F411 - Courbes Paramétrées, Polaires

Michel Fournié

michel.fournie@iut-tlse3.fr

http://www.math.univ-toulouse.fr/ ˜ fournie/

Année 2012/2013

Table des matières

Définition d'une courbe paramétrée

Définition :

- Soient f et g deux applications définies sur $I \subset \mathbb{R}$
- Le point $M(t)$ de coordonnées $(\underbrace{f(t)}_{x}, \underbrace{g(t)}_{y})$ décrit une courbe

  du plan (C) appelée courbe paramétrée (de paramètre t)
- L'application de I sur (C) qui à t associe $M(t)$

  est **un** paramétrage de (C)
- Les équations

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

  définissent une représentation paramétrique de (C)

Notation : $(x = x(t), y = y(t)) \qquad t \longrightarrow (x(t), y(t))$

Exemple

Remarque :

- On peut toujours éliminer la variable t entre les deux équations pour obtenir y en fonction x et se ramener à une équation cartésienne

$\Longrightarrow$ Il faut étudier les variations de x en fonction de t

$\Longrightarrow$ Souvent la fonction obtenue est compliquée

- Inversement toute courbe définie par $y = h(x)$ peut être paramétrée par $(x = t, y = h(t))$
- Une même courbe admet plusieurs paramétrages

Exemple :

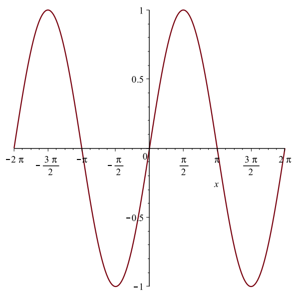
Quelle sont les courbes dont les paramétrages, pour $t \in \mathbb{R}$ sont donnés par

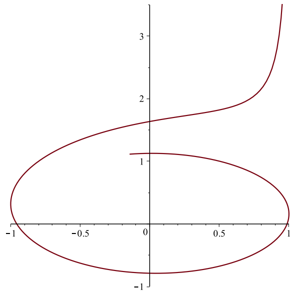
$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = t^2 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = -1 - t \\ y = (t+2)^2 \end{array} \right.$$

Commentaires fondamentaux

$\boxed{\text{Courbes Cartésiennes}} \longleftrightarrow \boxed{\text{Courbes paramétrées}}$

$x \longrightarrow f(x)$ $\qquad$ $t \longrightarrow (x(t), y(t))$





la courbe ne revient pas en arrière (1x associe 1y)

la courbe peut revenir en arrière (1x associe plusieurs y)

Domaine de définition

Définition :
Le domaine de définition I du paramétrage est l'intersection des domaines de définition des fonctions $x(t)$ et $y(t)$

Exemple :
Quel est le domaine de définition du paramétrage ? (discuter selon les valeurs de a et b et calculer $x^2 + y^2$)
Quelle est la courbe associée ?

$$\begin{cases} x = \sqrt{t-a} \\ y = \sqrt{b-t} \end{cases}$$

Courbes à paramétrage périodique

- Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ ont la même période et si T est la plus petite période positive alors la courbe est entièrement décrite lorsque

$$t \in I \cap [a, a+T[$$

et a un nombre réel fixé ($a = 0$ ou $a = \frac{T}{2}$, autre)

Exercice :

Trouver la plus petite période positive pour le paramétrage

$$\begin{cases} x = \sin\left(\dfrac{3t}{2}\right) \\ y = \sin\left(\dfrac{t}{3}\right) \end{cases}$$

Le fonction x a pour période $\frac{4\pi}{3}$ et y a pour période 6π d'où la période commune est de 12π

Animation Maple

Réduction du domaine d'étude I

Idée :
On cherche I_1 et I_2 deux sous ensemble de I tels que
les points de I_2 se déduisent des points de I_1
(par symétrie, rotation, translation)
On étudie alors la courbe pour $t \in I_1$ au lieu de $t \in I_1 \cup I_2$

Par exemple pour $M(t) = (\underbrace{\cos(t^2)}_{x}, \underbrace{\sin(t^2)}_{y}),\ t \in I = \mathbb{R}$

Où se trouve le point $M(-t)$?
Ses coordonnées s'expriment-ils simplement en fct de x et y ?

Ici $M(-t) = M(t)$ on peut donc étudier la courbe
uniquement pour $t \in \mathbb{R}^+$.

