Module Complémentaire
Poursuites études

Michel Fournié

michel.fournie@iut-tlse3.fr

http://www.math.univ-toulouse.fr/ ˜ fournie/

Année 2012/2013

Plan du cours

- Complément d'algèbre linéaire
  - Diagonalisation des matrices carrées
  - Systèmes différentiels linéaires

- Autres notions (suites, séries, analyse vectorielle)

- Applications concrètes

(savoir faire des liens entre théorie et exercice pratique)

- Le cours d'amphi OBLIGATOIRE (abstraction)

Volume horaire = 4.5h Cours + 8h TD

Table des matiéres

(Rappel) Changement de base

- Soit f une application linéaire d'un espace E dans E (e.v.)
- Soient 2 bases de E notées $(e_1, \cdots, e_p)$ et $(e'_1, \cdots, e'_p)$
- A et A' les matrices de f dans (e_i) et (e'_i).
- X et X' un même vecteur dans (e_i) et (e'_i).
- Exprimer (e'_i) en fonction de (e_i)

$$\boxed{e'_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} e_i, \quad j = 1, \cdots, p}$$

Rappel : P matrice de passage de la base (e_i) à (vers) la base (e'_j)

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1p} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdots & \alpha_{pp} \end{bmatrix}$$

P a pour vect. col. les vect. lignes de la nouvelle base exprimés à l'aide de leurs composantes dans l'ancienne base

(Rappel) Effet d'un changement

Effet d'un changement de base sur un vecteur

$$\boxed{X = PX'}$$

Effet d'un changement de base sur une matrice

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

Définition: S'il existe une matrice inversible P où $A' = P^{-1}AP$ on dira que A et A' sont semblables

Valeur et vecteur propre

Définition :
Un vecteur V est appelé vecteur propre de A s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\boxed{AV = \lambda V}$$

Le scalaire λ est appelé valeur propre de A.
On dit que V est un vecteur propre associé à la valeur propre λ
Définition : Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\boxed{\det(A - \lambda I) = 0}$$

$\det(A - \lambda I)$ est un polynôme de degré n en λ
ce polynôme est appelé polynôme caractéristique

Sous espace propre

Définition :

- Pour une valeur propre λ_i, on peut lui associer un certain nombre de vecteurs propres.
- Ces vecteurs génèrent (engendrent) un espace noté E_{λ_i} lié à λ_i qui est un sous espace vectoriel de E

Cet espace est appelé sous espace propre lié à λ_i

Démarche à suivre :

Détermination des valeurs propres avec leurs multiplicités

$$\Downarrow$$

Détermination des vecteurs propres associés avec leurs dimensions

Diagonalisation

Définition :

- A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale
- On diagonalise une matrice A quand on cherche une matrice diagonale qui lui est semblable

Propriété pratique :

Soient p vecteurs propres $V_1, \cdots, V_p$ associés à p valeurs propres 2 à 2 distinctes Alors $V_1, \cdots, V_p$ sont linéairement indépendants

Conséquence :

Si f est une application linéaire de E dans E s.e.v de dimension n qui admet n valeurs propres distinctes, les n vecteurs propres associés forment une base de E

Diagonalisation – Valeurs propres distinctes

- Soit $A = (a_{ij})$ une matrice dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$
- $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ valeurs propres distinctes

et $V_1, \cdots, V_n$ les vecteurs propres associés.
Dans la base $(V_1, \cdots, V_n)$ formée par les vecteurs propres la matrice notée A' s'écrit

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Diagonalisation – Valeurs propres multiples

Propriété pratique :

A est diagonalisable si et seulement si toutes ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}$ et que la dimension du sous espace vectoriel engendré par chaque vecteur propre (sous espace propre) est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.

Autres cas :

Quand ces conditions ne sont pas vérifiées, la matrice peut être réduite à une matrice triangulaire

Diagonalisation des matrices symétriques

Propriété pratique : (Dans $\mathbb{R}^3$)
Deux vecteurs propres associés à deux valeurs propres distinctes d'une matrice symétrique sont orthogonaux.

Théorème fondamental :

- Toute matrice symétrique d'ordre n est diagonalisable, les valeurs propres sont réelles et les vecteurs propres forment une base orthogonale.
- Si de plus les vecteurs propres sont unitaires, la base des vecteurs propres est orthonormée.

Dans ce cas la matrice de passage est orthogonale c'est à dire

$P^{-1} = P^T$ (Attention : ceci est un CAS PARTICULIER).

