Groupe/Sous-groupe : **Tous**
Année universitaire 2013/2014
Unité d'enseignement : UE1
Samedi 14 Décembre 2013
Semestre : S3

CONTROLE DE CONNAISSANCES EN (Discipline/Matière)

Mathématiques

Responsable du sujet : Michel Fournié — Durée : **2h00**

Documents et Téléphone portable Interdits
Calculatrices alphanumériques, programmables, graphiques et communicantes interdites
Répondre sur : ☐ Le sujet ■ Copies papier (chaque feuille sera numérotée avec votre nom)

Exercice 1 (7 points)**.** Soit $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $B_0 = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et l'application $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

(1) (Cours) Énoncer la définition d'une application linéaire.
(2) Montrer que g est une application linéaire.
(3) Écrire la matrice A représentant g dans la base B_0.
(4) Soient $\vec{u} = \binom{-3}{1}$ et $\vec{v} = \binom{-1}{1}$. Montrer que $B_1 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
(5) Écrire la matrice Δ représentant g dans la base B_1.
(6) Donner P la matrice de changement de base de B_0 vers B_1.
(7) Calculer l'inverse de P.
(8) Quelle relation matricielle existe-t-il entre A et Δ ?
(9) En déduire A^{30} (le résultat pourra être donné avec des puissances).

Exercice 2 (7 points)**.** Soit le système linéaire suivant

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ & - & y & - & 2z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & -1 \end{array} \right.$$

(1) Écrire le système (S) sous forme matricielle $AX = B$ où A, X et B seront définis précisément.
(2) Calculer le déterminant de A.
(3) Justifier que (S) admet une solution unique.
(4) Calculer A^{-1} en utilisant la méthode du pivot de Gauss.
(5) Calculer la solution de (S).
(6) Résoudre

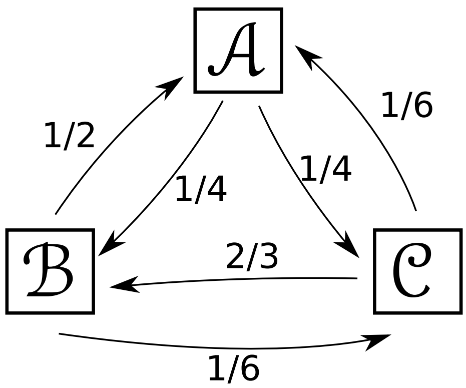
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ & - & y & - & 2z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array} \right.$$

Exercice 3 (2 points)**.** On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer A^2.
(1) Montrer que $A^2 = A + 2I$.
(1) Déduire que $\frac{1}{2}(A - I) = A^{-1}$.

Exercice 4 (4 points)**.** (Evolution des populations)

On considère un pays qui contient trois villes de noms $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Chaque année les populations de ces villes migrent de l'une vers les autres avec les règles suivantes :



Le graphique donné ci-dessus exprime par exemple que chaque année $\frac{1}{4}$ de la population de la ville $\mathcal{A}$ et $\frac{1}{6}$ de la population de la ville $\mathcal{B}$ migrent vers la population $\mathcal{C}$ tandis que $\frac{1}{6}$ de la population de $\mathcal{C}$ reste à $\mathcal{C}$ (ceux qui restent sont ceux qui ne partent pas !).

On note A_0, B_0 et C_0 les proportions de populations respectives des villes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ l'année 0 et A_1, B_1 et C_1 les populations de ces mêmes villes l'année suivante (année 1).

(1) Exprimer A_1, B_1 et C_1 en fonction de A_0, B_0 et C_0.

(2) Ecrire ces relations sous la forme matricielle suivante

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = E \times \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

où E est une matrice 3×3 dont les coefficients sont des constantes

(3) Vérifier que la somme des coefficients de chaque colonne de E est égale à 1.

(4) Vérifier que $A_1 + B_1 + C_1 = A_0 + B_0 + C_0$. Comment expliquer cette relation ?

(5) Calculer la première colonne de la matrice $E \times E$.

(6) On suppose qu'une année toute la population du pays vit dans la ville $\mathcal{A}$.
Deux années plus tard, quelle est la ville la moins peuplée ?