Réduction du domaine d'étude (intervalle)

Dans l'exemple on déduit $M(-t)$ de $M(t)$
ce qui s'écrit : $M(-t) = M(\phi(t))$ avec $\phi(t) = -t$
Domaine d'étude initial $I =]-\infty, +\infty[$
Domaine réduit $I_0 = [0, +\infty[$,

D'autres transformations "classiques" peuvent être testées

- $\phi(t) = -t$, $I = [-a, a]$, $I_0 = [0, a]$
- $\phi(t) = t + \frac{a}{2}$, $I = [0, a]$, $I_0 = [0, \frac{a}{2}]$
- $\phi(t) = a - t$, $I = [0, a]$, $I_0 = [0, \frac{a}{2}]$
- $\phi(t) = \frac{1}{t}$, $I =]0, +\infty[$, $I_0 =]0, 1[$
- $\phi(t) = \frac{1}{t}$, $I =]-\infty, +\infty[$, $I_0 =]-1, 1[$ $\cdots$

Réduction du domaine d'étude (courbe)

Il faut savoir :

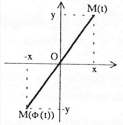
- réduire le domaine d'étude
- tracer la courbe associée au domaine réduit
- **en déduire la courbe sur sa totalité**

Soit $M(t) = (x(t), y(t)) = (x, y)$ un point associé à t.
Soit $M(\tilde{t}) = (x(\tilde{t}), y(\tilde{t})) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ un autre point associé à $\tilde{t}=\phi(t)$.
On essaye de montrer que ces deux sont liés.

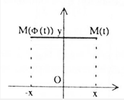
- Si $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (-x, -y)$
  alors la courbe admet une symétrie par rapport à l'origine

Réduction du domaine d'étude (courbe)

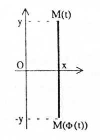
$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (-x, -y) \implies$ symétrie par rapport à l'origine



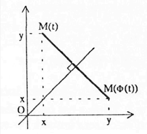
$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (-x, y) \implies$ symétrie par rapport à l'axe Oy



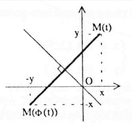
$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, -y) \implies$ symétrie par rapport à l'axe Ox



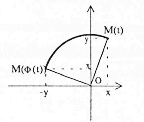
$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (y, x) \implies$ symétrie 1ère bissectrice



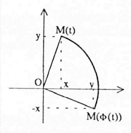
Réduction du domaine d'étude (courbe)



$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (-y, -x) \implies$ symétrie 2ième bissectrice



$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (-y, x) \implies$ rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centre O



$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (y, -x) \implies$ rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ de centre O

On peut imaginer d'autres transformations géométriques

Attention

- Avec une transformation donnée par exemple $\phi(t) = -t$ ($M(-t)$ à comparer avec $M(t)$) suivant l'exercice, les symétries de la courbe ne sont pas toujours les mêmes.

- Avec ϕ on est passé d'un intervalle I à un intervalle réduit I_0. Avec le tracé de la courbe pour I_0 les symétries permettent de déduire la courbe sur I et pas plus

- Dans les tracés t n'apparaît pas
C'est $x(t)$ et $y(t)$ qui se lit sur la courbe
Le paramètre t s'interprète comme le "temps"
    à l'instant t on se trouve au point $M(x(t), y(t))$
    Voir en mécanique la notion de **trajectoire d'un point**

Exemple

Etudier la courbe définie par

$$\begin{cases} x = 3\cos(t) + 2\cos(3t) \\ y = 3\sin(t) - 2\sin(3t) \end{cases}$$

- x et y sont périodiques : $T = 2\pi$

$\Longrightarrow$ I_0 de longueur 2π

- Nous considérons $\phi(t) = \pi + t$ alors $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (-x, -y)$ car

$$\begin{cases} x(\pi + t) = -x(t) \\ y(\pi + t) = -y(t) \end{cases}$$

ce qui correspond à une symétrie par rapport à l'origine O

$\Longrightarrow$ I_1 de longueur π

Exemple (suite)

$(x = 3\cos(t) + 2\cos(3t), y = 3\sin(t) - 2\sin(3t))$

- Pour $\phi(t) = -t$ on a $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, -y)$ car

$$\begin{cases} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$$

ce qui correspond à une symétrie par rapport àOx
$\Longrightarrow I_2 = [0, \frac{\pi}{2}]$ (Attention)

- Pour $\phi(t) = \frac{\pi}{2} - t$ alors $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (y, x)$

