

Image

Travaux pratiques

Feuille 1 :

Comparaisons d’algorithmes itératifs pour résoudre le modèle de tykhonov en débruitage d’images

Nous allons, lors de ce TP, comparer les performances des algorithmes vus en cours. Pour cela, nous considérerons un problème de débruitage : notre donnée est de la forme

$$v = u + b,$$

où $u \in \mathbb{R}^{N^2}$ est l’image que l’on cherche, $v \in \mathbb{R}^{N^2}$ est la donnée à notre disposition et $b \in \mathbb{R}^{N^2}$ est la réalisation d’un bruit blanc Gaussien.

Le modèle que l’on cherchera à résoudre consiste à minimiser l’énergie

$$E(w) = \sum_{i,j=0}^{N-1} |\nabla w_{i,j}|^2 + \lambda \sum_{i,j=0}^{N-1} (w_{i,j} - v_{i,j})^2,$$

pour $w \in \mathbb{R}^{N^2}$ et $\lambda \geq 0$, avec

$$\nabla w_{i,j} = \begin{pmatrix} (D_x w)_{i,j} \\ (D_y w)_{i,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{i+1,j} - w_{i,j} \\ w_{i,j+1} - w_{i,j} \end{pmatrix}$$

pour $(i, j) \in \{0, \dots, N-1\}^2$ (on supposera que w est périodisée en dehors de son support).

Exercice 1.

- (1) Calculer les opérateurs adjoints, D_x^* et D_y^* , de D_x et D_y .
- (2) Calculer B , l’opérateur linéaire allant de \mathbb{R}^{N^2} dans lui-même, $c \in \mathbb{R}^{N^2}$ et $C(v)$ ne dépendant pas de w , tels que pour tout $w \in \mathbb{R}^{N^2}$,

$$E(w) = \langle Bw, w \rangle + \langle c, w \rangle + C(v),$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^{N^2} .

- (3) Vérifier que B est un opérateur auto-adjoint et qu’il s’agit d’une convolution. Donner le noyau h correspondant.
- (4) Vérifier que, si l’on note h le noyau de convolution correspondant à B , sa transformée de Fourier discrète vaut

$$\hat{h}_{k,l} = \lambda + 4 - 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi l}{N}\right) \right).$$

NB : On sait qu'une convolution avec un noyau h est diagonale dans la base de Fourier. De plus, la transformée de Fourier de h correspond aux valeurs propres de la convolution avec h .

- (5) Calculer le gradient et le Hessien de $E : \nabla E(w)$ et $\nabla^2 E(w)$.
(6) En déduire des bornes $\mu > 0$ et $M > \mu$ telles que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^{N^2}$ et tout $w \in \mathbb{R}^{N^2}$

$$\mu \|w\|_2^2 \leq \langle \nabla^2 E(u_0)w, w \rangle \leq M \|w\|_2^2.$$

- (7) Déduire de la question 4 un algorithme utilisant la transformée de Fourier permettant de calculer l'image minimisant E .

Exercice 2.

- (1) — Rendez vous sur
<http://www.math.univ-toulouse.fr/~fmalgouy/index.html>
puis naviguez pour atteindre la page web du cours.
— Télécharger les packages nécessaires au TP et le fichier *tp1.zip*.
— Décompresser les archives. L'archive *tp1.zip* contient une image "barbara.gif", et des fichiers Matlab.
— Lancez Matlab et ajoutez les "path" correspondant aux fichiers décompressés à la question précédente.
- (2) Utiliser la fonction *randn* pour ajouter un bruit Gaussien de déviation standard 10 à l'image *barbara.gif*.
- (3) Lire le programme contenu dans *quadratique_exacte.m*. Que fait-il ? Expliquer votre réponse en faisant le lien avec l'exercice 1.
- (4) Utiliser la fonction *quadratique_exacte* pour débruiter l'image obtenue à la question 2, pour des valeurs de $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 10$, $\lambda = 100$. Expliquer le rôle du paramètre λ . Quelle valeur de λ préconiserez-vous ?
- (5) Lire le programme contenu dans *quadratique_approx.m*. Que fait-il ? Expliquer votre réponse en faisant le lien avec l'exercice 1 et les algorithmes que vous avez vus en cours.
- (6) Utiliser la fonction *quadratique_approx* pour débruiter l'image obtenue à la question 2, pour des valeurs de $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 10$, $\lambda = 100$. Pour chacune de ces valeurs de λ , dire empiriquement combien d'itérations sont nécessaires à l'algorithme pour converger ? Expliquer ce résultat en faisant le lien avec l'exercice 1.
- (7) Copier *quadratique_approx.m* dans un fichier *quadratique_approx1.m* et le modifier pour pouvoir utiliser une stratégie de pas constant et suivant la règle de *Armijo*.
- (8) Comparer les différentes stratégies de calcul du pas, dans le cadre du débruitage des images obtenues à la question 2, et pour $\lambda = 0.1$ et $\lambda = 1$.

