M3301 – Fonctions de plusieurs variables Intégrales multiples - Applications

Michel Fournié

michel.fournie@iut-tlse3.fr

Les cours de maths en amphi

Qui :	Michel Fournié
Quand :	Vendredi et Lundi matins (8 cours)
Où :	Salle 206 et 033 $\approx$ 4 groupes ($\approx$ 100 étudiants)
Comment :	? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ? ?

Pendant du cours

Règles évidentes :

- Assiduité (cours obligatoires)
- Arriver à l'heure, s'installer rapidement
- Prendre tout le cours sur le chapitre
- Respecter les autres :
  - Propreté de l'amphi
  - Bruit

TOULOUSE

COMPORTEMENT ET DISCIPLINE DANS LES AMPHIS

21/09/11

CODE DE CIVILITE ET DE BONNE CONDUITE

➔ l'horaire du début du cours est indiqué dans l'emploi du temps, **ce n'est pas** l'heure d'entrée en amphi

➔ dans vos sacs, cartables ou sacoches

- **ETEINDRE** et y **RANGER** mobiles, smartphones, notebooks, portables, baladeurs etc
- y **GARDER** nourriture, boissons, journaux gratuits, revues, tracts, prospectus, etc

➔ sur les tables et les sièges, au sol:

- **NE PAS ACCROITRE** les détériorations, les graffitis, etc.. existants
- **RAMASSER** les papiers

● **sanctions pour les perturbateurs** :

exclusion immédiate de l'amphi **+ note 0** au contrôle continu TD de la discipline

tolérance "0"

signé : les enseignants assurant des cours dans les amphithéâtres

Il faut être actif :

- se poser des questions

  d'où sort ce résultat?

  où ai-je déjà vu ça ?

  a quoi ça sert ?$\cdots$
- chercher un exemple (contre exemple)
- ne pas hésiter à "interrompre" le professeur
- ne pas sortir avec des questions sans réponses

Après le cours

Il faut s'approprier le cours :

- relire le cours le plus souvent possible
  (idéal: le jour même, le lendemain, $\cdots$)
- arriver en ayant en tête les cours (TD) passés
- travailler le cours en se posant des questions
- faire le lien entre le cours et les exercices vus en TD
- formuler et noter des questions
- présenter ses problèmes aux autres, au professeur
- faire un résumé ? lire des livres ? $\cdots$

Ce module joue un rôle important dans les **poursuites d'études.**

Plan du cours

Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Quelques définitions

Une fonction de 2 variables est une application de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. A tout couple de nombres réels $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on associe un nombre réel $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

Notation $\boxed{f : (x, y) \longrightarrow f(x, y)}$

Exemples :

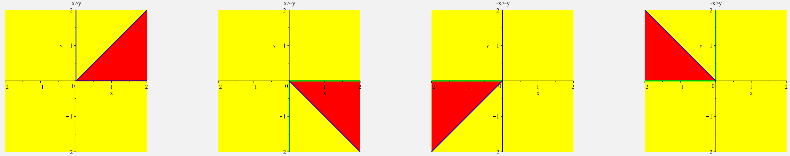
- $f(x, y) = ax + by$ fonction linéaire
- $f(x, y) = ax + by + c$ fonction affine
- $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ fonction quadratique
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \cdots$

Domaine de définition

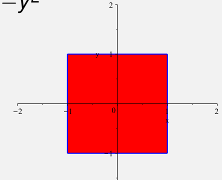
Définition
f est définie sur D ($\subset \mathbb{R}^2$) si $f(x,y)$ existe pour tout $(x,y) \in D$,
D est appelé domaine de définition de f

Exemples :

- $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ est définie pour x et y tels que $|x| > |y|$



- $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$ est définie pour $|x| < 1, |y| < 1$



Exemples de domaine de définition

- $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ est définie dans tout le plan sauf en 0

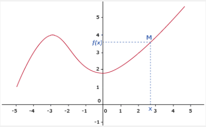
- $f(x,y) = \frac{1}{x+y-1}$ est définie dans tout le plan sauf aux points de la droite $\Delta : x+y-1=0$ (droite d'équation $y = -x+1$)

- $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x+y-1}}$ est définie dans tout le demi-plan situé au dessus de la droite Δ, droite exclus.

- $f(x,y) = \sqrt{x+y-1}$ est définie dans tout le demi-plan situé au dessus de la droite Δ, droite inclus.

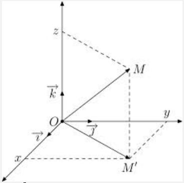
Représentation d'une fonction à 2 variables

- Rappel (2D) Pour une fonction f à 1 variable, on associe l'ensemble des couples $(x, f(x))$ appelé graphe C_f de f



- (3D) Pour une fonction à 2 variables, on associe l'ensemble des triplets $(x, y, f(x, y))$. L'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ correspondants est la surface représentative S_f de f

$$\boxed{S_f = \{M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } z = f(x, y)\}}$$



- L'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\boxed{f(x, y) = K \text{ est appelé ligne de niveau(courbe)}}$$

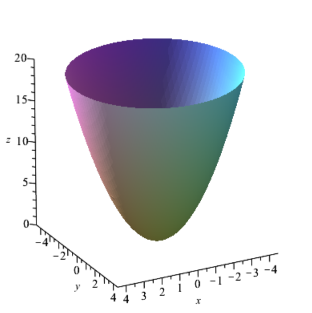
Une ligne de niveau correspond à la projection sur le plan (xOy) de la $\underbrace{\text{section}}_{\text{intersection}}$ de la surface S_f par le plan de cote K.

