Calcul Intégral - Équations Différentielles M211

Michel Fournié

fournie@mip.ups-tlse.fr

Équations Différentielles (E.D.)

M211

1- Généralités sur les E.D.

Définitions :

- On appelle Équation Différentielle (notée E.D.) du n-ième ordre, une relation entre une fonction y (fonction de x) et ses dérivées successives

$$\boxed{f\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0}$$

- On appelle intégrale ou solution de l'E.D. sur un intervalle I, toute fonction φ telle que

$$\boxed{f\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0, \quad \forall x \in I}$$

- Résoudre ou intégrer une E.D., c'est trouver l'ensemble de toutes les solutions

Définitions (suite)

• On appelle courbe intégrale la courbe plane définie par $y = \varphi(x)$ (φ : solution de l'E.D.)

• La solution d'une E.D. d'ordre n dépendant de n constantes arbitraires

$\longrightarrow$ on parlera de solution générale de l'E.D.

Pour des valeurs de ces constantes

$\longrightarrow$ on parlera de solution particulière de l'E.D.

2.1- Équations à variables séparables

Définition :

C'est une E.D. de la forme $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$

où f et g sont des fonctions quelconques

Remarque :

$y' = \dfrac{g(y)}{f(x)}$ est aussi une E.D. à variables séparables

Méthode de résolution

- Remplacer y' par $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \Longrightarrow$ l'E.D. s'écrit $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{f(x)}{g(y)}$
- Séparer les variables $\Longrightarrow g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$
- Intégrer séparément chaque membre $\Longrightarrow$

$$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$$

Exemple E.D. à variables séparables

Résoudre $x + yy' = 0$

On récrit l'E.D. sous la forme

$$y' = -\frac{x}{y} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y} \Longrightarrow y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x$$

Puis on intègre

$$\int y\mathrm{d}y = -\int x\mathrm{d}x \Longrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + K$$

où K est une constante arbitraire

Remarque : Pour $K > 0$ les courbes intégrales sont des cercles centrés à l'origine

2.2- E.D. linéaires du premier ordre

Définition :

- On appelle E.D. linéaire du 1er ordre une équation de la forme $\boxed{a(x)y' + b(x)y = c(x) \quad (I)}$
où a, b, c sont des fcts données

- Les fonctions $a(x)$ et $b(x)$ sont appelés coefficients et $c(x)$ est appelé le second membre

- On associe à l'équation (I) l'équation sans second membre $\boxed{a(x)y' + b(x)y = 0 \quad (II)}$
l'équation sans second membre est à variables séparables

Théorème :

[La solution générale de (I)] = [solution générale de (II)] + [solution particulière de (I)]

Démonstration

Méthode de résolution

- Si on connait une sol. particulière de (I) : évident
- Si on ne connait pas de solution particulière de (I) :

on utilise la méthode de la variation de la cte

Exemple connaissant une solution particulière

Résoudre $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$

avec L, R, E : Ctes données

et pour $t = 0$, $i = 0$ (condition initiale)

- Une solution particulière est $i = \frac{E}{R}$
- La solution générale de l'E.D. sans second membre $\frac{i'}{i} = -\frac{R}{L}$ est $i = Kexp\left(-\frac{R}{L}t\right)$

$\Longrightarrow$ La sol. générale de l'E.D. est $i = \dfrac{E}{R} + Kexp\left(-\dfrac{R}{L}t\right)$

- Avec la condition initiale, $0 = \frac{E}{R} + K$ d'où $K = -\frac{E}{R}$

$$\boxed{i = \frac{E}{R}\left[1 - exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right]}$$

Méthode de résolution quand on ne connaît pas de solution particulière

- On part de l'équation (II) qui est à variables séparables

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \iff \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow y = K \underbrace{exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\mathrm{d}x\right)}_{z(x)}$$: solution générale de (II)

- On fait un changement de fonction inconnue défini par

$$y = K(x)z(x) \quad (II')$$

Remarque : on a remplacé la constante K par une fonction de la variable x (d'où le nom de la méthode)

