Calcul Intégral - Equations Différentielles
M211-1

Michel Fournié

michel.fournie@iut-tlse3.fr

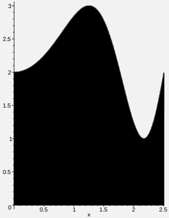
http://www.math.univ-toulouse.fr/ ˜ fournie/

Table des matières

Préliminaires, Rappels

Définition : Intégrale définie

- Soit f définie continue sur $I = [a, b]$ telle que $f(x) > 0$



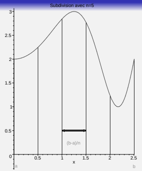
- On peut alors délimiter une surface par :
  le graphe de f, l'axe Ox, les droites $x = a$, $x = b$,
  puis lui associer un nombre réel noté S appelé

$$\boxed{\text{aire de la surface}}$$

(l'unité de mesure étant un cube de coté 1).

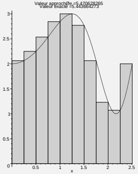
Valeurs approchées - Intégrale définie

- Une valeur approchée I_n de S peut être obtenue en partageant I en n parties égales :
$x_0 = a, \cdots, x_k = a + k\frac{b-a}{n}, \cdots, x_n = b$



- et en calculant la somme des aires des rectangles de base $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f(x_1), \cdots, f(x_n)$:

$$\boxed{I_n = \frac{b-a}{n}\left[f(x_1) + \cdots + f(x_k) + \cdots + f(x_n)\right]}$$



Définition (Propriété admise):
Si f est continue sur $I = [a, b]$ alors $\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n = I$.

I sera appelée intégrale définie de la fonction f continue entre les bornes a et b

Animation Maple

Propriétés

Proposition (Linéarité):

$$\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$
$$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Proposition : Démonstration

$$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x \quad \text{(Chasles)}$$
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration

Formule de la moyenne

Proposition (Formule de la moyenne):
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors il existe un nombre $c \in [a, b]$ tel que :

$$\boxed{\underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}_{\text{valeur moyenne}} = f(c)}$$

Démonstration

Animation Maple

Table des matières

Intégrale définie en fonction de sa borne supérieure

Définition :

- On appelle $I(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ l'intégrale définie en fonction de sa borne supérieure.
- La fonction $F : x \longrightarrow I(x)$ détermine une fonction numérique F de la variable réelle x.

Théoréme :

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors la fonction F définie sur $[a, b]$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

- est dérivable (et donc continue) sur $[a, b]$
- et $F'(x) = f(x)$.

La fonction F est appelée primitive de la fonction f Démo

Primitives

Définition :
Une primitive F de f est une fonction telle que

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

On notera $F = \int f(x)dx$ une telle primitive généralement appelée primitive indéfinie $\left(F = \int f(t)dt = \int f(s)ds = \cdots\right)$.

Objectif du module:
Savoir calculer les primitives de fonctions quelconques en les exprimant à l'aide de fonctions usuelles (simples)

Quelques primitives de référence (à compléter)

Puissances

$y = f(x)$	A	x	$x^m \ (m \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	e^x	$f'(x)f^m(x)$
$\int f(x)\mathrm{d}x$	Ax	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$	$\ln(\lvert x \rvert)$	e^x	$\frac{f^{m+1}(x)}{(m+1)}$

Fonctions trigonométriques

$y = f(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\cos^2(x)$
$\int f(x)\mathrm{d}x$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$

$+ \text{CTE}$

Quelques primitives de référence (suite)

Fonctions hyperboliques

$y = f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\int f(x)dx$	$\mathrm{Arc\,sin}(x)$	$\mathrm{Arc\,tan}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{th}(x)$	$\mathrm{Arc\,cos}(x)$

Fonctions réciproques

$y = f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\int f(x)dx$	$\ln(\lvert x+\sqrt{x^2-1}\rvert)$ $= \mathrm{Arg\,ch}(x)$ $x > 1$	$\mathrm{Arg\,sh}(x)$ $= \ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{2}\ln\left(\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert\right)$ $= \mathrm{Arg\,th}(x)$ $x \in]-1,1[$

Table des matières

Calcul au moyen d'une primitive

Théoréme : Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors si G est une primitive de f, toute primitive F de f s'exprime sous la forme :

$$\boxed{F(x) = G(x) + C \quad \text{où } C \text{ est une constante.}}$$

Démonstration

Théoréme : Si G est une primitive de f on a

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).}$$

Démonstration

Exemple - Calcul au moyen d'une primitive

Calculer l'aire d'un triangle ?