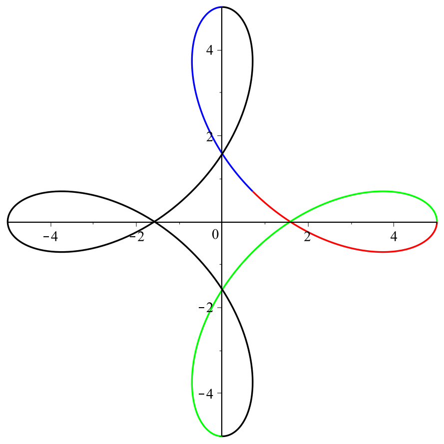
$$\begin{cases} x(\frac{\pi}{2} - t) = y(t) \\ y(\frac{\pi}{2} - t) = x(t) \end{cases}$$

qui correspond à une symétrie par rapport à la 1ère bissectrice
$\Longrightarrow I_3 = [0, \frac{\pi}{4}]$ (Attention)

Animation Maple

Exemple (tracé)

$I_3 = [0, \frac{\pi}{4}]$ (rouge) $I_2 = [0, \frac{\pi}{2}]$ (bleu) $I_1 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (vert) $I_0 = [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$ (noir)



Etude des variations de x et y

- On construit un tableau de variation (sur le domaine réduit)

t	
$x'(t)$	
$x(t)$	
$y'(t)$	
$y(t)$	
$\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$	$\longleftarrow$ pente de la courbe en "t"

Commentaires : Voir exemples en TD

- Si $y'(t_0) = 0$, $x'(t_0) \neq 0$ on a une tangente horiz. en $M(t_0)$
- Si $x'(t_0) = 0$, $y'(t_0) \neq 0$ on a une tangente verticale en $M(t_0)$
- Si $y'(t_0) = x'(t_0) = 0$ on dit que $M(t_0)$ est un point singulier

Evolution du tracé quand t augmente

t	
x	$\nearrow$
y	$\nearrow$

On se déplace vers la droite et vers le haut

t	
x	$\nearrow$
y	$\searrow$

On se déplace vers la droite et vers le bas

t	
x	$\searrow$
y	$\nearrow$

On se déplace vers la gauche et vers le haut

t	
x	$\searrow$
y	$\searrow$

On se déplace vers la gauche et vers le bas

Etude des branches infinies

Idée :
On étudie le comportement de la courbe lorsque x et y tendent vers l'infini quand t tend vers une valeur finie t_0 ou infinie

Asymptote oblique $y = ax + b$

- On doit avoir $\lim\limits_{t \longrightarrow t_0} x(t) = \lim\limits_{t \longrightarrow t_0} y(t) = \infty$
- On a $a = \lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$
- Enfin $b = \lim\limits_{t \longrightarrow t_0} y(t) - ax(t)$

Démonstration : A comprendre (idem étude pour les éq. cartésiennes)

Voir exemple TD

Remarque : L'emploi des D.L. permet de déterminer la position de la courbe par rapport à son asymptote

Etude locale (hors programme)

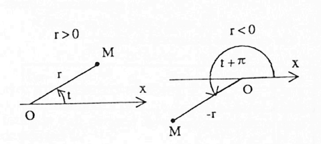
- Généralement les points singuliers jouent un rôle particulier
- Une étude locale au voisinage de ces points peut être réalisée
- Cette étude repose sur l'emploi des développements limités vu en 1ère année
- Ces points peuvent être classés selon quatre natures différentes suivant la position de la courbe par rapport à la tangente

Point d'inflexion	Point de rebroussement de 1ère espèce
Point ordinaire	Point de rebroussement de 2ième espèce

Table des matières

Définition

- On appelle rayon-vecteur d'angle θ:
  la demi-droite d'origine O faisant un angle θ avec l'axe Ox
- A tout couple (r, θ) de nombres réels, on associe le point du plan M de coordonnées $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$
- Si r est positif, M est situé sur le rayon-vecteur d'angle θ et à une distance r de l'origine
- Si r est négatif, M est situé sur le rayon-vecteur d'angle $\pi + \theta$ et à une distance $-r$ de l'origine



Définition (suite)

- On appelle coordonnées polaires de M un couple (r, θ) associé à M

- L'ensemble des points de coordonnées polaires $(f(\theta), \theta)$, pour $\theta \in I$ est (en général) une courbe (C) du plan. L'équation

$$r = f(\theta)$$

est appelée équation polaire de (C)

Commentaires :