- S_f peut être représentée par un ensemble de lignes de niveaux. C'est le principe des abaques cartésiennes

Exemples de représentations

- $f(x,y) = x^2 + y^2$. On fait des sections par des plans :

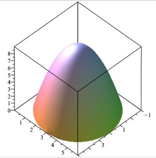
– coupe par le plan $x=0 \Longrightarrow z = y^2$ parabole (O min.),
– coupe par le plan $y=0 \Longrightarrow z = x^2$ parabole (O min.),
– coupe par le plan $x=x_0 \Longrightarrow z = y^2 + Cte$ parabole,
– coupe par le plan $y=y_0 \Longrightarrow z = x^2 + Cte$ parabole.

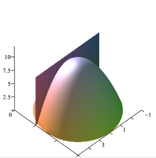


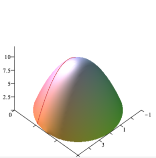
Exemples de représentations

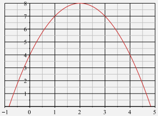
- $f(x, y) = 9 - (x - 2)^2 - (y - 3)^2$.

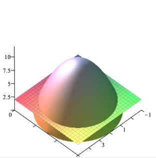
On fait des sections par des plans $\cdots$

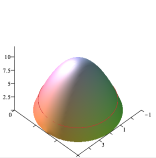


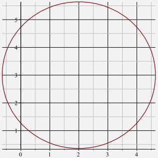






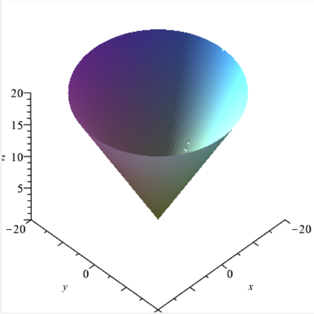






Exemples de représentations

- $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ cône



- $f(x,y) = ax + by$ un plan passant par l'origine,
- $f(x,y) = ax + by + c$ un plan,
- $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ paraboloïde,

Equation de plan

Important : Attention piège

La surface associée à l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que

$$ax + by + cz + d = 0$$

(a, b, c, d étant des constantes)

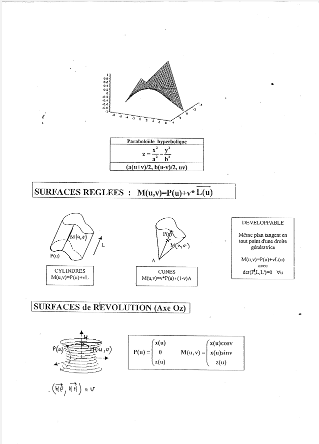
dans l'espace c'est un plan

Exemple :

Dans l'espace $y = 2x + 1$ est l'équation d'un plan.
La même équation dans le plan est une droite !!!!!!!!

Fiche récapitulative

Une fiche récapitulative est disponible au téléchargement. Cette fiche parle aussi de surfaces paramétrées qui ne sont pas au programme.



Paraboloïde hyperbolique

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

(a(u+v)/2, b(u-v)/2, uv)

SURFACES REGLEES : $M(u,v)=P(u)+v*\overrightarrow{L(u)}$

CYLINDRES
M(u,v)=P(u)+vL

CONES
M(u,v)=v*P(u)+(1-v)A

DEVELOPPABLE

Même plan tangent en tout point d'une droite génératrice

M(u,v)=P(u)+vL(u)
avec
det(P',L,L')=0 ∀u

SURFACES de REVOLUTION (Axe Oz)

$$P(u) = \begin{pmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix} \qquad M(u,v) = \begin{pmatrix} x(u)\cos v \\ x(u)\sin v \\ z(u) \end{pmatrix}$$

$(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HM}) = v$

Limite et continuité

Définition "non rigoureuse"

- $\lim_{M \longrightarrow M_0} f(M) = L$

Si M "se rapproche" de M_0 (leur "distance diminue") alors $f(M)$ se rapproche de L.
La notion de distance $d(M, M_0)$ est très générale.
Pour fixer les idées on peut considérer la distance Euclidienne $d(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

- f est continue en M_0 si $\lim_{M \longrightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$

Remarque :

$f(x, y) = x$ et $g(x, y) = y$ sont continues en tout point $M_0(x_0, y_0)$.

Pour aller plus loin - Théorie

Continuité, Applications partielles

Théorème

Si f et g sont continues au point M_0 alors

$$f+g,\ af\ (a \in \mathbb{R}),\ fg \text{ et } \frac{f}{g} \text{ si } g(M_0) \neq 0 \text{ sont continues}$$

Définition

Soit $M_0 = (x_0, y_0)$ un point donné.
Les applications $\hat{f}_1 : x \longrightarrow f(x, y_0)$ et $\hat{f}_2 : y \longrightarrow f(x_0, y)$ sont appelées applications partielles au point $M_0 = (x_0, y_0)$

Théorème

Si f est une fonction continue en $M_0 = (x_0, y_0)$ alors $\hat{f}_1(x)$ est continue en x_0 et $\hat{f}_2(y)$ est continue en y_0

Fct de fct - Fonction composée

Définition

Soit u une fonction de deux variables x et y on note : $u(x, y)$
et f une fonction de la variable u on note : $f(u)$.
On définit F la fonction de fonction des deux variables x et y
par $F : (x, y) \longrightarrow u(x, y) \longrightarrow f(u(x, y))$ on note :

$$\boxed{F(x, y) = f(u(x, y))}$$

Théorème

Si u est continue au point $M_0(x_0, y_0)$
et f continue au point $u_0 = u(x_0, y_0)$
alors $F(x, y) = f[u(x, y)]$ est continue au point M_0

Fonction composée

Définition

Soit $f(u, v)$ une fonction de deux variables u et v, soit $u = g(x)$ et $v = h(x)$ deux fonctions de la seule variable x. On définit F fonction composée de x par
$F : x \longrightarrow (g(x), h(x)) \longrightarrow f\left(g(x), hx)\right)$ on note :

$$\boxed{F(x) = f(u, v) = f\left(g(x), h(x)\right)}$$

Théorème

Si $u(x)$ et $v(x)$ sont continues au point x_0 et
si $f(u, v)$ est continues au point $(u_0 = u(x_0), v_0 = v(x_0))$
alors $F(x) = f(u(x), v(x))$ est continue au point x_0.