$$\int_0^1 x\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

On retrouve bien le résultat attendu
(obtenu sans calcul intégral)

Méthode de changement de variable

Théoréme :

Si l'on pose $x = \varphi(t)$ avec φ fonction inversible telle que $\begin{cases} \varphi(\alpha) = a \\ \varphi(\beta) = b \end{cases}$ alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\mathrm{d}t}$$

Démonstration

Toute la difficulté réside dans le choix de φ

Les 3 étapes de la méthode de cht de variable

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\mathrm{d}t$$

$\boxed{1}$ Eliminer la variable x dans $f(x)$ avec le cht de variable

- si on a $x = \varphi(t)$ alors faire un "copier/coller"
- si on a $t = \psi(x)$ alors reconnaître $\psi(x)$ dans $f(x)$ ou exprimer $x = \psi^{-1}(t)$ (fct réciproque) pour faire un "copier/coller"

  On a x a disparu : tout s'exprime en fonction de t.

$\boxed{2}$ Exprimer dx en fonction de dt

- si on a $x = \varphi(t)$ alors $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$
- si on a $t = \psi(x)$ alors $\mathrm{d}t = \psi'(t)\mathrm{d}x$ d'où $\mathrm{d}x = \frac{1}{\psi'(t)}\mathrm{d}t$

$\boxed{3}$ Traitement des bornes

- utiliser les relations écrites dans $\boxed{2}$

Exemple de changement de variable

Calculer l'aire d'un demi-disque de rayon 1 ?

$$\text{Aire} = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\ dx$$

On pose $x = \sin(t) \Longrightarrow dx = \cos(t)dt$, ainsi

$$\begin{aligned}
\text{Aire} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2(t)}\cos(t)dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2}dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Exemple IMPORTANT de cht de variable

Calculer $\boxed{I = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}}$

On pose $x = \tan(t)$ d'où $dx = \frac{1}{\cos^2(t)}dt \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{\left(\frac{\sin^2(t)}{\cos^2(t)}+1\right)^2}\frac{1}{\cos^2(t)}dt = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^4(t)}}\frac{1}{\cos^2(t)}dt \\
&= \int \cos^2(t)dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \frac{1}{2}\left(t+\frac{\sin(2t)}{2}\right)+C \\
&= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arc}\tan(x)+\frac{x}{1+x^2}\right)+C
\end{aligned}$$

Application - Eléments simples

Remarque :

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1+\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\cos^2(x) = \frac{\sin(2t)}{2}$$

Méthode d'intégration par partie

Méthode basée sur la formule $\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$

Théoréme : $\boxed{\int_a^b uv'\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\mathrm{d}x}$ Démonstration

Exemple : Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin(x)}_{v'} \mathrm{d}x.$

On pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v'(x) = \sin(x) \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$ d'où

$$I = [-x\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{d}x = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

Moyen mémo-technique A-L-P-E-S

Intégration de fractions rationnelles

Décomposition en éléments simples

Définitions :

- F est une fraction rationnelle lorsque F est le quotient de 2 polynômes : $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
- On appelle zéro de F tout x_0 tel que $F(x_0) = 0$
- On appelle pôle de F tout x_0 tel que $Q(x_0) = 0$

Objectif :

- Décomposer F en une somme de termes élémentaires dits “éléments simples”.
- Ainsi le calcul d’une primitive se ramène au calcul des primitives de chaque élément simple.

Première étape lorsque deg(P) $\geq$ deg(Q) pour $\frac{P}{Q}$

- Faire division Euclidienne de P par Q selon les puissances croissantes de x pour trouver la partie polynomiale notée $E(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ où } \deg(R) < \deg(Q).$$

Exemple : Considérons $F(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ alors

$$\begin{array}{l|l} x^3 & x^2-4 \\ \cline{2-2} x^3 - 4x & x \qquad \Longrightarrow x^3 = (x^2-4)x + 4x \\ \cline{1-1} \quad 4x & \qquad\quad \Longrightarrow F(x) = x + \dfrac{4x}{x^2-4} \end{array}$$

Savoir intégrer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ($\deg(P) \geq \deg(Q)$)

$\Longleftrightarrow$ Savoir intégrer $\frac{R(x)}{Q(x)}$ ($\deg(R) < \deg(Q)$)