- Dans tous les cas $OM = |r|$
- Un même point est défini par une infinité de couples possibles

Exemples

Exemple 1 :

- Donner l'équation polaire du cercle de centre O et de rayon R
- Donner l'équation polaire de la première bissectrice

Exemple 2 :

Trouver l'équation polaire du cercle de rayon R passant par l'origine O, de centre $\Omega = (a, b) = (R\cos(\theta_0), R\sin(\theta_0))$

Correction :

Le cercle est défini par $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 = a^2 + b^2$
Ce qui s'écrit encore $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$
On remplace x par $r\cos(\theta)$ et y par $r\sin(\theta)$ d'où
$r^2 - 2r(a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = 0$ d'où $r = 2(acos(\theta) + b\sin(\theta))$
Ce qui s'écrit encore $r = 2R\cos(\theta - \theta_0)$

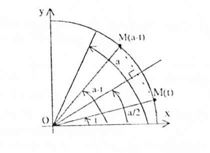
Domaine de définition - Réduction du domaine d'étude

Définition:
On appelle domaine de définition l'ensemble des valeurs de θ pour lequel $r(\theta)$ a un sens
Réduction du domaine d'étude en suivant une démarche semblable aux courbes paramétrées avec des transformations ϕ vérifiant

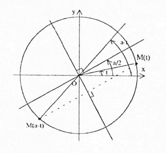
$$r(\phi(\theta)) = r(\theta) \text{ ou } r(\phi(\theta)) = -r(\theta)$$

Transformations générales

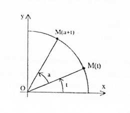
- Si $r(a-\theta) = r(\theta)$
$\Longrightarrow$ symétrie orthogonale par rapport à la droite polaire $\theta = \frac{a}{2}$



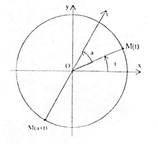
- Si $r(a-\theta) = -r(\theta)$
$\Longrightarrow$ symétrie orthogonale par rapport à la droite polaire $\theta = \frac{a+\pi}{2}$



- Si $r(a+\theta) = r(\theta)$
$\Longrightarrow$ rotation de centre O et d'angle a

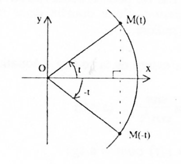


- Si $r(a+\theta) = -r(\theta)$
$\Longrightarrow$ rotation de centre O et d'angle $a+\pi$

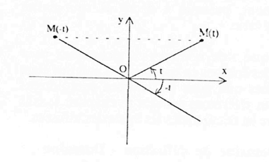


Transformations "classiques" ($a = 0$)

- Si $r(-\theta) = r(\theta)$
$\Longrightarrow$ symétrie orthogonale par rapport à l'axe des x

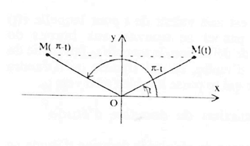


- Si $r(-\theta) = -r(\theta)$
$\Longrightarrow$ symétrie orthogonale par rapport à l'axe des y

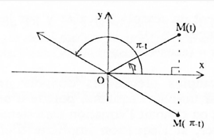


Transformations "classiques" $a = \pi$

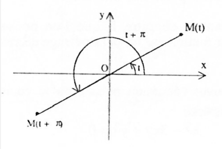
- Si $r(\pi - \theta) = r(\theta)$
$\Longrightarrow$ symétrie orthogonale par rapport à l'axe des y



- Si $r(\pi - \theta) = -r(\theta)$
$\Longrightarrow$ symétrie orthogonale par rapport à l'axe des x



- Si $r(\pi + \theta) = r(\theta)$
$\Longrightarrow$ symétrie par rapport à l'origine



Courbes avec r périodique

- Lorsque r est périodique de période T on étudie la courbe pour θ décrivant un intervalle de longueur T, par exemple $[0, T]$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ (ou autre)

- Puis on complète par autant de rotations qu'il faut pour retomber sur l'arc de courbe initial

- Parfois la courbe ne se referme pas (par exemple quand $\frac{\pi}{T}$ non rationnel) Dans ce cas on obtient une infinité de rotations

Etude des variations de r

- On construit un tableau de variation

θ	
$r'(\theta)$	
$r(\theta)$	
$\dfrac{r(\theta)}{r'(\theta)}$	$\longleftarrow$ pour construire la tangente en "θ"