Réduction d'une forme quadratique

- Soit $q(x,y,z)$ une forme quadratique donnée par
$$\boxed{q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy}$$
- On vérifie aisément que dans la base canonique orthonormée $(e_1, e2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire
$$q(x,y,z) = (x\ y\ z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & f & e \\ f & b & d \\ e & d & c \end{pmatrix}$$
- A est symétrique $\Longrightarrow$ A diagonalisable dans la base orthonormée formée par les vecteurs propres V_1, V_2, V_3 et s'écrit
$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Réduction d'une forme quadratique (suite)

- Changement de base défini par la matrice orthogonale P
- (x, y, z) dans (e_i) s'exprime (X, Y, Z) dans (V_i) on a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

d'où par transposition $(x\ y\ z) = (X\ Y\ Z)P^T$

- la forme quadratique s'écrit donc

$$q(X, Y, Z) = (X\ Y\ Z)\underbrace{P^T A P}_{A'}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

- D'où la forme quadratique réduite qui se dessine facilement dans le nouveau repère contrairement à $q(x, y, z)$

$$\boxed{q(X, Y, Z) = \lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2}$$

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

- On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n, \\ \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n. \end{cases}$$

- Si la matrice $A = (a_{ij})$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont distinctes, le système s'exprime sous forme réduite dans la base des vecteurs propres.

- En effet le système s'écrit $Y' = AY$ où $Y = (y_1', \cdots, y_n')^T$ $Y' = PA'P^{-1}Y$ d'où $P^{-1}Y' = A'P^{-1}Y$ or $P^{-1}Y = Z$ d'où

$$Z' = A'Z$$

- Sous cette forme on peut intégrer le système.

Systèmes différentiels linéaires (suite)

- Après diagonalisation on aboutit à

$$\begin{pmatrix} \frac{dz_1}{dx} \\ \cdots \\ \frac{dz_n}{dx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

- Ainsi $\begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 x} \\ \cdots \\ C_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$ où $C_1, \cdots, C_n$ sont des constantes arbitraires (solution générale du système)
- Si P est la matrice de passage alors la solution générale est

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} z_1 \\ \cdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Systèmes différentiels linéaires (complément)

- Si A n'est pas diagonalisable, il est utile de chercher la matrice réduite qui est alors triangulaire.
- Le système triangulaire réduit est alors

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x} = \lambda_1 z_1 + \alpha_{12} z_2 + \cdots \alpha_{1n} z_n, \\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x} = \lambda_2 z_2 + \cdots \alpha_{2n} z_n, \\ \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}n_n}{\mathrm{d}x} = \lambda_n z_n. \end{cases}$$

- On intègre la dernière équation, puis l'avant dernière et ainsi de suite $\cdots$

Exemple

Intégrer le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = y_1 + y_2 - y_3, \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = y_1 - y_2 + y_3, \\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = -y_1 + y_2 + y_3. \end{array}\right.$$

- La matrice A est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- A est diagonalisable

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple (suite)

- Ainsi $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^x \\ C_2 e^{2x} \\ C_3 e^{-2x} \end{pmatrix}$

- En conclusion on obtient la solution

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^x - C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} \\ y_2 = C_1 e^x - 2C_2 e^{2x} \\ y_3 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} \end{cases}$$

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants avec second membre

- On considère le système

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1, \\ \cdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n. \end{cases}$$

- Comme pour les équations différentielles, la solution générale du problème avec second membre s'exprime comme la somme de la solution générale du problème sans second membre avec une solution particulière du problème avec second membre.

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants avec second membre

- Le système s'écrit $Y' = AY + B$ où $B = (b_1, \cdots, b_n)^T$
- $Y' = PA'P^{-1}Y + B$ d'où $P^{-1}Y' = A'P^{-1}Y + P^{-1}B$

Si on note $Z = P^{-1}Y = Z$ et $B' = P^{-1}B$,
le système initial s'exprime après avoir diagonalisé A

$$Z' = A'Z + B'$$

- Après diagonalisation on aboutit à

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x} \\ \cdots \\ \frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \cdots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'_1 \\ \cdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants avec second membre

- Chaque ligne du système écrit sous forme matricielle correspond à une équation différentielle à une inconnue avec second membre
- La résolution de ces équations a déjà été étudiée
- L'essentiel du travail demande de trouver une solution particulière que chaque équation différentielle
- On exprime alors la solution Z et on déduit la solution générale cherchée

$$Y = PZ$$

- L'approche vue peut être appliquée à certains systèmes d'ordre supérieur (Voir TD)

Table des matiéres

Définition

Définition :
une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$.
On note u_n le réel associé à n.
u_n est appelé terme général de la suite.

Exemple : (a) $u_n = 2^n$, (b) $u_n = 2^{-n}$, (c) $\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = 1 + u_n. \end{cases}$

Définition :
u_n est croissante (décroissante) si $\forall n,\ u_{n+1} \geq u_n$ $(u_{n+1} \leq u_n)$

Définition :
u_n est majorée (minorée) si $\forall n,\ u_n \leq M$ $(u_n \geq m)$
u_n est bornée si $\forall n,\ |u_n| \leq M$ $(u_n \geq m)$

Définition :
u_n est périodique si $\exists T,\ u_{n+T} = u_n$

Définitions

Définition :
u_n est convergente (notée CV) vers un réel l si $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = l$,
sinon est sera divergente (notée DV).

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N > 0, \ \forall n \geq N \ : \ |u_n - l| < \varepsilon$$

Si l existe alors l est unique.