Deuxiéme étape lorsque deg(P)< deg(Q) pour $\frac{P}{Q}$

Pour faciliter la présentation, par la suite $Q(x)$ est supposé unitaire (son coefficient du terme de plus haut degré = 1)

1- On identifie les zéros de $Q(x)$

- $Q(x)$ a des zéros réels a_i, $i = 1, \cdots, I$
  avec pour ordre de multiplicité α_i
- $Q(x)$ a des zéros complexes conjugués
  $z_j = b_j \pm i c_j, j=1,\cdots,J$
  avec pour ordre de multiplicité β_j

2- On associe à $Q(x)$ les éléments simples

- Les éléments simples "de première espèce":

$$\frac{A_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}}, \quad i = 1, \cdots, I \text{ et } 1 \leq k_i \leq \alpha_i \quad \text{avec} \quad A_{k_i} \in \mathbb{R}$$

- Les éléments simples "de deuxième espèce":

$$\frac{B_{l_j}x + C_{l_j}}{\left[(x-b_j)^2 + {c_j}^2\right]^{l_j}}, j = 1,\cdots,J \text{ et } 1 \leq l_j \leq \beta_j, \; B_{l_j}, C_{l_j} \in \mathbb{R}$$

Théoréme de décomposition

Théoréme :
$\frac{P(x)}{Q(x)}$ se décompose (de façon unique) comme la somme des tous ses éléments simples possibles (première et deuxième espèces) :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \sum_{i=1}^{I} \sum_{k_i=1}^{\alpha_i} \frac{A^i_{k_i}}{(x-a_i)^{k_i}} + \sum_{j=1}^{J} \sum_{l_j=1}^{\beta_j} \frac{B^j_{l_j} x + C^j_{l_j}}{[(x-b_j)^2 + c_j^2]^{l_j}}$$

Autre écriture du théoréme

Comme $z_j = b_j + ic_j$, on a

$$\begin{aligned}(x - z_j)(x - \bar{z}_j) &= ((x - b_j) - ic_j)((x - b_j) + ic_j) \\ &= (x - b_j)^2 + c_j^2\end{aligned}$$

Si on note p_j et q_j les quantités définies par

$$(x - z_j)(x - \bar{z}_j) = \underbrace{x^2 + p_j x + q_j}_{\text{poly où } \Delta<0}, \text{ on obtient}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= E(x) + \left[\frac{A_1^1}{(x - a_1)} + \cdots + \frac{A_{\alpha_1}^1}{(x - a_1)^{\alpha_1}}\right] + \cdots + \\ &\left[\frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + p_1 x + q_1)} + \cdots + \frac{B_{\beta_1}^1 x + C_{\beta_1}^1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1}}\right] + \cdots\end{aligned}}$$

3- Il reste ensuite à définir les constantes $A,\ B,\ C, \cdots$

- Par identification
- Autres règles pratiques (voir exemples et TD)

Exemple 1 : Décomposer en éléments simples

- Décomposer en éléments simples $F_1(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$

Premiére étape : division euclidienne:

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4}$$

Deuxiéme étape : Décomposition en éléments simples:

$$\frac{4x}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

Troisiéme étape : Identification de A et B :

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{x(A+B)+2(A-B)}{(x-2)(x+2)} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A+B=4 \\ A-B=0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A=2 \\ B=2 \end{array} \right.$$

Conclusion : $F_1(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4} = x + \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{2}{x+2}.$

Exemple 2: Décomposer en éléments simples

$$F_2(x) = \frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{B'x+C'}{(x^2+1)^2}$$

- Par identification: $A=1, B=-1, C=0, B'=-1, C'=0$

Conclusion: $F_2(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

- Complément (autre méthode):

– On multiplie tout par x puis on prend $x=0 \Longrightarrow A=1$

– On multiplie tout par $(x^2+1)^2$ et on prend

$x=i \Longrightarrow \frac{1}{i} = B'i+C' \Longrightarrow 1 = -B'+iC' \Longrightarrow C'=0, B'=-1,$

$x=1 \Longrightarrow \frac{1}{4} = 1 + \frac{B+C}{2} - \frac{1}{4} \Longrightarrow -1 = B+C,$

$x=-1 \Longrightarrow -\frac{1}{4} = -1 + \frac{C-B}{2} + \frac{1}{4} \Longrightarrow 1 = C-B, \cdots$