Exercice 3.

- (1) Copier le fichier *quadratique_approx1.m* dans un fichier *quadratique_approx2.m* puis modifier le programme contenu dans *quadratique_approx2.m* pour qu'il suive l'algorithme du gradient conjugué décrit dans l'Algorithme 1.

NB : Pour une fonctionnelle quadratique, l'algorithme du gradient conjugué est connu pour converger en au plus N^2 itérations.

Algorithme 1 Algorithme du gradient conjugué

Entrée: Les entrées nécessaires au calcul de E et de ∇E

Sortie: Une approximation d'un minimiseur de E : w_k

Initialisation de w_0

Initialisation de $d_0 = \nabla E(w_0)$

Initialisation de $w_1 = w_0 - \frac{\langle d_0, d_0 \rangle}{2\langle Bd_0, d_0 \rangle} d_0$

Tant que l'algorithme n'a pas convergé **faire**

Calculer $d_k = \nabla E(w_k) + \frac{\|\nabla E(w_k)\|^2}{\|\nabla E(w_{k-1})\|^2} d_{k-1}$

Calculer un pas $t_k = \frac{\langle \nabla E(w_k), d_k \rangle}{2\langle Bd_k, d_k \rangle}$ (le pas de la plus grande diminution dans la direction d_k)

Mettre à jour : $w_{k+1} \leftarrow w_k - t_k d_k$

Fin tant que

- (2) Utiliser cet algorithme pour débruiter l'image obtenue à la question 2, pour des valeurs de $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 10$, $\lambda = 100$. Pour chacune de ces valeurs de λ , combien d'itérations faut-il à l'algorithme pour converger ? Comparer ces résultats à ceux obtenus dans l'exercice précédent et commenter cette comparaison aux vues de ce que vous savez sur ces algorithmes.

Exercice 4.

- (1) Copier le fichier *quadratique_approx.c* dans un fichier *quadratique_approx2.c* puis modifier le programme contenu dans *quadratique_approx2.c* pour qu'il suive l'algorithme du gradient accéléré décrit dans l'Algorithme 2.

NB : L'algorithme du gradient accéléré est connu pour avoir une vitesse de convergence en $\frac{1}{k^2}$, où k est le numéro de l'itération.

- (2) Utiliser cet algorithme pour débruiter l'image obtenue à la question 2, pour des valeurs de $\lambda = 0.01$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 10$, $\lambda = 100$. Pour chacune de ces valeurs de λ , combien d'itérations faut-il à l'algorithme pour converger ? Comparer ces résultats à ceux obtenus dans les exercices précédents et commenter cette comparaison aux vues de ce que vous savez sur ces algorithmes.

Algorithme 2 Algorithme du gradient accéléré

Entrée: Les entrées nécessaires au calcul de L et de ∇E

Sortie: Une approximation d'un minimiseur de E : w_k

Calculer un pas $t = \frac{1}{L}$ (où L est la constante de Lipschitz du gradient)

Initialisation de v_0

Initialisation de $v_1 = w_0$

Tant que l'algorithme n'a pas convergé ($k = 1 \dots$) **faire**

 Calculer $w_k = v_k - t\nabla E(v_k)$

 Mettre à jour : $v_{k+1} = w_k - \frac{k-1}{k+2} (w_k - w_{k-1})$

Fin tant que