Quelques remarques

Changement de variables

Soient $u(x, y)$ et $v(x, y)$ deux fonctions de 2 variables x et y, et $f(u, v)$ une fonction de 2 variables u et v ($u(x, y)$ et $v(x, y)$), on a donc $(x, y) \longrightarrow (u(x, y), v(x, y)) \longrightarrow f(u(x, y), v(x, y))$ on note :

$$\boxed{F(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))}$$

On parle de changement de variables dans f défini par

$$\boxed{u = u(x, y) \quad \text{et} \quad v = v(x, y)}$$

Théorème

Si u et v sont continues au point (x_0, y_0)
et si f est continue au point $(u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0))$
alors F est continue au point (x_0, y_0)

Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

- Toutes les notions développées dans la section précédente peuvent s'étendre
- Non développé dans ce cours.
- Exemple :
  En un point de l'espace on cherche une fonction qui donne une vitesse, une température et une pression ?

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^5 \\ & (x, y, z) & \longrightarrow & (V, T, P) \end{array}$$

Plan du cours

Dérivées Partielles

Définition - Théorème

- Soit $f(x,y)$, on peut définir 2 dérivées au point $M_0(x_0,y_0)$, ce sont les dérivées des applications partielles $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ au point M_0 (on fixe une composante $\longrightarrow$ fonction d'une variable) :

$$F(x) = \hat{f}_1 = f(x,y_0) \;\text{ et }\; G(y) = \hat{f}_2(y) = f(x_0,y)$$

- On appelle dérivée partielle de f par rapport à la variable x au point $M_0(x_0,y_0)$ la dérivée $F'(x_0)$ si elle existe.

$$\boxed{F'(x_0) = f'_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}$$

- De même la dérivée partielle de f par rapport à la variable y au point $M_0(x_0,y_0)$.

$$\boxed{G'(y_0) = f'_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

Dérivées partielles (suite)

- Si les dérivées partielles existent en d'autres points que M_0, elles définissent à leur tour deux nouvelles fonctions de deux variables appelées les fonctions dérivées partielles :

$$(x, y) \longrightarrow f'_x(x, y) \text{ et } (x, y) \longrightarrow f'_y(x, y)$$

- Ces fonctions peuvent elles aussi admettrent des dérivées partielles par rapport à x et y.

- Nous les appellerons dérivées partielles secondes de $f(x, y)$ et nous les noterons :

$$f''_{x^2}(x, y),\ f''_{xy}(x, y),\ f''_{yx}(x, y), f''_{y^2}(x, y)$$

Dérivées partielles (exemple)

Remarque : De la même façon, on définit des dérivées partielles d'ordre quelconque

Exemples : Soit $f(x,y) = 5x^2 - 3xy + y^2$ alors

$f'_x(x,y) = 10x - 3y$ et $f'_y(x,y) = -3x + 2y$

$f''_{x^2}(x,y) = 10$

$f''_{xy}(x,y) = -3$

$f''_{yx}(x,y) = -3$

$f''_{y^2}(x,y) = 2$

On vérifie bien que : $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$

Notation de Monge $\boxed{p = f'_x, q = f'_y, r = f''_{xx}, s = f''_{xy}, t = f''_{yy}}$

On appelle **matrice Hessien de** f (dérivées secondes)

$$\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Dérivées partielles et continuité

Théorème

Si dans le voisinage de M_0, la fonction f admet des dérivées partielles premières continues et
si les dérivées partielles secondes f''_{yx} et f''_{xy} existent et sont continues
alors $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

Démonstration

Admise

Dérivée d'une fonction composée

Théorème

On suppose que les fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables en x_0 et que la fonction $f(u, v)$ admet des dérivées partielles continues au point M_0
alors la dérivée de la fonction composée $F(x) = f(u(x), v(x))$ au point x_0 est égale à

$$\boxed{F'(x_0) = f'_u(u_0, v_0)u'(x_0) + f'_v(u_0, v_0)v'(x_0)}$$

Démonstration

Dérivées partielles d'une fonction composée

Dérivées partielles d'une fonction composée

- Soit $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ obtenue par changement de variables $u(x,y)$ et $v(x,y)$
- Si au point x_0, les fcts $x \longrightarrow u(x,y_0),\ x \longrightarrow v(x,y_0)$ sont dérivables
- Si au voisinage de $M_0(u_0,v_0)$, $f(u,v)$ a des dérivées partielles continues en M_0, $(u_0 = u(x_0,y_0), v_0 = v(x_0,y_0))$

- D'après le théorème (dérivée de fonction composée)

$$\boxed{F'_x(x_0,y_0) = f'_u(u_0,v_0)u'_x(x_0,y_0) + f'_v(u_0,v_0)v'_x(x_0,y_0)}$$

- De même sous des conditions analogues

$$\boxed{F'_y(x_0,y_0) = f'_u(u_0,v_0)u'_y(x_0,y_0) + f'_v(u_0,v_0)v'_y(x_0,y_0)}$$

Plan tangent en un point d'une surface

Dérivée suivant une direction

Définition - Théorème

Soit la surface S d'équation $z = f(x, y)$ et $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ un point de S. Les tangentes en M_0 aux courbes de la surface S passant par M_0 appartiennent au plan tangent à S en M_0.
Ce plan est défini par le point M_0 et les deux vecteurs

$$\vec{u} = (1, 0, f'_x(x_0, y_0)) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (0, 1, f'_y(x_0, y_0))$$