Voir exemples en TD

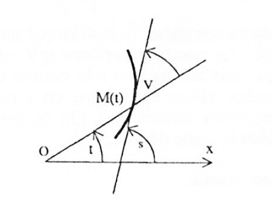
Commentaires :

- Le signe de $r'(\theta)$ n'apporte pas toujours d'informations
- Le signe de r est souvent plus intéressant

Tangente

- Soit s l'angle que fait la tangente à la courbe en M avec l'axe Ox
Et V l'angle entre (OM) et la tangente ($V = s - \theta$)
On peut alors montrer que

$$\tan(V) = \frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$$



- Si $r(\theta_0) \neq 0$ et $r'(\theta_0) = 0$ la tangente à la courbe est orthogonale au rayon-vecteur en $M(\theta_0)$
- Si $r(\theta_0) = 0$ la courbe est tangente au rayon-vecteur en $M(\theta_0)$

Branches infinies (Hors programme)

- Si $r(\theta)$ tend vers 0 lorsque θ tend vers l'infini, la courbe admet une branche spirale qui s'enroule autour de l'origine
- Si $r(\theta)$ tend vers une limite R lorsque θ tend vers l'infini, la courbe admet une branche spirale qui s'enroule autour du cercle de centre O et de rayon $|R|$
- Si $r(\theta)$ tend vers l'infini lorsque θ tend vers l'infini, la courbe admet une branche spirale qui se déroule

Asymptote :

Si $r(\theta)$ tend vers l'infini lorsque θ tend vers θ_0, la courbe admet une direction asymptotique d'angle θ_0

Si l'asymptote existe elle a pour équation polaire

$$r = \frac{a}{\sin(\theta - \theta_0)} \text{ où } a = \lim_{\theta \longrightarrow \theta_0} r(\theta)\sin(\theta - \theta_0)$$

Etude locale (Hors programme)

- Le tracé de la courbe fait naturellement apparaître les points singuliers
- Une étude locale au voisinage de ces points peut être réalisée
- Cette étude repose sur l'emploi des développements limités vu en 1ère année

Tracé de la courbe

- On commence par placer les points particuliers, les asymptotes
- On joint les différents éléments déjà placés en tenant compte du signe et des variations de r (grâce au tableau de variation)

Exemple :

- Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 1$ et $\frac{r}{r'} = 2$

Cela correspond dans les axes Ox, Oy à un point de coordonnées $(0, 1)$ et à une tangente de pente $-\frac{1}{2}$

- Si $\theta = \pi$, $r = 1$ et $\frac{r}{r'} = 2$

Cela correspond à un point de coordonnées $(-1, 0)$ et à une tangente de pente 2

- Si $\theta = \frac{\pi}{4}$, $r = 1$ et $\frac{r}{r'} = 1$

Cela correspond à un point de coordonnées $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ et à une tangente verticale

Exemple : Etudier $r = \cos(2\theta)$

- La période pour r est π : $r(\theta+\pi) = r(\theta)$
  $\Longrightarrow$ symétrie par rapport à O
- Si $r(\frac{\pi}{2}-\theta) = r(\theta) \Longrightarrow$ rotation par rapport à O d'angle $-\frac{\pi}{2}$
  $\Longrightarrow$ On réduit l'étude à $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$
  ($[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ n'est pas optimal)
- Si $r(-\theta) = r(\theta) \Longrightarrow$ symétrique par rapport à Ox
  $\Longrightarrow$ On réduit l'étude à $[0, \frac{\pi}{4}]$
- On a $r'(\theta) = -2\sin(2\theta)$ s'annule sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ en 0

θ	0		$\frac{\pi}{4}$
r'	0	$-$	-2
r	1	$\searrow$	0
$\frac{r}{r'}$	∞		0

- Tangente verticale pour $\theta = 0$ (point $(0,1)$)

Tangente égale à 1ère bissectrice pour $\theta = \frac{\pi}{4}$ (origine)

Animation Maple

Exemple

Tracé de $r = \cos(2\theta)$

$I_3 = [0, \frac{\pi}{4}]$ $I_2 = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ $I_1 = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ $I_0 = [\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$