Variation de la constante (suite)

- On dérive y dans (II') et on la reporte dans (I) :

$$a(x)\left[K'(x)z(x)+K(x)z'(x)\right]+b(x)K(x)z(x)=c(x)$$
$$\Longleftrightarrow a(x)K'(x)z(x)+K(x)\underbrace{\left[a(x)z'(x)+b(x)z(x)\right]}_{=0 \text{ car z est sol. de (II)}}=c(x)$$

Remarque: les termes en K se simplifient toujours

Il ne reste plus que $\boxed{K'(x)=\dfrac{c(x)}{a(x)z(x)}}$

- On intègre $K'(x)$ pour trouver $K(x)$ à une Cte prés
- On reporte $K(x)$ dans $y=K(x)z(x)$ pour conclure

Exemple Résoudre $xy' - 2y = x^3 \quad (I)$

- On associe l'éq. (II) sans second membre $xy' - 2y = 0$

qui est à variables séparables d'où $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = 2\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ si $y \neq 0$

- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \Longrightarrow \ln\left|\frac{y}{K}\right| = 2\ln|x| = \log x^2 \Longrightarrow y = Kx^2 (II')$
- On suppose K fct de x et on calcule $y' = K'x^2 + 2Kx$

On reporte dans $(I) \Longrightarrow K'x^3 + 2Kx^2 - 2Kx^2 = x^3$

Il reste $K'x^3 = x^3 \iff K' = 1$

- Il ne reste plus qu'à intégrer, ce qui donne $K = x + \lambda$ (λ : constante réelle), puis on reporte K dans (II')
- Conclusion $\boxed{y = (x+\lambda)x^2 = x^3 + \lambda x^2}$

2.3- Autres

- E.D. homogènes par rapport à y et x
- E.D. de Bernoulli
- E.D. de Riccati

Voir TD - Compléments du cours

3- E.D. linéaires du deuxième ordre

3.1- Définitions et Théorème fondamental

Définition :

• On appelle E.D. linéaire du deuxième ordre une équation de la forme

$$\boxed{a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x) \quad \text{où} \quad f \text{ est une fct donnée}}$$

• On parlera d'E.D. à coefficients constants quand $a(x) = a$, $b(x) = b$ et $c(x) = c$ sont constants

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x) \qquad (I)}$$

• On associe à l'E.D. (I) l'équation sans second membre

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0 \qquad (II)}$$

Théorème :

[La solution générale de (I)] = [solution générale de (II)] + [solution particulière de (I)]

Démonstration

Méthode de résolution (idem 2.2)

- On va voir comment résoudre (II)
- Si on connait une solution particulière de (I): évident selon la nature du second membre f il y a des méthodes
- Sans solution particulière de (I) on utilise
  la méthode de la variation de la constante

3.2- Résolution de l'E.D. (II)

On associe à (II) ($ay'' + by' + cy = 0$) l'éq. du 2nd degré appelée d'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$

Complément (Théorique)

On a trois cas pour définir la sol. générale y de (II) :

- **Cas 1:** $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, l'éq. caractéristique a 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2

$$\boxed{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ Constantes réelles}}$$

- **Cas 2:** $\Delta = 0 \Longrightarrow$ 1 racine double $r_0 = -\frac{b}{2a}$

$$\boxed{y = (C_1 x + C_2) e^{-\frac{b}{2a} x}, \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ Constantes réelles}}$$

- **Cas 3:** $\Delta < 0 \Longrightarrow$ 2 racines complexes conjugées $\alpha \mp i\beta$

$$\boxed{y = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) \right), \quad C_1 \text{ et } C_2 \text{ Cte réelles}}$$

Remarque - Exemples

Rq : Quand $\Delta < 0$ la sol. peut se mettre sous les formes

- $y = e^{\alpha x}(K_1 e^{i\beta x} + K_2 e^{-i\beta x})$, K_1 et K_2 Ctes complexes
- $y = Ce^{\alpha x}\cos(\beta x - \varphi)$ où C et φ sont des Ctes réelles

(C est une amplitude et φ un angle de déphasage)

Exemple 1: Résoudre $y'' - 5y' + 6y = 0$.
$\Delta > 0 \Longrightarrow r_1 = 2$ et $r_2 = 3$ d'où la solution
$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, C_1 et C_2 Ctes arbitraires.