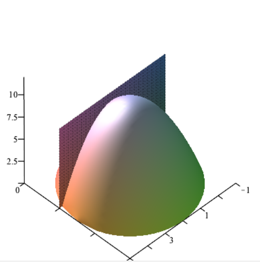
Maple: planTgt.mws

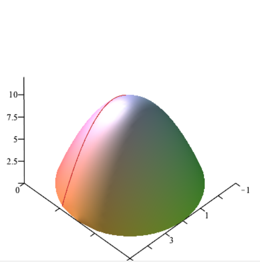
Le plan tangent a pour équation cartésienne

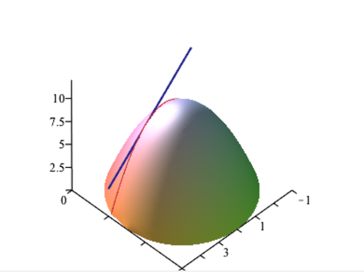
$$\boxed{z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

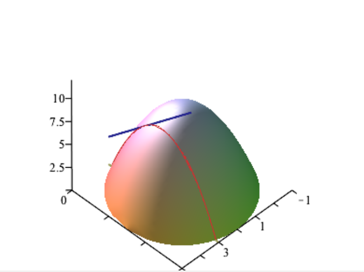
Autre Démonstration

Interprétation graphique

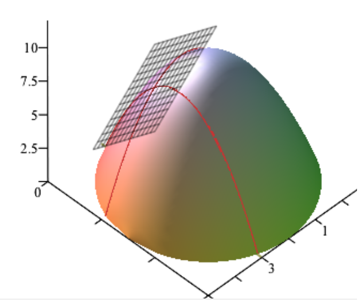


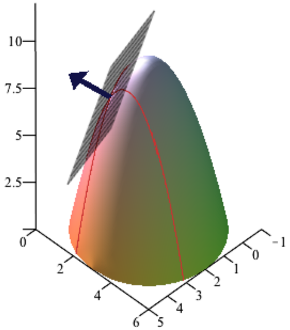






Interprétation graphique





Plan tangent - Commentaires

Ce qu'il faut retenir

- la nature de $\vec{u}$ et $\vec{v}$
  $\vec{u}$ tangent à la coupe $y = y_0$
  $\vec{v}$ tangent à la coupe $x = x_0$
- la notion de vecteur normal au plan :
  $\overrightarrow{N} = \vec{u} \wedge \vec{v}$
- la construction de l'équation du plan :
  $\overrightarrow{M_0M}.\overrightarrow{N} = 0$

Plan du cours

Développements Limités

- Soient $M(x,y)$ et $M_0(x_0,y_0)$ avec $x=x_0+h$, $y=y_0+k$
- Soit le segment $[M_0M]$ et un point $P\in[M_0M]$

Formule des accroissements finis

Théorème

Si $f(u,v)$ possède des dérivées partielles continues dans un voisinage de M_0 ($x\in]x_0-h,x_0+h[$ et $y\in]y_0-k,y_0+k[$) alors

$$\boxed{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)=hf'_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf'_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k) \quad \text{où } 0<\theta<1}$$

Démonstration

Développement Limité d'ordre 1

Ecriture avec un reste (revoir les cours sur les D.L. d'un fonction à une variable).

Théorème

Si $f(x,y)$ admet des dérivées partielles continues dans un carré ouvert contenant M_0M alors

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x_0+h,y_0+k) = \\ \qquad f(x_0,y_0)+hf'_x(x_0,y_0)+kf'_y(x_0,y_0)+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k), \\ \qquad \text{où } \varepsilon(h,k) \text{ tend vers 0 quand } (h,k) \text{ tend vers } (0,0) \end{array}}$$

Démonstration

Formule de Taylor

Théorème

Si $f(x, y)$ admet des dérivées partielles secondes continues dans un carré ouvert contenant M_0 alors

$$\boxed{\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) \\ &+\frac{1}{2}\left(h^2 f''_{x^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+2hkf''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)+k^2 f''_{y^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right) \\ &\text{où } 0 < \theta < 1 \end{aligned}}$$

Démonstration

Développement limité d'ordre 2

Théorème

Si les dérivées partielles secondes de $f(x, y)$ sont continues au voisinage de (x_0, y_0) alors

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + \frac{1}{2}\left(h^2 f''_{x_0^2} + 2hkf''_{x_0y_0} + k^2 f''_{y_0^2}\right) + \rho^2\varepsilon(h, k)$$

où $\rho = \sqrt{h^2+k^2}$ (distance M_0M) et $\lim\limits_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$

Démonstration

Notation de Monge

Avec la notation de Monge (voir matrice Hessien $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$),

$$\text{où } p = f'_{x_0},\ q = f'_{y_0},\ r = f''_{x_0^2},\ s = f''_{x_0 y_0},\ t = f''_{y_0^2}$$

le D.L. d'ordre 2 peut s'écrire sous la forme

$$\boxed{\boxed{f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + hp + kq + \frac{1}{2}\left(h^2 r + 2hks + k^2 t\right) + \rho^2 \varepsilon(h, k)}}$$

Application au calcul numérique

(a) Calcul de $\boldsymbol{f(x,y)}$ connaissant $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ par des valeurs approchées $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$

- La formule A.F. $\Longrightarrow$ majoration de l'erreur quand on remplace $f(x,y)$ par $f(a,b)$. Si on note $h = x - a$ et $k = y - b$ alors $f(x,y) - f(a,b) = hf'_x(a+\theta h, b+\theta k) + kf'_y(a+\theta h, b+\theta k), \ \ 0 < \theta < 1$
- En connaissant des bornes d'erreur de h et k : $|h| < \alpha$ et $|k| < \beta$ ($\Longleftrightarrow |x-a| < \alpha, \ \ |y-b| < \beta$)
et en supposant que sur ce domaine les dérivées partielles sont bornées $|f'_x| < M$ et $|f'_y| < N$
- Nous obtenons
$|f(x,y) - f(a,b)| \leq |h||f'_x| + |k||f'_y| < \alpha M + \beta N.$

Exemple

Calculer $f(x,y) = \dfrac{2xy^2 - 1}{y}$ connaissant les valeurs approchées de x et y à 10^{-2} près,

par exemple $a = 2.31$ et $b = 1.52$ ($|x - 2.31| < 10^{-2}$ et $|y - 1.52| < 10^{-2}$)

On a $f(a,b) = 2ab - \frac{1}{b} = 2 \times 2.31 \times 1.53 - \frac{1}{1.52} \approx 6.36$

Or $|f'_x| = |2y|$, $|f'_y| = \left|2x + \frac{1}{y^2}\right|$

Par hypothèse : $1.51 < y < 1.53$ d'où $|f'_x| < 4$.

