toutes les fonctions de $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ qui ont ces matrices comme matrices Hessiennes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ x-y & y^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 : Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions :

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + x^3, \end{array} \qquad g: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & g(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2). \end{array}$$

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 - 3\,x + x\,y^2$. Déterminez les points critiques de f et leur nature (minimum local ? maximum local ? point selle ?...)

Université Paul Sabatier
UFR MIG - Département de Mathématiques

CALCUL DIFFÉRENTIEL Feuille 4
UE08, Licence 2ème Année

Fonctions composées :

Exercice 1 : Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

1. Soit $g(x) = f(x, u(x), x)$. Calculer g'.
2. Soit $h(x, y) = f(u(x), v(x, y), x)$. Calculer $\partial_x h$ et $\partial_y h$.
3. Soit $j(x) = f(u(x), x, v(x, x))$. Calculer j'.

Théorème d'inversion locale :

Exercice 2 : Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^3 + 3\, x\, e^y, y - x^2)$ est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ puis que c'est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : Soit l'application $f : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. En quels points peut-on appliquer le théorème d'inversion locale ? Utiliser ce théorème pour calculer facilement $\partial_x \theta$ et $\partial_y \theta$.

Théorème des fonctions implicites :

Exercice 4 : On pose $f(x, y) = x^4 + x^2 + y^4 + 2y^2 - 5$. Trouver une fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I contenant 1, définie implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$ et vérifiant $\varphi(1) = 1$.
Préciser l'intervalle I et dire si la fonction φ est unique.

Exercice 5 : Soient $I =]-\infty, 1[$ et $U = I \times \mathbb{R}$. On définit

$$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^3 + y^3 - 1 \end{array}$$

a) Montrer en utilisant le théorème des fonctions implicites que, pour tout $(x_0, y_0) \in U$ vérifiant $f(x_0, y_0) = 0$, il existe une fonction $\varphi : x \mapsto y = \varphi(x)$ définie implicitement au voisinage de ce point par la relation $f(x, y) = 0$.
b) Montrer en la calculant qu'il existe une unique fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie implicitement par $f(x, y) = 0$. Vérifier que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ et satisfait l'équation

$$y^2 y''' + 6yy'y'' + 2(y')^3 + 2 = 0$$

Exercice 6 : Soit $f(x, y, z) = z^4 - x^4 - 2z^2 + x^2 - y^2 - 1$. Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, l'équation $f(x, y, z) = 0$ a une unique solution $z = \psi(x, y) > 0$.
Montrer que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$.
Calculer les dérivées partielles de cette fonction en $(2, 2)$.

Université Paul Sabatier
UFR MIG - Département de Mathématiques

CALCUL DIFFÉRENTIEL - Feuille 5
UE08, Licence 2ème Année

Courbes planes :

Exercice 1 : Soit $a > b > 0$ et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

1. Montrer que la courbe E peut être paramétrée par
$$\begin{cases} x(\theta) = a\cos\theta, \\ y(\theta) = b\sin\theta \end{cases}$$
pour $\theta \in [0, 2\pi[$ et dessiner E dans le plan.
2. Calculer le vecteur vitesse en un point $M = (x, y) \in E$ relatif à la paramétrisation précédente. Calculer le vecteur unitaire normal à E sortant en un point $M = (x, y) \in E$.
3. On pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = c/a =$, $h = a^2/c$, $F = (c, 0)$, $F' = (-c, 0)$, D la droite $x = h$ et D' la droite $x = -h$. Montrer que
$$M = (x, y) \in E \iff MF = e \text{ dist}(M, D) \iff MF' = e \text{ dist}(M, D').$$
4. En déduire que $M = (x, y) \in E \iff MF + MF' = 2a$.
5. Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in E$ avec $y_0 \neq 0$ et P le point d'intersection de D et de la perpendiculaire à (M_0F) passant par F. Montrer que (PM_0) est tangente à E.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$. Montrer que l'équation $f(x, y) = f(1, 1)$ définit, au voisinage du point $(1, 1)$, une courbe dont on précisera la tangente en $(1, 1)$.

Surfaces dans $\mathbb{R}^3$:

Exercice 3 : Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = x^2 - y^2 + 1\}$.

1. Montrer que S n'a pas de point singulier.
2. Donner l'expression du vecteur normal et l'équation du plan tangent en tout point de S.

Exercice 4 : Soit $D = [0, 2\pi]^2$ et S' la surface paramétrée sur D par
$$F(t, \theta) = ((1 - \cos t)\cos\theta, (1 - \cos t)\sin\theta, t - \sin t).$$

1. Déterminer les points singuliers de S'.
2. Donner l'expression d'un vecteur normal et l'équation du plan tangent en tout point régulier.

Exercice 5 : Soit l'ellipsoïde $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$.

1. Déterminer les plans tangents à $\mathcal{E}$ qui coupent les axes en trois points A, B, C tels que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$.
2. A quoi ressemble l'intersection de $\mathcal{E}$ avec un plan qui passe par l'origine ?

Université Paul Sabatier
UFR MIG - Département de Mathématiques

CALCUL DIFFÉRENTIEL - Feuille 6

UE08, Licence 2ème Année

Intégrales multiples

Exercice 1- Calculer les intégrales doubles suivantes : $I = \int\int_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\, dx\, dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 < r^2\}$, avec $a, b, r > 0$. $K = \int\int_\Delta \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, où $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 - 2y > 0,\ x^2 + y^2 < 1,\ x > 0, y > 0\}$.