Exemple 2: Résoudre $4y'' + 4y' + y = 0$.
$\Delta = 0 \Longrightarrow r_0 = -\frac{1}{2}$ d'où $y = (C_1 x + C_2)e^{-\frac{x}{2}}$, C_1 et C_2 Ctes.

Exemple 3: Résoudre $y'' + y' + y = 0$.
$\Delta < 0 \Longrightarrow$ racines complexes conjuguées
$-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où la solution
$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)\right)$, C_1 et C_2 Ctes

Autre écriture : $y = Ce^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \varphi\right)$, C et φ Ctes

3.3- Recherche d'une solution particulière

Pour appliquer le théorème et résoudre ainsi l'équation complète, nous devons rechercher

$$\boxed{\text{une solution particulière de } (I)}$$

- Très souvent, le second membre est une fonction simple et la solution particulière de l'équation complète s'obtient directement (voir ci-dessous (a)–(e))

- Sinon on utilise la méthode de la méthode de variation de la constante (voir (f))

(a)- Le 2nd membre est un polynôme de degré n

L'équation s'écrit $ay'' + by' + cy = P_n(x)$

- **Cas 1:** Si $c \neq 0$, la sol. particulière est sous la forme $\boxed{\text{d'un polynôme de degré } n}$

- **Cas 2:** Si $c = 0$ et $b \neq 0$, la sol. particulière est sous la forme $\boxed{\text{d'un polynôme de degré } (n+1)}$

- **Cas 3:** Si $c = 0$ et $b = 0$, l'équation se réduit à $ay'' = P_n(x)$ et la solution s'obtient $\boxed{\text{en intégrant deux fois successivement}}$

Exemple $y'' + y' - 2y = 2x^2 - 3x + 1$

- On a 2 sol. réelles de l'éq. caractéristique $\Longrightarrow$ 1 et -2.
- La sol. gén. de l'éq. sans 2nd membre $C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$
- Le second membre est un polynôme de degré 2 et la

constante $c \neq 0 \Longrightarrow$ Cas (1)

La sol. est cherchée sous la forme $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

- On injecte $y = \alpha x + \beta x + \gamma$ dans l'E.D. on obtient que

$$y'' + y' - 2y = \underbrace{-2\alpha}_{2} x^2 + \underbrace{(-2\beta + 2\alpha)}_{-3} x \underbrace{-2\gamma + \beta + 2\alpha}_{1}$$

- Par identification on a : $\alpha = -1, \beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = -\frac{5}{4} \Longrightarrow$

la sol. particulière $y = -x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$ et la sol. générale

$$\boxed{y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}}$$

Autres Exemples

Exemple 2: Résoudre $y'' + y' + 2y = 2x^2 - x + 3$ Cas (1)

La solution est alors égale à

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1 \cos(\frac{\sqrt{7}}{2}x) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x)\right) + x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

Exemple 3 : Résoudre $y'' + 2y' = 2x^2 - 4x + 3$ Cas (2)

La solution est alors égale à

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{11}{4}x$$

Exemple 4 : Résoudre $y'' = x^2 + x - 3$ Cas (3)