De même on a $|f'_y| < 6 \Longrightarrow$

$|f(x,y) - f(a,b)| < 10 \times 10^{-2} = \frac{1}{10} \Longrightarrow \boxed{6.26 < f(x,y) < 6.46}$

Autre applications

(b)- Calcul de $f(x_0+h, y_0+k)$ connaissant x_0, y_0, h, k en prenant pour valeur approchée
$f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

D'après la formule de Taylor, l'erreur commise est bornée par :

$$\frac{1}{2}\left|h^2 f''_{x^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + 2hkf''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) + k^2 f''_{y^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)\right|$$

Ainsi lorsque A, B, C désignent des bornes des dérivées secondes dans le rectangle
$|x-x_0|<h$, $|y-y_0|<k$, l'erreur est bornée par

$$\frac{1}{2}\left(Ah^2 + 2B|h||k| + Ck^2\right)$$

Exemple

Calculer $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$ pour $x = 0.01$ radian et $y = 0.02$ radian avec $x_0 = y_0 = 0, h = 0.01, k = 0.02$

On a $f(x_0, y_0) = 0$
$f'_x = \cos(x)\cos(y), f'_y = -\sin(x)\sin(y)$
$f''_{x^2} = -\sin(x)\cos(y), f''_{xy} = -\cos(x)\sin(y)$,
$f''_{y^2} = -\sin(x)\cos(y)$. On vérifie que $hf'_{x_0} + kf'_{y_0} = 0.01$.
D'où la valeur approchée de $f(x,y)$ est 0.01.
Sachant que les dérivées 2nd sont bornées par 1
$\Longrightarrow$ l'erreur est bornée par $\frac{1}{2}(h^2 + 2|h||k| + k^2)$.
On a donc $\varepsilon = \frac{1}{2}(h+k)^2 = \frac{9}{2}.10^{-4} \Longrightarrow$
$f(x,y) = 0.01$ à 10^{-3} près

Autre application

Plan du cours

Extremums relatifs

Définitions : • $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ admet en (x_0, y_0) un extremum (maximum ou minimum) local **si et seulement si** il existe un voisinage V de ce point $((x_0+h, y_0+k) \in V)$ où

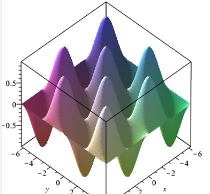
$$f(x_0+h, y_0+k) \leq f(x_0, y_0) \quad \text{Maximum}$$
$$f(x_0+h, y_0+k) \geq f(x_0, y_0) \quad \text{Minimum}$$

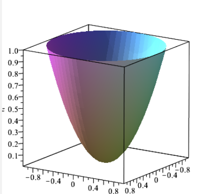
En pratique: On regarde si $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ garde un signe constant pour tous h et k.

- On parle d'extremum strict si de plus

$f(x_0+h, y_0+k) \neq f(x_0, y_0)$ pour tous $(h, k) \neq (0, 0)$

- On parle d'extremum global quand il n'est plus question de voisinage





Conditions Nécessaires d'extremum

Théorème : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1
(C^1 signifie : f continue et ses dérivées partielles premières continues).
Pour que f admette un extremum local en (x_0, y_0)
il est nécessaire mais non suffisant que

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0}$$

Définition : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On dit que (x_0, y_0) est un point critique ou point stationnaire de f lorsque

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Conditions Suffisantes d'extremum

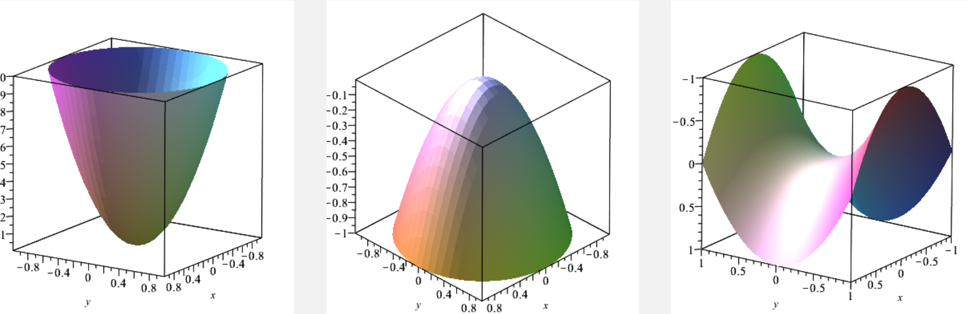
Théorème :
Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et (x_0, y_0) un point critique de f.
En utilisant la notation de Monge :

- Si $s^2 - rt < 0, \ r > 0$ alors f présente un minimum en (x_0, y_0)
- Si $s^2 - rt < 0, \ r < 0$ alors f présente un maximum en (x_0, y_0)
- Si $s^2 - rt > 0$ alors (x_0, y_0) est un point col (ni min. ni max.)

pour f

Démonstration: Application de la formule de Taylor

Nature des extrémas



Regarder la nature des points $(0, 0, 0)$

$z = x^2 + y^2$ Minumum

$z = -x^2 - y^2$ Maximum

$z = x^2 - y^2$ Point Col

Exemple

Préciser quand ils existent, la nature des extrémums de
$f(x,y) = x + xy + y - 3x - 6y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 6$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$