Remarque : Des fois on prend $x \longrightarrow \infty$, $x =$ valeur particulière, $\cdots$

Primitive d'élément simple de premiére espéce

Si $\alpha \neq 1$

$$\int \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}dx = A_\alpha \int (x-a)^{-\alpha}dx = \frac{A_\alpha}{-\alpha+1}(x-a)^{-\alpha+1} + C$$

Sinon

$$\int \frac{A_1}{(x-a)}dx = A_1 \int \frac{dx}{x-a} = A_1 \ln(|x-a|) + C$$

- Calculer : $I_1(x) = \int F_1(x) = \int \frac{x^3}{x^2-4}dx$

Etant donné que $F_1 = x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}$

$I_1 = \int x + \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2}dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln(|x-2|) + 2\ln(|x+2|) + C$

- Calculer : $I_1(x) = \int F_2(x) = \int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

Etant donné que $F_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2}$

$$I_2(x) = \ln(|x|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C$$

Primitive d'élément simple de deuxiéme espéce

- Tout se raméne au calcul d'une primitive d'une fonction de la forme : $\boxed{\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta}}$

- Idée de la méthode
  On récrit (x^2+px+q) sous la forme $C^{te}(1+(\underbrace{\cdots}_{T})^2)$
  puis on effectue un changement de variable
  $T =$"*termes dans la parenthése*"
  ce qui permet de tout exprimer en fonction de deux types d'intégrales

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^\beta} \quad \text{et} \quad \int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^\beta}$$

Justification théorique

(complément de cours - pour aller plus loin)**

- x^2+px+q ayant des zéros complexes ($\Delta = p^2-4q<0$)

$$\Longrightarrow x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{(4q-p^2)/4}_{>0}$$

$\Longrightarrow$ on peut poser $\frac{4q-p^2}{4} = w^2$ (Constante) $\Longrightarrow$

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + w^2 = \left[1+\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{w}\right)^2\right] w^2$$

- On effectue alors le cht de variable $\boxed{t = \frac{x+\frac{p}{2}}{w}}$

$x = tw - \dfrac{p}{2} \Longrightarrow \mathrm{d}x = w\mathrm{d}t$ et $x^2+px+q = w^2(t^2+1)$. Ainsi

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta} = \int \frac{B(tw-\frac{p}{2})+C}{w^{2\beta}(t^2+1)^\beta} w\mathrm{d}t = \int \frac{Bt}{w^{2\beta-2}(t^2+1)^\beta}\mathrm{d}t + \int \frac{-B\frac{p}{2}+C}{w^{2\beta-1}(t^2+1)^\beta} w\mathrm{d}t$$

Conclusion: Tout dépend de $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^\beta}$ et $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+1)^\beta}$

Primitive d'élément simple (suite)

- Pour la premiére forme:

il n'y a pas de méthode générale de résolution !!!!

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{Arc}\tan(x) + C, \text{ (primitive usuelle)},$$

$$\int \frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\left(\text{Arc}\tan(x) + \frac{x}{1+x^2}\right) + C$$

(cht.var. $x = \tan(t)$: cf exemple)

- Pour la deuxiéme forme :

$$\int \frac{x dx}{\left(x^2+1\right)^\beta} = \frac{1}{2(-\beta+1)} \frac{1}{(x^2+1)^{\beta-1}} + C \text{ si } \beta \neq 1,$$

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \text{ si } \beta = 1.$$

Exemple** $I = \displaystyle\int \frac{t-1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t$

- On a 2 pôles complexes conjuguées $-\frac{1}{1} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}(\Delta{=}{-}3 < 0)$
- $t^2+t+1 = \left[\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] = \frac{3}{4}\left[1+\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2\right] \Longrightarrow$
- Cht de variable $s = \dfrac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Longrightarrow \mathrm{d}s = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{d}t$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}s-\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}[1+s^2]}\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{d}s = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{s}{[1+s^2]}\mathrm{d}s - 2\int\frac{1}{[1+s^2]}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln(s^2+1) - 2\mathrm{Arc}\tan(s) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2+1\right) - 2\mathrm{Arc}\tan\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C \end{aligned}$$

Application au calcul de primitives

(complément de cours - pour aller plus loin)**

Cette partie de cours sera vue en TD sur des exemples.
On donne ci-dessous ((a) $\cdots$ (f))quelques ficelles pour savoir quel changement de variable faire.

