1. Soit $\Gamma_c = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 + y^2 + x^2 y = c\}$, $\bar{\Gamma}_c$ la compactification de Γ_c dans $\mathbb{P}^2\mathbb{C}$ et $\tilde{\Gamma}_c$ la surface de Riemann compacte associée.

   (a) Pour quelles valeurs de $c \in \mathbb{C}$ la courbe plane $\bar{\Gamma}_c$ est singulière ? Determiner les singularités.

   (b) Montrer que la courbe plane affine Γ_c, $c \neq 1$, est irréductible, tandis que Γ_1 est réductible.

   (c) Calculer le genre de la surface de Riemann $\tilde{\Gamma}_c$ de Γ_c, si $c \neq 1$.

   (d) Montrer que la fonction $x^2 + y^2 + x^2 y$ est réductible dans $\mathbb{C}\{x, y\}$.

   (e) Soit $l_t = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y = tx\}$, $t \in \mathbb{C}$ et $l_\infty = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : x = 0\}$. Calculer l'indice d'intersection $(l_t \cdot \Gamma_0)_{(0,0)}$ de l_t et Γ_0 à l'origine, selon les valeurs de $t \in \mathbb{P}^1\mathbb{C}$.

   (f) Montrer que l'ensemble $\{\bar{l}_t \cap \bar{\Gamma}_0\} \setminus \{(0,0)\}$, où $t \neq 0, \infty$ est constitué d'un seul point $P(t) \in \mathbb{P}^2\mathbb{C}$. Calculer $P(t)$ ainsi que $P(0) = \lim_{t\to 0} P(t)$, $P(\infty) = \lim_{t\to\infty} P(t)$. En déduire que l'application $\pi : \mathbb{P}^1\mathbb{C} \to \bar{\Gamma}_0 : t \mapsto P(t)$ est la normalisation de $\bar{\Gamma}_0$ (par conséquent $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ est la surface de Riemann de $\bar{\Gamma}_0$).

2. Soit Γ_c, la courbe définie dans l'exercice 1. On suppose que $c \neq 0, 1$. Nous avons $\Gamma_c = \bar{\Gamma}_c \setminus \{\infty_1, \infty_2\}$.

   (a) Calculer la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\infty_1 + \infty_2)$.

   (b) Vérifier que $x \in \mathcal{L}(\infty_1 + \infty_2)$.

   (c) Vérifier que la fonction $1 + y$ ne s'annule pas sur Γ_c. Est-ce que $y \in \mathcal{L}(\infty_1 + \infty_2)$ (justifier le réponse).

   (d) Calculer une base de l'espace $\mathcal{L}(2\infty_1)$, $\mathcal{L}(2\infty_2)$, $\mathcal{L}(2\infty_1 + 2\infty_2)$

   (e) l'involution $(x, y) \mapsto (-x, y)$ de $\mathbb{C}^2$ induit une involution $i : \tilde{\Gamma}_c \to \tilde{\Gamma}_c$ (application bi-holomorphe, telle que $i^2 = id$). Verifier que $i(\infty_1) = \infty_1, i(\infty_2) = \infty_2$. Montrer que i induit un endomorphisme L de $\mathcal{L}(\infty_1 + \infty_2)$. Calculer les vecteurs propres de L.

   (f) Soit

   $$j : \tilde{\Gamma}_c \to \mathbb{P}\mathbb{C}^1 : (x, y) \mapsto y.$$

   Quel est le degré de j ? Calculer le diviseur des pôles $(y)_\infty$ de y, les points de ramification de j.