- Condition Nécessaire :

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$$

d'où si f admet un extremum c'est le point $(0,3)$

- Condition Suffisante :

$r = 2, s = 1, t = 2$ d'où $s^2 - rt = -3 < 0$ et $r = 2 > 0$

- Conclusion $(0,3)$ est un minimum local

Plan du cours

Différentielles

Introduction et définition

- Si f'_x et f'_y sont continues $f(x_0, y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0}$ est une valeur approchée $f(x_0 + h, y_0 + k)$,
- Avec la formule de Taylor, on a une borne d'erreur
- Ainsi une valeur approchée de l'accroissement Δf est donnée par

$$\boxed{\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) \approx \underbrace{hf'_x(x_0, y_0)' + kf'_y(x_0, y_0) = \mathrm{d}f(x_0, y_0)}_{\text{différentielle}}}$$

Différentielles (suite)

Définition La fonction : $(h,k) \longrightarrow hf'_{x_0} + kf'_{y_0}$ définit une application <u>linéaire</u> notée df de $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ appelée <u>différentielle</u> de la fonction f au point (x_0, y_0).

Notation : Par abus de langage, nous confondrons souvent la différentielle et sa valeur que nous noterons encore df.

Si f est la fonction définie par $f(x,y) = x$:
on a $f'_x = 1$ et $f'_y = 0$ d'où $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x = h$.
Si f est la fonction définie par $f(x,y) = y$:
on a $f'_x = 0$ et $f'_y = 1$ d'où $\mathrm{d}f = \mathrm{d}y = k$.
Pour une fct f quelconque, nous écrirons donc :

$$\boxed{\mathrm{d}f = f'_{x_0}\mathrm{d}x + f'_{y_0}\mathrm{d}y}$$

Différentielles (suite)

6.2- Propriétés

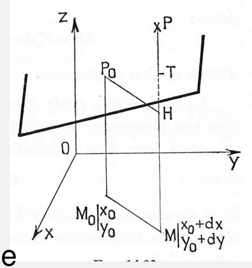
- L'application $f \longrightarrow df$ est linéaire :
- Si $f = f_1 + f_2$, $df = df_1 + df_2$
- Si $g = \lambda f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), $dg = \lambda df$.
- Si $f = uv$ alors $df = udv + vdu$.
- Si $f = \dfrac{u}{v}$ alors $df = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$.
- Invariance par changement de variable :
  - 1 variable : $x = \varphi(t)$ et $F(t) = f(\varphi(t))$
  - 2 variables : $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ et $F(u,v) = f(x,y)$

Dans les deux cas $\Longrightarrow df = dF$

Interprétation graphique

On considère deux points P_0 et P de la surface S_f d'équation $z = f(x, y)$

- $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et $P(x_0 + dx, y_0 + dy, z)$
- $H(x, y, z_0)$



On peut démontrer que

$$df = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy = \overline{HT}$$

- T étant le point d'intersection de la droite (MP) et du plan tangent en P_0 à S_f

Différentielles (suite)

- L'accroissement de la fonction a pour valeur :

$$\Delta f = f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) = \overline{HP}$$

ce qui permet d'écrire avec un DL d'ordre 1 :

$$\Delta f = \mathrm{d}f + \rho\varepsilon(dx, dy)$$

où $\rho = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ et $\varepsilon(dx, dy)$ est une fonction qui tend vers 0 quand dx et dy tendent vers 0.

- dx est appelé accroissement de la variable x et dy accroissement de la variable y

Formes différentielles

Soit la fonction $f(x,y)$ et le point (x_0,y_0)

- La différentielle de f dite **totale** en ce point s'écrit :

$$df_{(x_0,y_0)}(dx,dy) = f'_{x_0}dx + f'_{y_0}dy$$

- Si le point (x_0,y_0) est un point variable (x,y), cette fonction linéaire varie et s'écrit avec $P(x,y)$=$f'_x(x,y)$ et $Q(x,y)$=$f'_y(x,y)$

$$df = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

- Si f possède des dérivées partielles continues: $f''_{xy} = f''_{yx}$

$$\Longrightarrow \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$$

- Si $A(x,y)$ et $B(x,y)$ sont des fonctions quelconques on aboutit à la notion de **forme différentielle**

Formes différentielles

- Une forme différentielle w est dite exacte s'il existe une fonction de plusieurs variables f telle que

$$w = df$$

- Une condition <u>nécessaire et suffisante</u> pour que la forme différentielle $w = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ soit exacte est que les fonctions P et Q possèdent des dérivées partielles continues telles que

$$P'_y(x,y) = Q'_x(x,y)$$

- Nous n'approfondira pas la notion de différentielle. Mais il faut savoir qu'elle est largement utilisée en physique comme par exemple dans le calcul d'intégrales curvilignes (intégration le long d'une courbe). (voir le programme de S4)

Plan du cours

Compléments

La suite est un complément de cours (hors programme).

Compléments - Limite et continuité

Définition (théorique)

- Soit f définie dans un voisinage de M_0 (qui peut être vu comme un carré ouvert de centre M_0).

On dit que $f(x,y) = f(M)$ tend vers L quand $M = (x,y)$ tend vers $M_0 = (x_0, y_0)$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tq

$$\underbrace{0 < |x - x_0| < \alpha, \; 0 < |y - y_0| < \alpha} \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

Notation : $\lim\limits_{M \longrightarrow M_0} f(M) = L.$

- Si L existe alors $L = f(M_0)$. On dit que la fonction f est continue en M_0 si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\underbrace{0 < |x - x_0| < \alpha, \; 0 < |y - y_0| < \alpha} \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Retour au cours

Exemples de limites

(a)- $f(x,y) = 1 - x - 2y$ et $M_0 = (0,0)$.
On a $|f(M) - f(M_0)| = |1 - x - 2y - 1| \leq |x| + 2|y|$.
Or $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = d(M, M_0)$ et $|y| \leq d(M, M_0)$
d'où $|f(M) - f(M_0)| \leq 3d(M, M_0) \longrightarrow 0$ quand $M \longrightarrow M_0$.
(b)- $f(x,y) = 3x - y + 1$ tend vers 2 quand $M(x,y)$ tend vers $M_0(1,2)$.
(c)- $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ tend vers 0 quand $M(x,y)$ tend vers 0 avec $M \neq 0$ (la fonction f n'étant pas définie en ce point).