La solution est alors égale à

$$y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2$$

(b)- Le 2nd membre est de la forme $e^{mx}P_n(x)$

Quand le 2nd membre est de la forme $e^{mx}P_n(x)$ où $m \in \mathbb{R}$ et P_n polynôme de degré n, l'équation s'écrit

$$ay'' + by' + cy = e^{mx}P_n(x)$$

On se ramène au cas (a) en effectuant

le changement de fonction inconnue $\boxed{y = e^{mx}z}$

Exemple : Résoudre $y'' - y' - 2y = x^2 e^{-3x}$

Cht de fct inconnue ($y = e^{-3x}z$) $\Longrightarrow z'' - 7z' + 10z = x^2$

Puis on résoud $\cdots$ on trouve la solution

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \left(\frac{1}{10}x^2 + \frac{14}{100}x + \frac{78}{1000}\right) e^{-3x}$$

(c)- Le 2nd membre $A_1\cos(wx) + B_1\sin(wx)$

Quand le second membre est de la forme
$A_1\cos(wx) + B_1\sin(wx)$ où A_1 et B_1 Ctes $\in \mathbb{R}$ données,
l'éq. s'écrit $ay'' + by' + cy = A_1\cos(wx) + B_1\sin(wx)$

• **Cas (1) :** Si iw n'est pas racine de l'éq. caract.
on cherche une solution particulière sous la forme

$$\boxed{y = A\cos(wx) + B\sin(wx) \quad \text{où } A \text{ et } B \; Ctes}$$

• **Cas (2) :** Si iw est racine de l'éq. caract.
on cherche une solution particulière sous la forme

$$\boxed{y = x\,(A\cos(wx) + B\sin(wx)) \quad \text{où } A \text{ et } B \; Ctes}$$

Remarque : Dans le Cas (2) $\cos(wx)$ et $\sin(wx)$ sont sol. de l'éq. sans 2nd membre $\Longrightarrow$ elles ne sont pas sol. de l'éq. complète

Exemples

Exemple 1: Résoudre $y'' + 2y' + 5y = \cos(2x) + 2\sin(2x)$

La solution est

$$y = e^{-x}\left(C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)\right) - \frac{7}{17}\cos(2x) + \frac{6}{17}\sin(2x)$$

Exemple 2 : Résoudre $y'' + 4y = \cos(2x)$

La solution est

$$y = C_1\cos(2x) + \left(\frac{1}{4}x + C_2\right)\sin(2x)$$

(d)- Le 2nd membre $e^{mx}\left(A_1\cos(wx)+B_1\sin(wx)\right)$

Quand le second membre est de la forme
$e^{mx}\left(A_1\cos(wx)+B_1\sin(wx)\right)$, l'équation s'écrit
$ay''+by'+cy=e^{mx}\left(A_1\cos(wx)+B_1\sin(wx)\right)$
On se ramène au Cas (c) en effectuant
le changement de fonction inconnue $\boxed{y=e^{mx}z}$

Exemple : Résoudre $2y''-y'-3y=29e^{-x}\cos(x)$
On se ramène à $2z''-5z'=29\cos(x)$
Puis on résout $\cdots$
La solution est alors
$y=C_1e^{\frac{3}{2}x}+C_2e^{-x}-\left(2\cos(x)+5\sin(x)\right)e^{-x}$

(e)- Le 2nd membre est la somme de plusieurs fonctions

Quand le second membre est la somme de plusieurs fonctions, l'équation s'écrit
$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$
- Si $y_1(x)$ sol. particulière de $ay'' + by' + cy = f_1(x)$
- Si $y_2(x)$ sol. particulière de $ay'' + by' + cy = f_2(x)$

$\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots$
- Si $y_n(x)$ sol. particulière de $ay'' + by' + cy = f_n(x)$

$\Longrightarrow$ La somme $y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_n(x)$ est une sol. particulière de l'E.D.étudiée

Démonstration : Il suffit d'ajouter membre à membre les relations $ay_i'' + by_i' + cy_i = f_i(x)$ pour voir que la somme $y_1(x) + y_2(x) + \cdots + y_n(x)$ est solution

Exemple

Résoudre $y'' - 4y' + 4y = e^x + 5\sin(x)$

La solution est

$$y = (C_1 x + C_2)\, e^{2x} + e^x + \frac{4}{5}\cos(x) + \frac{3}{5}\sin(x)$$

(f)- Méthode de variation des constantes

Idée :