a) Intégration qui se raméne aux fractions rationnelles :

Calculer $I(x) = \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x$ - intégrale avec "racine carrée"

On effectue le changement de variable $\boxed{t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$

$$\iff x = \frac{t^2+1}{t^2-1} \iff \mathrm{d}x = \frac{4t\mathrm{d}t}{(1-t^2)^2}$$

Ce qui nous ramené à intégrer une fraction rationnelle $\cdots$

Autre exemple

Calculer $I(x) = \displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$ - intégrale avec "exponentielle"

On effectue le changement de variable $\boxed{t = e^x}$

$\Longrightarrow dt = e^x dx \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{t}$

On décompose en éléments simples
(sans oublier de tout exprimer en fonction de x)

$$\frac{t-1}{t(t+1)} = -\frac{1}{t} + \frac{2}{t+1}$$

Ainsi $I(x) = 2\ln(e^x + 1) - x + C$.

Exemple 3 (plus général)

Calculer $\int H(\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})\mathrm{d}x$ où $\begin{cases} ad - bc \neq 0, \\ H = \text{fct quelconque} \end{cases}$

On effectue le changement de variable

$$\boxed{s = \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}}$$

C'est ainsi par exemple qu'on calcule

$$I = \int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{d}x$$

Application à d'autres intégrales

b) Intégrales $\int H(\sin(x), \cos(x))\,dx$, H=fct quelconque - "trigo"

- Essayer les chts de variables $\boxed{s = \sin(x)}$ ou $\boxed{s = \cos(x)}$
- S'ils ne sont pas efficaces utiliser le changement de variable classique:

$$\boxed{s = \tan\left(\frac{x}{2}\right), x \in]-\pi, \pi[} \Longrightarrow x = 2\text{Arc}\tan(s), s \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$\boxed{\sin(x) = \frac{2s}{s^2+1}, \quad \cos(x) = \frac{1-s^2}{s^2+1}, \quad dx = \frac{2}{s^2+1}ds}$$

Exemple : Calculer $\int \frac{\cos(x)}{2+\sin^2(x)}dx$

on préfère le changement de variable $s = \sin(x)$

Exemple : Calculer $I(x) = \int \frac{dx}{\sin(x)}$

on effectue le cht de variable $s = \tan\left(\frac{x}{2}\right), x \in]-\pi, \pi[$

Complément : Quelques régles pratiques

- Si H est invariante par la transformation $x \longrightarrow -x$ poser $s = \cos(x)$.
- Si H est invariante par la transformation $x \longrightarrow \pi - x$ poser $s = \sin(x)$.
- Si H est invariante par la transformation $x \longrightarrow \pi + x$ poser $s = \tan(x)$.

Exemples :

- $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)}, \quad s = \cos(x)$
- $I = \displaystyle\int \frac{dx}{\cos(x)}, \quad s = \sin(x)$
- $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1 + \tan(x)}, \quad s = \tan(x)$

Application à d'autres intégrales

c) Intégrales $\int H(sh(x), ch(x), e^x)\mathrm{d}x$, H=fct quelconque

- Essayer les changements de variables

  $\boxed{s = \mathrm{sh}(x)}$ ou $\boxed{s = \mathrm{ch}(x)}$

- S'ils ne sont pas efficaces on utilise le changement de variable (classique) $\boxed{e^x = s \text{ où } x \in \mathbb{R}} \Longrightarrow$

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{s^2 - 1}{2s} \text{ et } \mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{s^2 + 1}{2s}$$

Remarque: Même cht de variable si H dépend de $\mathrm{th}(x)$

Exemple : Calculer $I(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}(x)}$ faire $s = e^x$

Exemple : Calculer $\int \frac{sh(w)}{ch(w)}\mathrm{d}x$ faire $s = \mathrm{ch}(x)$.