Retour au cours

Remarques sur les limites

1 - Dans la déf. de la limite les conditions indiquées par les accolades peuvent être remplacées par
$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta$ tel que $M_0M < \beta \Longrightarrow |f(x,y) - L| \leq \varepsilon$.
En effet la 1ère condition entraîne la 2nd en considèrant $\beta = \alpha$ car le carré de coté 2α est inclus dans le cercle de rayon α.
Réciproquement, il suffit de prendre $\alpha = \frac{\beta}{2}$.
2 - Cette nouvelle déf. utilise la longueur M_0M qui correspond à la norme euclidienne $(d(M_0, M))$ entre les pts M_0 et M. Il existe bien d'autres “normes”,$\cdots$ (toutes les normes sont “équivalentes” en dim finie) $\cdots$
3 - Pour montrer la continuité de f au point M_0, on vérifiera (simplement) que $\lim\limits_{d(M,M_0)\longrightarrow 0} |f(M) - f(M_0)| = 0$. Retour au cours

Complèment - Normes

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (...). On appèle norme sur $\mathbb{R}$, toute application notée $\|.\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$ $(X \longrightarrow \|X\|)$ telle que $\forall X,\ Y \in E$ on ait :

$$
\begin{array}{l}
(1)\ \|X\| = 0 \Longrightarrow X = 0_E, \\
(2)\ \|\lambda X\| = |\lambda|\|X\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\
(3)\ \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y|, \quad \text{(inégalité triangulaire).}
\end{array}
$$

Exemples :

(a)- $(x, y) \longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2}$
(b)- $(x, y) \longrightarrow \max\{|x|, |y|\}$
(c)- $(x, y) \longrightarrow |x| + |y|$

Retour au cours

Remarque fcts composées

- Ce théo permet de retrouver le théo portant sur la continuité des applications partielles en un point que l'on rappelle :

Si f est continue au point (x_0, y_0) les fcts $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ et $f_{x_0}(x) = f(x_0, y)$ sont continues aux points x_0 et y_0.

- Attention, la réciproque est fausse.

Considèrons $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ définie en dehors de 0 et $f(0, 0) = 0$.

Les restrictions de f à (Ox) et (Oy) sont identiquement nulles et donc continues en 0. La restriction de f à la droite $y = 2x$ vaut $\frac{2}{5}$ si $x \neq 0$ et 0 si $x = 0$, elle n'est donc pas continue en 0 ce qui entraine d'aprés le théorème que f n'est pas continue en 0.

Retour au cours

Démo dérivée partielle de fct composée

Posons $u(x_0) = u_0$, $v(x_0) = v_0$, $u(x_0 + h) = u_0 + \Delta u$, et $v(x_0 + h) = v_0 + \Delta v$. L'accroissement de $F(x)$ s'écrit alors $F(x_0 + h) - F(x_0) = f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0)$.
$\iff F(x_0 + h) - F(x_0) = f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0 + \Delta v) + f(u_0, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0)$
Appliquons la formule des A.F. à la fct : $\psi_1(u) = f(u, v_0 + \Delta v)$, en supposant l'existence de la dérivée partielle $f_u^{'}$ de $f(u, v)$ dans le voisinage de M_0 :

$f(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0 + \Delta v) = \Delta u f_u^{'}(u_0 + \theta_1 \Delta u, v_0 + \Delta v), 0 < \theta_1 < 1$

De même en supposant l'existence de la dérivée partielle $f_v^{'}$ dans le voisinage de M_0 avec $\psi_2(v) = f(u_0, v)$:

$f(u_0, v_0 + \Delta v) - f(u_0, v_0) = \Delta v f_v^{'}(u_0, v_0 + \theta_2 \Delta v), 0 < \theta_2 < 1$ d'où :
$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{\Delta u}{h} f_u^{'}(u_0 + \theta_1 \Delta u, v_0 + \Delta v) + \frac{\Delta v}{h} f_v^{'}(u_0, v_0 + \theta_2 \Delta v)$

En faisant tendre h vers 0. Si $u(x)$ et $v(x)$ sont dérivables au point x_0, les rapports $\dfrac{\Delta u}{h}$ et $\frac{\Delta v}{h}$ tendent vers $u'(x_0)$ et $v'(x_0)$. $u(x)$ et $v(x)$ sont alors continues et Δu, Δv, $\theta_1 \Delta u$, $\theta_2 \Delta v$ tendent vers 0. Si l'on suppose les dérivées partielles $f_u^{'}$ et $f_v^{'}$ continues au point M_0 alors $\dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0 et cette limite est égale à $f_u^{'}(u_0, v_0)u'(x_0) + f_v^{'}(u_0, v_0)v'(x_0)$

Retour au cours

Démo plan tangent

Nous définissons une courbe (C), tracée sur S par une projection horizontale, ce qui revient à définir la représentation paramétrée suivante :
$x = x(t),\ y = y(t),\ z = f(x(t), y(t))$
Ainsi, sur cette courbe, z est fonction composée de t par $x(t)$ et $y(t)$.
Si de plus nous imposons à (C) de passer par le point M_0, il existe un nombre t_0 tel que $x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0$
Supposons que f admette au voisinage de (x_0, y_0) des dérivées partielles, continues en (x_0, y_0), et considèrons les courbes (C) passant apr M_0 dont la projection horizontale admet une tangente en (x_0, y_0). Les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont alors dérivables en M_0 et d'après le théorème portant la dérivée de fonction composée, il en est de même de la fonction $z(t) = f(x(t), y(t))$. (C) admet donc une tangente en M_0. Nous avons donc
$z'(t) = f'_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(t_0)$ Le vecteur tangent $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ appartient par consèquent au plan passant apr M_0 et défini par les deux vecteurs :
$(1, 0, f'_x(x_0, y_0)),\ (0, 1, f'_y(x_0, y_0))$ Ce plan est indépendant du choix de la courbe (C) : c'est le plan tangent à la surface au point M_0.