Même démarche que pour les E.D. du 1$^{\text{er}}$ ordre

On fait varier les constantes de la solution de (II) qui est de la forme $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$

Mais ici on rajoute une condition sur les constantes:

$$\boxed{C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0}$$

Justification théorique

Exemple Résoudre $y'' + y = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

- La solution de l'E.D. sans second membre est

$y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$

- On fait varier les constantes:

on suppose que C_1 et C_2 sont fonctions de x

$$y' = C_1' \cos(x) - C_1 \sin(x) + C_2' \sin(x) + C_2 \cos(x)$$

- On dérive une nouvelle fois pour obtenir y'' :

$$y'' = -C_1' \sin(x) - C_1 \cos(x) + C_2' \cos(x) - C_2 \sin(x)$$

- On impose la condition supplémentaire:

$$C_1' \cos(x) + C_2'(x) \sin(x) = 0$$

- On repporte y'' et y dans l'E.D., il reste :

$-C_1 \sin(x) + C_2' \cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \Longrightarrow$ un système linéaire

(suite)

Le système linéaire obtenu est

$$\begin{cases} C_1' \cos(x) + C_2' \sin(x) = 0 \\ -C_1' \sin(x) + C_2' \cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} C_1' = -\cos(x) \\ C_2' = \dfrac{\cos^2(x)}{\sin(x)} \end{cases}$$

- Puis on intégre ($\lambda_1,\ \lambda_2$: Ctes arbitraires):

$$\begin{cases} C_1 = -\sin(x) + \lambda_1 \\ C_2 = \int \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} dx = \int \frac{1-\sin^2(x)}{\sin(x)} dx = \ln\left|\tan(\frac{x}{2})\right| + \cos(x) + \lambda_2 \end{cases}$$

(voir cours d'intégration)

- On repporte tout dans la sol. de l'éq. sans second membre: les termes en $\sin(x)\cos(x)$ se simplifient $\Longrightarrow$

$$y = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) + \sin(x) \ln\left|\tan(\frac{x}{2})\right|$$

ANNEXES

DEMONSTRATIONS

E.D. homogènes par rapport à y et x

Définition : E.D. de la forme $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ où f est une fonction quelconque

Remarque : $y' = f\left(\frac{x}{y}\right)$ est de même nature

Méthode de résolution

On effectue le changement de fonction inconnue

On pose $t = \frac{y}{x}$ (ou $y = tx$) $\Longrightarrow$

on se ramener à une E.D. à variables séparables

Remarque : Les fcts y et t dépendent de x $(y(x), t(x))$

Détails (E.D. homogènes)

- On pose $t = \dfrac{y}{x} \Longrightarrow y' = t'x + t$

Ainsi l'E.D. s'écrit $y' = f(t) \Longrightarrow t'x + t = f(t)$

- On sépare les variables

$$x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f(t) - t \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}t}{f(t)-t} \quad \text{si} \quad f(t) \neq t$$

- Si l'on désigne par $F(t)$ une primitive de $\frac{1}{f(t)-t}$

on obtient $\Longrightarrow \log\left|\dfrac{x}{K}\right| = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}t}{f(t)-t} = F(t)$

Conclusion : $x = Ke^{F\left(\frac{y}{x}\right)}$ (K étant une constant arbitraire) et on déduit la solution y

Ex: Résoudre $x^2y' = x^2 + y^2 - xy$

On a $y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$ (qui est bien une E.D. homogène)
On pose $y = tx \Longrightarrow y' = t'x + t$
Avec l'E.D. on a $y' = 1 + t^2 - t \Longrightarrow t'x + t = 1 + t^2 - t$
Ainsi $t'x = (t-1)^2$ qui est une E.D. à var. séparables
On a $x\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = (t-1)^2$ que l'on intègre,

