TP 13 - Chaîne de Markov (2)

1 Un modèle de gestion du cash

L'objectif est de simuler un modèle de gestion de cash décrit dans le libre de Brémaud (« Markov Chains, Gibbs Fields, Monte Carlo and queues »p.114). La quantité de cash comptée en kilodollars dans une banque au début du jour n est X_n. La banque gère le cash de façon à en avoir ni trop ni trop peu (en l'absence de contrôle, la quantité de cash serait une marche aléatoire symétrique). Plus précisément, la gestion est la suivante :

- Soient S et s deux entiers tels que $0 < s < S$, S est la barrière supérieure de quantité de cash.
- Le comportement « normal »de la chaîne est une marche aléatoire symétrique $+1/-1$.
- Si au jour n la banque dispose de $X_n = S - 1$ et si au cours de jour n, 1 kilodollar supplémentaire entre dans la banque, alors $S - s$ killodolars sont transférés pendant la nuit et $X_{n+1} = s$.
- Inversement, si $X_n = 1$, et si un killodolar est retiré le jour n, le coffre est alors rempli pendant la nuit et on a $X_{n+1} = s$.

On suppose que $X_0 \in \{1 \ldots, S-1\}$, le processus X_n est une chaîne de Markov sur $\{1, \ldots, S-1\}$.

1. Que vaut la matrice de transition P de cette chaîne de Markov ? Monter qu'elle est récurrente irréductible. On note π sa distribution de probabilité invariante, vérifier que
$$\pi(k) = \frac{2k}{sS} \qquad \forall k \in \{1, \ldots, s\}$$
$$\pi(k) = \frac{2(S-k)}{(S-s)S} \qquad \forall k \in \{s+1, \ldots, S\}$$
2. Faire une simulation de cette chaîne de Markov (en indiquant aussi les endroits où la chaîne a « sauté »de 0 à s ou de S à s).
3. Convergence vers la loi stationnaire : pour quelle valeurs de s et S la chaîne est-elle apériodique ? Soit μ_0 la loi initiale, tracer dans le cas apériodique la courbe $n \longmapsto |\mu_0 P^n - \pi|_{L^1}$.
4. Utiliser les commandes *moviein, getframe* et *movie* pour faire une animation montrant la convergence de la loi $\mu_0 P^n$ vers la loi invariante π. (On pourra tracer sur une même figure les histogrammes de $\mu_0 P^n$ et π, et faire varier n).

2 Files d'attente

Un système de service est modélisé par 2 suites de variables aléatoires indépendantes :

- Une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a i.i.d. représentant les délais entre les arrivées des différents clients, T_n le temps d'arrivée du client n est alors donné par

$$T_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

– Une suite S_n de v.a. i.i.d. indépendantes des X_n, S_n représente le temps de service du n-ième client.

On note $Q(t)$ la longueur de la file d'attente, i.e. le nombre de clients dans le système au temps t. On définit l'intensité du trafic ρ par

$$\rho = \frac{\mathbb{E}[S]}{\mathbb{E}[X]}$$

2.1 Files $M(\lambda)/M(\mu)/\infty$

Cette notation indique que les X_n suivent une loi exponentielle de paramètre λ (ce qui implique que les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité λ), que les S_n suivent une loi exponentielle de paramètre μ et qu'il y a une infinité de « serveurs »(ceci peut modéliser un système de téléphone ayant une infinité de lignes). L'intensité du trafic est donc ici $\rho = \lambda/\mu$.

1. Montrer que le nombre de clients dans le système au temps t est

$$Q(t) = \sum_{n\geq 1} 1\!\!1_{\{T_n+S_n\geq t\}} 1\!\!1_{\{T_n\leq t\}}.$$

En déduire un algorithme de simulation de la file d'attente $Q(t)$.

On pourra à l'aide de la commande `subplot` présenter plusieurs simulations sur un même graphique.

Vérifier expérimentalement que le processus est récurrent lorsque $\rho < 1$, et transient lorsque $\rho > 1$.

2. Montrer que

$$\mathbb{E}(Q(t)) = \frac{\lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}).$$

Le vérifier expérimentalement en faisant N simulations de files d'attente $Q_i(t)$ $(1 \leq i \leq N)$, et en traçant sur un même graphique la moyenne empirique des $Q_i(t)$ et l'espérance théorique.

Rq. : Pour plus de détails sur les files M(λ)/M(μ)/∞, consulter le livre de P. Brémaud, "Introduction aux probabilités" [**?**] (tout le chapitre VII, sur les processus de Poisson).

2.2 Files M(λ)/M(μ)/1

Cette notation indique que les X_n suivent une loi exponentielle de paramètre λ, que les S_n suivent une loi exponentielle de paramètre μ, et qu'il n'y a qu'un seul "serveur". On a ici aussi $\rho = \lambda/\mu$.

1. On note U_n les dates de changements (départ ou arrivée d'un client) et $Q_n = Q(U_n+)$ le nombre de clients en attente juste après le n-ième changement. Faire une simulation de la file d'attente en traçant sur un même graphique U_n et Q_n (on pourra utiliser des boucles `while` en séparant les périodes où les clients présents sont servis jusqu'à une arrivée suivante, et les périodes où des clients arrivent pendant qu'un autre est servi).

Vérifier expérimentalement que le processus est récurrent lorsque $\rho < 1$, et transient lorsque $\rho > 1$.

2. Montrer que $\{Q_n, n \geq 0\}$ est une marche aléatoire sur $\mathbb{N}$ dont les probabilités de transition sont données par : si $k \geq 1$, $p_{k,k+1} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ et $p_{k,k-1} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$; et $p_{0,1} = 1$.

Montrer que $\{Q_n\}$ est positive récurrente ssi $\rho < 1$ et que, dans ce cas, la mesure stationnaire est donnée par :

$$\pi(0) = \frac{1}{2}(1-\rho) \quad \text{et} \quad \pi(k) = \frac{1}{2}(1-\rho^2)\rho^{k-1} \quad \text{pour} \quad k \geq 1.$$

Faire des simulations d'une telle marche $\{Q_n\}$ pour différentes valeurs de ρ.
Vérifier expérimentalement que le processus est transient lorsque $\rho > 1$. Dans le cas $\rho < 1$, simuler une chaine $\{Q_n\}$ jusqu'à un $n_{\max}$ grand et tracer sur un même graphique l'histogramme normalisé des valeurs prises par les Q_n, $1 \leq n \leq n_{\max}$, et la mesure stationnaire.

2.3 Files M(λ)/D(d)/1

Cette notation indique que les X_n suivent une loi exponentielle de paramètre λ, que les S_n sont déterministes, de valeur d, et qu'il n'y a qu'un seul "serveur". On a alors ici $\rho = \lambda d$.

On note D_n l'instant de départ du n-ème client. Faire une simulation de la file d'attente aux instants D_n : tracer les D_n et $Q(D_n+)$ sur un même graphique. Vérifier que le processus est transient lorsque $\rho > 1$ et récurrent lorsque $\rho < 1$.

Rq. : Pour plus de détails sur les files d'attente M/G/1, en particulier sur la matrice de transition de la chaine de Markov $Q(D)$, sur sa mesure stationnaire dans le cas $\rho < 1$, on pourra consulter le chapitre "Queues" du livre de G. Grimmett et D. Stirzaker, "Probability and Random Processes" [**?**].