Retour au cours

Démo du théo. A.F.

Les coordonnées d'un point $P \in M_0M$ sont : $u = x_0 + ht,\ \ v = y_0 + kt,\ \ (0 \leq t \leq 1)$, et la fonction $f(P) = f(x_0 + ht, y_0 + kt) = F(t)$ est une fonction de la variable t composée au moyen de $f(u, v)$ et des fonctions $u = x_0 + ht,\ \ v = y_0 + kt$. Ces fonctions $u(t)$ et $v(t)$ ont des dérivées respectivement égales à h et k.
Si la fonction $f(u, v)$ possède des dérivées partielles continues dans un carré ouvert contenant M_0M, nous pouvons appliquer le théorème sur la dérivée de fonction composée et écrire :

$$F'(t) = hf'_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + kf'_y(x_0 + ht, y_0 + kt).$$

La formule des accroissements finis pour la fonction F donne alors :

$$F(1) - F(0) = (1-0)F'(\theta) \text{ avec } 0 < \theta < 1 \text{ d'où}$$

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hf'_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf'_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k),\ \ 0 < \theta < 1.$$

Retour au cours

Démo D.L. ordre 1

Si les dérivées f'_x et f'_y sont continues dans un carré et en particulier en M_0, nous pouvons écrire que : $f'_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = f'_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1(h,k)$, $f'_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = f'_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2(h,k)$, où $\varepsilon_1(h,k)$ et $\varepsilon_2(h,k)$ sont des fonctions qui tendent vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$. La formule des accroissmentrs finis devient alors : $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) + h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k)$. Introduisons la distance $M_0M = \rho = \sqrt{h^2+k^2}$, nous avons alors $h = \rho\cos(\alpha)$ et $k = \rho\sin(\alpha)$ et $h\varepsilon_1(h,k) + k\varepsilon_2(h,k) = \rho\,(\varepsilon_1\cos(\alpha) + \varepsilon_2\sin(\alpha)) = \rho\varepsilon(h,k)$, où la fonction $\varepsilon(h,k)$ tend vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$ ce qui permet de conclure.

Retour au cours

Démo Formule de Taylor

Sous les hypothèses du théorème, nous pouvons appliquer à F la formule de Taylor jusqu'à l'ordre 2 sachant que
$F'(t) = hf'_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + kf'_y(x_0 + ht, y_0 + kt)$, et $F''(t) =$
$h^2 f''_{x^2}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 2hkf''_{xy}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k^2 f''_{y^2}(x_0 + ht, y_0 + kt)$
d'où $F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta),\ 0 < \theta < 1$ ce qui permet de conclure.

Retour au cours

Démo D.L. ordre 2

Sous les hypothèses du théorème nous pouvons écrire $f''_{x^2}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) = f''_{x^2}(x_0, y_0) + \varepsilon_1(h,k)$, $f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0, \theta k) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \varepsilon_2(h,k)$, $f''_{y^2}(x_0+\theta h, y_0, \theta k) = f''_{y^2}(x_0, y_0) + \varepsilon_3(h,k)$, où les fonctions $\varepsilon_1(h,k),\ i = 1,2,3$ tendent vers 0 quand (h,k) tend vers $(0,0)$. La formule de Taylor s'écrit alors $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + \frac{1}{2}\left(h^2 f''_{x_0^2} + 2hkf''_{x_0y_0} + k^2 f''_{y_0^2}\right) + \frac{1}{2}\left(h^2\varepsilon_1 + 2hk\varepsilon_2 + k^2\varepsilon_3\right)$. Le dernier terme peut ensuite s'écrire (comme pour démontrer le théorème portant sur le DL d'ordre 1) sous la forme : $\frac{\rho^2}{2}\left(\varepsilon_1\cos^2(\alpha) + 2\varepsilon_2\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \varepsilon_3\sin^2(\alpha)\right)$ ou encore $\left(h^2+k^2\right)\varepsilon(h,k)$ ce qui permet de conclure.

Retour au cours

Autre application (section 4.5)

Application aux polynômes du second degré

Considérons un polynôme du second degré en x et y

$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$

D'après la formule de Taylor (ses dérivées secondes sont constantes), nous obtenons

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + \frac{f''_{x^2}}{2}h^2 + 2\left(\frac{f''_{xy}}{2}\right)hk + \frac{f''_{y^2}}{2}k^2$$

$= f(x_0,y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$

En posant $\varphi(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, nous pouvons alors écrire :

$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + \varphi(h,k)$.

En particulier, si $f(x,y) = \varphi(x,y)$, nous avons

$\varphi(x_0+h, y_0+k) = \varphi(x_0,y_0) + hf'_{x_0} + kf'_{y_0} + \varphi(h,k)$

En échangeant les couples (x_0,y_0) et (h,k) dans cette dernière formule, le membre de gauche reste invariant ce qui permet d'égaler le membre de droite avant et aprés le changement ce qui donne :

$h\varphi'_{x_0} + k\varphi'_{y_0} = x_0\varphi'_h + y_0\varphi'_k$.

La première expression s'appelle la forme polaire de la forme quadratique $\varphi(x,y)$ par rapport au couples de variables (x_0,y_0) et (h,k). L'identité exprime quand à elle la symétrie de la forme polaire par rapport aux deux couples.

Retour au cours