Exercice 2-
Pour $r > 0$, on pose $I_r = \int\int_{\Delta_r} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$, $J_r = \int\int_{D_r} e^{-(x^2+y^2)}$, où $\Delta_r =]0, r[\times]0, r[$ et $D_r = \{(x, y) |\ x^2 + y^2 < r^2,\ x > 0,\ y > 0\}$.

1. À l'aide des coordonnées polaires, calculer J_r, puis $\lim_{r\to+\infty} J_r$.
2. Comparer I_r, J_r et $J_{r\sqrt{2}}$.
3. En déduire l'existence et les valeurs des limites suivantes : $\lim_{r\to+\infty} I_r$, $\lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{-x^2}\, dx$.

Exercice 3- Soient $0 < a < b$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0,\ y > 0,\ a < xy < b,\ x < y < \sqrt{x^2 + 1}\}$.

1. Représenter Δ et montrer que Δ est un ouvert borné.
2. À l'aide du changement de variable ($X = y^2 - x^2$, $Y = xy$), calculer l'intégrale $J = \int\int_\Delta 2(y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

Exercice 4-(Examen juin 2001)

1. Soit $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. On considère l'application $(x, y) \in \Omega \mapsto F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$ définie par $u(x, y) = \frac{x^2}{2y}$ et $v(x, y) = \frac{y^2}{2x}$. Montrer que F est un difféomorphisme de Ω dans lui-même et calculer sa matrice jacobienne.
2. On considère les domaines $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geqslant \sqrt{x}, x \geqslant \sqrt{y}\}$, $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \leqslant \sqrt{2x}, x \leqslant \sqrt{4y}\}$ et $D = D_1 \cap D_2$. Représenter D et montrer brièvement que $D \in \Omega$.
3. A l'aide du changement de variables du 1), calculer l'aire de D.

Université Paul Sabatier

Calcul différentiel - Feuille 7

Intégrales triples, intégrales de surfaces et intégrales curvilignes

Exercice 1. Calculez le volume du tonneau $T = \{x^2 + y^2 \leqslant \phi(z)^2, -h \leqslant z \leqslant h\}$, de hauteur $2h$ et de petit et grand rayon R_1 et R_2, où $\phi(z) = \frac{R_1 - R_2}{h^2} z^2 + R_2$.

Exercice 2. (examen juin 2001)
Soient $0 < \rho < R$. On considère la surface $S \subset \mathbb{R}^3$ paramétrée de la façon suivante : $x = (R + \rho \cos \phi) \cos \theta$, $y = (R + \rho \cos \phi) \sin \theta$, $z = \rho \sin \phi$, avec $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$.
a) Donnez l'expression du vecteur normal $\vec{N}(\phi, \theta)$ en un point quelconque de S.
b) Calculez l'aire de S.
c) Déterminez l'ensemble des points de S en lesquels le plan d'équation $z = \rho$ est tangent.

Exercice 3. Soit la surface S définie par $z = x^2 + y^2 \leqslant 2$
a) Représentez S.
b) Calculez le vecteur normal à S.
c) Calculez l'aire A de S.
d) Calculez le flux ϕ du vecteur $(0, 0, 1)$ à travers S.
e) Calculez $I = \iint_S (x + y + z)\, dS$ et $J = \iint_S (x + y + z)\, dx\, dy$.
f) Si S représente un récipient, quelle est la contenance de V ?
g) Calculez $K = \iiint_{\mathcal{V}} (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$ où $\mathcal{V}$ est le volume délimité par S et le plan d'équation $z = 2$.

Exercice 4. (examen juin 2003)
On considère la surface Σ paramétrée par $F(t, \theta) = (R(1 - \cos t) \cos \theta, R(1 - \cos t) \sin \theta, R(t - \sin t))$, où R est une constante > 0 et t et θ sont des paramètres qui varient entre 0 et 2π.
a) Déterminer l'ensemble des points réguliers de Σ.
b) En tout point régulier de Σ, donner l'expression du vecteur normal et l'équation du plan tangent.
c) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface Σ (indication : on a $4 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - sin 3\alpha$).

Exercice 5. Calculez $\iint_S y\, z\, dy\, dz + x\, z\, dx\, dz + x\, y\, dx\, dy$ où S est la face extérieure du tétraèdre délimité par les plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 3$.

Exercice 6. Calculer le périmètre de l'astroïde, courbe paramétrée par $x(t) = 4a \cos^3 t$ et $y(t) = 4a \sin^3 t$, avec t allant de 0 à 2π.

Exercice 7. (examen juin 2001)
C^+ désignant le cercle de $\mathbb{R}^2$ de centre $(0, 0)$ et de rayon $R > 0$ parcouru dans le sens positif, calculez l'intégrale curviligne $I = \int_{C^+} x^3\, dy - y^3\, dx$.

Exercice 8. a) Soit D un domaine fermé par un arc γ. En utilisant la formule de Green-Riemann, montrer que l'aire de D vaut $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\gamma^+} x\, dy - y\, dx$.
b) Soit l'arc AB définit en coordonnées polaires par $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ et $r = r(\theta)$ qui est une fonction donnée. Soit D le domaine compris entre le segment OA, l'arc AB et le segment BO. En utilisant la question précédente, montrer que $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r(\theta)^2\, d\theta$.