1. Soit $\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : x^3 + y^3 - 3xy = c\}$, $\bar{\Gamma}_c$ la compactification de Γ_c dans $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ et $\tilde{\Gamma}_c$ na surface de Riemann compacte associée.

   (a) Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{C}$ la courbe plane $\bar{\Gamma}_c$ est singulière. Determiner les singularités.

   (b) Montrer que la courbe plane affine Γ_c, $c \neq -1$, est irréductible, tandis que Γ_{-1} est réductible.

   (c) Utiliser la formule de genre pour calculer le genre de la surface de Riemann $\tilde{\Gamma}_c$ de Γ_c, si $c \neq -1$.

   (d) Soit $l_t = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y = tx\}$, $t \in \mathbb{C}$ et $l_\infty = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : x = 0\}$. Calculer l'indice d'intersection $(l_t \cdot \Gamma_0)_{(0,0)}$ de l_t et Γ_0 à l'origine, selon les valeurs de $t \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

   (e) Montrer que l'ensemble $\{\bar{l}_t \cap \bar{\Gamma}_0\} \setminus \{(0,0)\}$, où $t \neq 0, \infty$ est constitué d'un seul point $P(t) \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$. Calculer $P(t)$ ainsi que $P(0) = \lim_{t\to 0} P(t)$, $P(\infty) = \lim_{t\to\infty} P(t)$. En déduire que l'application $\pi : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \to \bar{\Gamma}_0 : t \mapsto P(t)$ est la normalisation de $\bar{\Gamma}_0$ (par conséquent $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ est la surface de Riemann de $\bar{\Gamma}_0$).

2. Soit E une surface de Riemann compacte de genre $g \leq 1$ et soit $D = \sum_i n_i P_i \in Div(E)$, $n_i \in \mathbb{N}$, un diviseur positif. Montrer que $\dim \mathcal{L}(D) = \deg(D) - g + 1$.

3. Soit Γ_c, la courbe définie dans l'exercice 1. Nous avons $\Gamma_c = \bar{\Gamma}_c \setminus \{\infty_1, \infty_2, \infty_3\}$.

   On pose $c = 1$.

   (a) Calculer une base de $\mathcal{L}(\infty_1 + \infty_2 + \infty_3)$.

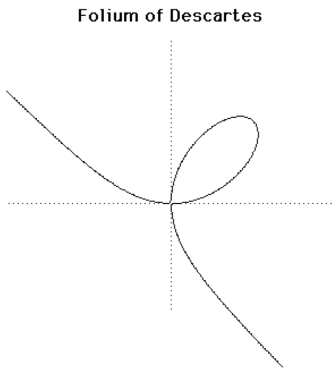
   (b) l'involution $(x,y) \mapsto (y,x)$ de $\mathbb{C}^2$ induit une involution $i : \tilde{\Gamma}_c \to \tilde{\Gamma}_c$ (application biholomorphe, telle que $i^2 = id$). Nous pouvons supposer que $i(\infty_1) = \infty_2, i(\infty_2) = \infty_1, i(\infty_3) = \infty_3$. Montrer que i induit un endomorphisme L de $\mathcal{L}(\infty_1+\infty_2+\infty_3)$. Calculer les vecteurs propres de L.

   (c) Soit
   $$j : \tilde{\Gamma}_c \to \mathbb{P}\mathbb{C}^1 : (x,y) \mapsto x + y.$$
   Quel est le degré de j ? Calculer le diviseur des pôles $(x+y)_\infty$ de $x+y$.

   (d) On pose $c = 0$. Calculer $\mathcal{L}(\infty_1 + \infty_2 + \infty_3)$.

   (e) Répondre aux questions précédentes (a), (b), (c) sous la condition $c = 0$.

   Question bonus: Soit $\mathbb{M}(\Gamma_0)$ le corps des fonction méromorphes sur $\tilde{\Gamma}_0$ et $\mathbb{C}(x,y)$ le corps des fonction rationnelles sur $\mathbb{C}^2$. Montrer que $\mathbb{C}(x,y)|_{\Gamma_0} = \mathbb{M}(\Gamma_0)$.



$$x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

Étymologie et histoire

Le Folium de Descartes est une courbe mathématique étudiée tout d'abord par Descartes et Roberval en 1638 (lors d'une correspondance avec Mersenne) puis étudiée par Huygens en 1672. Cette courbe met en évidence les faiblesses de la méthode de Fermat dans la recherche des extremums d'une courbe algébrique.

La courbe possède une forme de nœud de ruban. Lors de leur étude, Descartes et Roberval se limitèrent à une boucle, ne considérant que les coordonnées positives ($x > 0, y > 0$) car ils pensaient que la boucle se répetait dans chaque quart de repère, à la manière des quatre pétales d'une fleur (d'où son nom de folium = feuille).