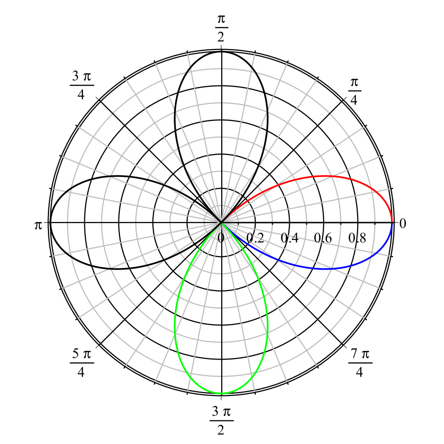


Table des matières

Longueur d'un arc

Courbes paramétrées

- La longueur d'un arc de courbe est obtenue à l'aide d'une intégrale curviligne
- Soit un arc de courbe Γ correspondant à une courbe paramétrée obtenue pour $t \in [t_0, t_1]$. Soit ds une longueur élémentaire ("longueur aussi petite que possible") alors la longueur L de Γ est donnée par

$$\boxed{L = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\mathrm{d}t}$$

Courbes polaires

- Par changt de variables $(x(t) = r(t)\cos(t), y(t) = r(t)\sin(t))$

$$\boxed{L = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r'(t)^2 + r(t)^2}\mathrm{d}t}$$

Vecteurs Normal et Tangent

On considère la courbe paramétrée par $(x = x(t), y = y(t))$

- Si $M(t)$ non singulier, on définit le vecteur tangent $\vec{T}(t)$

$$\boxed{\vec{T} = \frac{\vec{OM}'(t)}{\|\vec{OM}'(t)\|} = \frac{x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}}$$

- On définit le vecteur normal $\vec{N}(t)$ avec $(\vec{T}, \vec{N})$ base directe

$$\boxed{\vec{N} = \frac{-y'(t)\vec{i} + x'(t)\vec{j}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}}$$

Centre de courbure d'une courbe paramètre

- Soient deux points de la courbe $M(t)$ et $M(s)$

On cherche l'intersection $C(t,s)$ des normales à la courbe en ces points

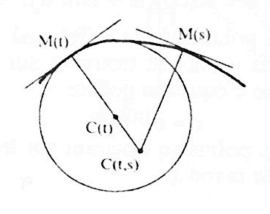
- Pour répondre à cette question on est amené à résoudre un système qui nous donne les expressions des coordonnées de C notés X et Y
- Si on fait tendre s vers t alors $\frac{x(s)-x(t)}{s-t}$ tend vers $x'(t)\cdots$

alors X tend vers

$$X_C = x(t) - y'(t)\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}$$

et Y tend vers

$$Y_C = y(t) + x'(t)\frac{x'(t)^2 + y'(t)^2}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}$$



- Le point de coordonnées (X_C, Y_C) est appelé

Centre de courbure de la courbe en $M(t)$

Courbure

- **Le rayon de courbure** $R(t)$ est le nombre

$$\boxed{R(t) = \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)} = \frac{\|\vec{OM}'(t)\|^3}{\det(\vec{OM}'(t), \vec{OM}''(t))}}$$

- **La courbure** est donnée par

$$\boxed{\frac{1}{R(t)}}$$

- On a la relation suivante $\vec{OC}(t) = \vec{OM}(t) + R(t)\vec{N}(t)$
- En coordonnées polaires la courbure est donnée par

$$\frac{1}{R} = \frac{(\frac{1}{r}) + (\frac{1}{r})''}{(1 + (\frac{r'}{r})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Cercle osculateur

- Pour une courbe quelconque, le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $|R(t)|$ s'appelle le cercle osculateur en $M(t)$
C'est le cercle qui approche "au mieux" la courbe au pt $M(t)$

- On peut montrer que le cercle passant par 3 points $M(t_1)$, $M(t_2)$, $M(t_3)$ tend vers le cercle osculateur en $M(t)$ lorsque t_1, t_2, t_3 tendent vers t

- La courbe (C') décrite par le centre de courbure est appelée développée de (C).
Inversement on dit que (C) est une développante de (C')

Exemple $(x(t) = 3t - t^3, \quad y(t) = 3t^2)$

Trouver le vecteur tangent, le vecteur normal, le rayon de courbe en $M(t)$ et la développée de la courbe paramétrée par $(x(t) = 3t - t^3, \quad y(t) = 3t^2)$

- $\vec{T}(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\vec{i} + \dfrac{2t}{1+t^2}\vec{j}$
- $\vec{N}(t) = \dfrac{-2t}{1+t^2}\vec{i} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}\vec{j}$
- $R(t) = \dfrac{3}{2}(1+t^2)^2$
- La développée est la courbe paramétrée par

$$x = -4t^3, \quad y = \frac{3}{2}(1 + 2t^2 - T^4)$$