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \text{ si } t \neq 1 \Longrightarrow -\frac{1}{t-1} = \log|Kx|$$

$$\Longrightarrow t - 1 = -\frac{1}{\log|Kx|} \quad (K = \text{constante arbitraire})$$

Or $t = \frac{y}{x} \Longrightarrow \frac{y}{x} - 1 = -\frac{1}{\log|Kx|} \Longrightarrow \boxed{y = x - \dfrac{x}{\log|Kx|}}$

Démo Théorème fondamental (E.D. 1er ordre)

Théorème :

[La solution générale de (I)] $=$
[solution générale de (II)] $+$ [solution particulière de (I)]

Démonstration :

Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre (II). Effectuons le changement de fonction inconnues $z = y - y_0$. L'équation (I) s'écrit alors
$a(x)[y_0' + z'] + b(x)[y_0 + z] = c(x)$ Or
$a(x)y_0' + b(x)y_0 = c(x)$ (car y_0 est solution de (I)). Aprés simplification, il ne reste plus que $a(x)z' + b(x)z = 0$ d'où z est sol. générale de l'éq. sans second membre (II).

Retour au cours

Équation de Bernoulli

Définition : Elles sont de la forme $y' + a(x)y = b(x)y^m$ où a et b sont des fcts de x et m est une Cte réelle quelconque différente de 0 et de 1 (valeurs pour lesquelles l'éq. est linéaire).
Remarque : Pour $m > 0$, $y = 0$ est sol. évidente non retienue.

Méthode de résolution:
On se ramène à une équation linéaire. Pour cela divisons les deux membres de l'équation par $y^m \Longrightarrow \frac{y'}{y^m} + a(x)\frac{1}{y^{m-1}} = b(x)$.

Faisons le Cht de fct inconnue défini par $z = \dfrac{1}{y^{m-1}}$.

Puisque y est fct de x, z' vaut $(1-m)\dfrac{y'}{y^m}$ et l'éq s'écrit,

$\frac{z'}{1-m} + a(x)z = b(x)$, qui est une E.D. linéaire du 1er ordre.

Exemple (Bernoulli)

Exercice : Résoudre $xy' + 3y = x^2y^2$
Ici $m = 2$. On divise les deux membre par y^2,

$$\frac{xy'}{y^2} + \frac{3}{y} = x^2.$$

Posons $z = \dfrac{1}{y}$ d'où $z' = -\frac{y'}{y^2}$. On obtient en z l'équation $-xz' + 3z = x^2$ E.D. du premier ordre linéaire dont la solution est $z = (1 + \lambda x)x^2$. L'intégrale générale de l'E.D. est alors

$$y = \frac{1}{(1 + \lambda x)x^2}.$$

Équation de Riccati

Définition : Elles sont de la forme $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ où a, b, c sont des fonctions données de x.

Méthode de résolution:
On ne peut intégrer ces équations que si l'on connaît une intégrale particulière y_1. Le Cht de fct inconnue $z = y - y_1$ transforme l'E.D. en $y_1' + z' = a(x)(y_1 + z)^2 + b(x)(y_1 + z) + c(x)$. Puisque y_1 est une sol. particulière de l'équation de Reccati, on a $y_1' = a(x)y_1^2 + b(x)y_1 + c(x)$. Aprés simplification, il ne reste plus que $z' = a(x)z^2 + [2a(x)y_1 + b(x)]\, z$ qui est une équation de Bernoulli avec $m = 2$.

Exemple (Riccati)

Exercice : Résoudre l'E.D. $y' = \frac{1}{x}y^2 - \left(2 + \frac{1}{x}\right) y + x + 2$ sachant qu'elle admet l'intégrale particulière $y_1 = x$.
On vérifie que y_1 est bien solution. Puis on pose $z = y - x$ d'où $y' = 1 + z'$ et l'on reporte dans l'E.D.
Aprés simplification, il ne reste plus que $xz' - z^2 + z = 0$.
Pour résoudre cette équation de Bernoulli, on divise par $z^2 \Longrightarrow \frac{xz'}{z^2} + \frac{1}{z} = 1$.
On pose $u = \frac{1}{z}$ d'où $u' = -\frac{z'}{z^2}$ et $xu' + u = 1$ qui est une équation linéaire qui admet en u la solution $u = Kx + 1$ En revenant à la variable y on conclut que $y = x + \frac{1}{Kx+1}$.