Exemple :
(a) $u_n = 2^n$ DV, (b) $u_n = 2^{-n}$ CV vers 0

Théorème :

- Soit (u_n) une suite croissante alors
$$[\ (u_n) \text{ CV} \Longleftrightarrow (u_n) \text{ majorée}]$$
- Soit (u_n) une suite décroissante alors
$$[\ (u_n) \text{ CV} \Longleftrightarrow (u_n) \text{ minorée}]$$

Suites arithmétiques

Définition :

une suite arithmétiques est une suite définie par son premier terme u_1 et la relation liant 2 termes consécutifs suivante

$$u_{n+1} = u_n + r$$

où $r \in \mathbb{R}$ est appelé la raison.

Exercice :

1) Une suite arithmétique est-elle croisante ou décroissante ? (selon r)

2) Comment exprimer u_n directement en fonction de u_1 ?

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

Opérations algébriques sur les suites

On utilise les définitions intuitives (somme : $(u_n + v_n)$) $\cdots$

Suites géométriques

Définition :
une suite géométrique est une suite définie par son premier terme u_1 et la relation liant 2 termes consécutifs suivante

$$u_{n+1} = qu_n$$

où $q \in \mathbb{R}$ est appelé la raison.
Exercice :
Comment exprimer u_n directement en fonction de u_1 ?

$$u_n = u_1 + q^{(n-1)}$$

Suites adjacentes

Définition :
(u_n) et (v_n) sont adjacentes si

- (u_n) croissante
- (v_n) défroissante
- $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Théorème :
Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors (u_n) et (v_n) sont CV et admettent la même limite

Récurrence

Démonstration par récurrence (notion fondamentale)

Théorème :

Soit $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 = c$ donné. $I = [a, b]$, f continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans I et $c \in I$.

- Si (u_n) CV vers un $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha \in I$ et α est un point fixe de f ($f(\alpha) = \alpha$).
- Si f est croissante sur I, (u_n) est monotone. Comme (u_n) est bornée elle est CV.
- Si f est décroissante sur I, on ne peut rien dire. Toutefois $f \circ f$ est croissante d'où (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont monotones et CV.

Théorème :

Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors (u_n) et (v_n) sont CV et admettent la même limite

Table des matiéres

Définitions

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Posons $S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$

S_n désigne la série de terme général u_n notée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Définition :

Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers S quand $n \longrightarrow +\infty$ on dit que la série CV de somme S

$$S = u_0 + \cdots + u_n + \cdots = \lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n$$

En pratique : On distingue 3 types principaux de séries

(1) série de terme général positif : $\forall n,\ u_n > 0$

(2) série de terme général de signe quelconque

- **(3)** les séries alternées : $\forall n,\ u_n = (-1)^n v_n$
  où $\forall n,\ v_n$ de signe constant

Théorèmes généraux

Théorème :

- Si 2 séries ont des termes qui ne différentes que pour un nombre fini d'indices n elles ont même nature (CV ou DV)
- Si la série de terme général (u_n) est CV alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$
  C'est un CONDITION NECESSAIRE
  mais cette condition est NON SUFFISANTE
  Par CONTRAPOSITION :
  Si $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n \neq 0$ alors la série DV

Séries à termes positifs

Critère de comparaison : Soient 2 séries à termes positifs u_n et v_n telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n$ alors

- Si v_n CV alors u_n CV
- Si u_n DV alors v_n DV

Critère de d'Alembert : $(u_n > 0)$

Si $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$

- $l < 1$ alors la série de terme général u_n CV
- $l > 1$ alors la série de terme général u_n DV
- $l = 1$?? on ne sait pas conclure

Critère de Cauchy : $(u_n > 0)$

Si $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

- $l < 1$ alors la série de terme général u_n CV
- $l > 1$ alors la série de terme général u_n DV
- $l = 1$?? on ne sait pas conclure

Séries à termes de signe quelconque

Définition :

On dit que la série de terme général u_n est absolument CV si la série de terme général $|u_n|$ est CV.

Théorème :

Un série absolument convergente est convergente.

Cas des séries alternées :

Soit la série de terme général u_n telle que

- $|u_n|$ est décroissante
- $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} |u_n| = 0$

Alors la série CV. De plus

$$\left| \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n \right| \leq |u_{n+1}|$$

Extensions

On peut définir des :

- séries de fonctions : $\sum f_n(x)$
- séries entières : $\sum a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)
- séries de Fourier
- $\cdots$

Ces notions servent notamment pour résoudre des E.D.O. ou E.D.P. issues de problèmes de mécaniques.

Séries et intégrales

Lien entre séries et intégrales :
Considérons par exemple la série $S_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$
Grace à l'interprétation graphique d'une intégrale (vue comme une aire) on montre que

$$S_n < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha}$$

Critère intégral de Cauchy :
Soit f une fonction positive et décroissante dans $[1, +\infty[$.
Posons $u_n = f(n)$ alors la série de terme général u_n est CV
Si et Seulement Si $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est CV.
Série de Riemann :
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $(n \geq 1)$ est CV
Si et Seulement Si $\alpha > 1$.

Table des matiéres

Table des matiéres