Application à d'autres intégrales

d) Intégrales $\int H(\sqrt{(x-b)^2 \pm c^2})\mathrm{d}x$, H=fct quelconque

Avec le signe $-$ poser $\mathrm{ch}(s) = \left|\dfrac{x-b}{c}\right|$

Avec le signe $+$ poser $\mathrm{sh}(s) = \dfrac{x-b}{c}$

Exemple : $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}$ on pose $\mathrm{sh}(s) = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$

e) Intégrales $\int H(\sqrt{c^2-(x-b)^2})\mathrm{d}x$, H=fct quelconque

Poser $\sin(s) = \frac{x-b}{c}$.

f) Intégrales $\int H(\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$, H=fct quelconque

On se raméne à l'une des formes suivantes :
$\sqrt{1+s^2}$, $\sqrt{1-s^2}$, $\sqrt{s^2-1}$ à l'aide des chts de variables :
$s = \mathrm{sh}(x)$, $s = \sin(x)$, $s = \mathrm{ch}(x)$ (Voir TD)

Table des matières

ANNEXES

DEMONSTRATIONS

Démonstration (Linéarité): p.5

D'aprés la définition de I :

$$I = \int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) + g(x_k) =$$

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} g(x_k) =$$

$\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$, même démo. pour la 2iéme propriété

Retour au cours

Démonstration : p.5

1 - Si $b = a$ alors $I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(x_k) = 0$ donc sa limite est nulle.
2 - Evident si l'on interpréte l'intégrale comme étant une aire.
3 - On utilise la propriété précédente en remplaçant c par a. On peut également remplacer dans la définition $(b-a)/n$ par $(a-b)/n$ ce qui aura pour conséquence de changer le signe.

Retour au cours

Démonstration (Formule de la moyenne): p.6

Si f est continue sur $[a, b]$ alors f atteint ses bornes (f admet un min. et un max.) voir le théo. des valeurs intermédiaires.

$$m \leq f(x) \leq M \Longrightarrow \underbrace{\int_a^b m\mathrm{d}x}_{m(b-a)} \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \underbrace{\int_a^b M\mathrm{d}x}_{M(b-a)} \text{ d'où}$$

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M.$$

Ainsi la valeur moyenne est comprise entre le minimum et le maximum de f qui est continue sur $[a, b]$, d'aprés le théoréme des valeurs intermédiaires, elle est donc atteinte pour une valeur $c \in [a, b]$.

Retour au cours

Démonstration (Dérivabilité de F)

On étude la dérivabilité de la fonction F au point x_0 en calculant :
$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t.$
D'aprés la formule de la moyenne, cette quantité est égale à $hf(c)$ où $c \in [x_0, x_0+h]$.
Ainsi $F(x_0+h) - F(x_0) = hf(c)$.
Comme f est continue, quand h tend vers 0, c tend vers x_0.
Ainsi F est dérivable en x_0 et sa dérivée en ce point vaut $f(x_0)$

Retour au cours

Démonstration (Lien entre deux primitives): p.13

Si l'on considére la fonction $H(x) = F(x) - G(x)$,
$H'(x) = F'(x) - G'(x) = 0$ ce qui permet de conclure que la fonction H est constante sur l'intervale $[a, b]$ i.e. $H(x) = C$ d'où le résultat.

Retour au cours

Démonstration (Calcul d'une intégrale définie) :

En utilisant le théoréme précédent et du fait que la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ soit une primitive de f (voir théo déjà démontré) :
$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x) + C$.

Pour $x = a \Longrightarrow C = -G(a)$ d'où $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = G(x) - G(a)$ puis avec $x = b$ on retrouver le résultat.

Retour au cours

Démonstration (Changement de variable) : p.15

Idée de la preuve: Chercher une primitive de $f(\varphi(t))\varphi(t)$.

Sachant que $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ et s'il existe une fonction $\varphi(t)$ telle $\varphi(\alpha) = a$ et $\varphi(\beta) = b$ (de classe C^1) alors nous pouvons définir la fonction composée G par $F(x) = F(\varphi(t)) = G(t)$.

Ainsi, $G'(t) = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)$.

$G(t)$ est donc une primitive de $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ et sa valeur entre les bornes $t = \alpha$ et $t = \beta$ est égale à

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = G(\beta)-G(\alpha) = F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a) = I$$

Retour au cours

Démonstration (Intégration par partie) : p.15

Il suffit d'utiliser la formule de dérivation $\displaystyle\int_a^b (uv)'\mathrm{d}x = \int_a^b u'v\mathrm{d}x + \int_a^b uv'\mathrm{d}x$ et remarquer que la fonction uv est une primitive de $(uv)'$ ce qui entraîne : $\int_a^b (uv)'\mathrm{d}x = [uv]_a^b$.

Démonstration de l'autre écriture :

Provient des égalités suivantes : $\mathrm{d}u = u'\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}v = v'\mathrm{d}x$.

Retour au cours