Démo Théorème fondamental (E.D. 2nd ordre)

Théorème : On obtient l'intégrale générale d'une équation linéaire du second ordre à coefficients constants en ajoutant à une intégrale particulière de cette équation, l'intégrale générale de l'équationde l'équation sans second membre associée.

Démonstration : Soit y_0 une intégrale particulière de d'E.D. complète (I). y_0 vérifie donc $ay_0'' + by_0' + cy_0 = f(x)$. Effectuons le changement de fonction inconnue $u = y - y_0$. (I) devient alors $a(y_0'' + u'') + b(y_0' + u') + c(y_0 + u) = f(x)$. En tenant compte du fait que y_0 est solution de (I), il reste que $au'' + bu' + cu = 0$ d'où u est solution de l'équation sans second membre (II).

Retour au cours

Théorème : L'ensemble des sol. de (II) $(ay'' + by' + cy = 0)$ est un espace vectoriel de dimension 2. Ce qui signifie que si y_1 et y_2 sont des solutions indépendantes de (II) alors toute sol. de (II) est de la forme

$C_1 y_1 + C_2 y_2$, où C_1 et C_2 Ctes arbitraires.

Pour déterminer ces sol. particulières de (II), on cherche s'il existe des sol. de la forme $y = e^{rx}$ avec r complexe.

On a donc $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$ soit en reportant dans (II):

$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$. Puisque e^{rx} ne s'annule jamais, r est sol. de l'éq. du second degré $ar^2 + br + c = 0$ appelée éq. caractéristique

Retour au cours

Méthode de variation des constantes

Justification théorique :

L'équation étudiée s'écrit $ay'' + by' + cy = f(x)$ (I) lorsque le second membre f ne correspond pas aux cas étudiés.

Soit $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ la solution générale de l'équation sans second membre. On suppose alors ici que les constantes C_1 et C_2 sont fonctions de la variable x d'où $y = C_1(x) + C_2(x)y_2$.

On repporte celle-ci dans l'E.D., on obtient une relation différentielle entre les fonctions C_1 et C_2.

Comme il y a deux fonctions à déterminer, on va pouvoir imposer une deuxième relation entre C_1 et C_2.

Calculons $y' = C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$ et imposons la condition supplémentaire $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$ pour ne pas faire apparaitre C_1'' et C_2'' dans le calcul de y''.

Méthode de variation des constantes (suite)

Il reste alors $y' = C_1(x)y_1' + C_2(x)y_2'$. Nous dérivons celle-ci pour exprimer $y'' = C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_1(x)y_1'' + C_2(x)y_2''$.
Comme y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation sans second membre, il vient que $\begin{cases} C_1(x)\left(ay_1'' + by_1' + cy_1\right) = 0, \\ C_2(x)\left(ay_2'' + by_2' + cy_2\right) = 0, \end{cases}$
puis en repportant dans (I) : $a(C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2') = f(x)$.
En tenant compte de la condition supplémentaire imposée, le système en C_1' C_2' s'écrit : $\begin{cases} C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = \dfrac{f(x)}{a}, \\ C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0, \end{cases}$ où y_1 et y_2 sont deux solution linéairement indépendantes $y_1'y_2 - y_1y_2' \neq 0$.
Le système précédent admet alors une solution unique.
Connaissant $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$, on déterminer par intégration les valeurs de C_1 et C_2 à une constante près.

Retour au cours

Réference bibliographique

Equations différentielles
Collection "Comprendre et appliquer"
Mathématiques pratiques élémentaires n°5
C. Gilormini et G. Hirsch
Masson (1985) - 2ième édition.