

Géométrie 1

21 septembre 2014

ATTENTION : ces notes ne sont qu'un support qui résume les sujets traités dans le cours de géométrie L3 MEEF. Je les rédige au fur et à mesure que le cours avance et elles contiennent probablement plusieurs coquilles : j'invite les lecteurs à me les signaler. Pour des traités complets et à utiliser comme référence dans le futur je conseille :

1. Le Tome 4 du "Cours de Mathématiques" d'Arnaudiés et Fraysse ("Algèbre bilinéaire et géométrie") ;
2. Le livre de "Géométrie" de Michèle Audin.
3. Le livre de "Géométrie" de M. Berger.
4. Le livre de "Euclidean Geometry" de Robin Hartshorn (sa lecture peut être dure parfois pour le lecteur non-expert en arithmétique mais il s'agit d'un livre très enrichissant).
5. Le livre de "Introduction to Geometry" de H.S.M. Coxeter.

1 Introduction : Axiomes d'Euclide de Hilbert et un peu d'histoire

Le traité le plus connu de l'histoire des mathématiques est probablement les *Éléments* d'Euclide d'Alexandrie, datant du troisième siècle A.J. Dans ce traité Euclide réunit (et complète) toutes les connaissances acquises à son époque dans le domaine de la géométrie y incluant des résultats attribués à Pythagore et Eudossus.

L'importance de ce traité dans l'histoire de la pensée humaine ne peut pas être sous-estimée. Euclide s'efforce de définir des objets de base (points, droites, angles etc.) puis de donner un nombre minimal (cinq !) de Postulats (aujourd'hui nous les appelons plutôt Axiomes), en se basant sur lesquels toutes les vérités géométriques peuvent être déduites de façon rigoureuse et sans qu'aucun doute d'interprétation puisse intervenir. C'est la naissance du concept de preuve mathématique, qui marque un point fondamental dans notre histoire.

Les cinq postulats d'Euclide étaient censés définir et identifier de façon unique le plan (qu'aujourd'hui nous appelons plan euclidien) avec ses isométries, ses droites etc. Cependant déjà quelques siècles après Euclide (notamment avec Tolomée) on commence à critiquer le 5^{ème} postulat, qui semble beaucoup plus compliqué et "inutile" que les autres. En effet l'impression générale est que déjà les premiers quatre postulats devraient suffire à identifier de façon unique le plan tel que nous l'imaginons. Après des nombreux efforts et de fausses preuves qui déduisaient le 5^{ème} axiome des autres (et donc le rendaient un Théorème, donc une déduction) c'est seulement grâce à Gauss, et de façon indépendante Lobatchevski et Bolyai qu'on arriva à la compréhension que le 5^{ème} axiome est nécessaire pour bien préciser qu'on veut parler du plan dont nous avons l'intuition naturelle. Mais comment montrer cela ? La grande contribution de Gauss, Lobatchevski et Bolyai a été de montrer qu'en gardant les premières quatre axiomes mais en remplaçant le 5^{ème} par un autre axiome (incompatible avec l'intuition naturelle du plan euclidien) on pouvait obtenir encore une notion complètement cohérente (et très riche !) de plan, avec ses droites ses angles, ses isométries etc... Il s'agit du plan hyperbolique. C'est à ce moment que la géométrie moderne commença à découvrir des nouveaux espaces où des phénomènes nouveaux peuvent se passer. Ces espaces non euclidiens ont permis de comprendre la notion d'espace courbe et ont fourni à Einstein le langage nécessaire à formuler sa théorie de la relativité générale.

Mais quels sont donc les bases des éléments d'Euclide? Tout d'abord il se base sur une "définition" : j'utilise les guillemets parce qu'aujourd'hui nous ne serions pas du tout satisfaits par une telle définition. La voilà :

Définition 1.1. *Le point est ce dont la partie est nulle. Une ligne est une longueur sans largeur. Une ligne droite est celle qui est également placée entre ses points. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont pas placées dans la même direction. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux, chacun des angles égaux est droit. Un cercle est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placé dans cette figure étant égales entre elles*

Aujourd'hui nous dirions plutôt que le plan est un *ensemble* dont les *éléments* (ce sont les seuls mots que nous ne définissons pas!) sont appelés points et qui est muni d'une famille de sous-ensembles dits droites, dont les propriétés sont données par les axiomes (à suivre). Et cela ne donnerait pas encore la définition d'angle ou de cercle qui demanderait un peu plus de travail. Mais venons donc aux axiomes d'Euclide :

- Axiomes 1.2** (d'Euclide).
1. *Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.*
 2. *Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.*
 3. *Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.*
 4. *Tous les angles droits sont congruents.*
 5. *Si deux lignes sont sécantes avec une troisième de telle façon que la somme des angles intérieurs d'un côté est inférieure à deux angles droits, alors ces deux lignes sont forcément sécantes de ce côté.*

Congruent veut dire qu'ils peuvent être superposés par un mouvement rigide du plan ; mais attention : ici, tout comme Euclide, je glisse sur beaucoup de détails très très importants!

Maintenant essayons de comprendre quel est le problème qui a troublé les mathématiciens pendant des siècles : sauriez-vous imaginer un plan (avec ses droites etc.) qui satisfait tous les premiers quatre axiomes mais pas le cinquième? Si sa formulation originarie n'est pas parlante on peut le réformuler d'une façon équivalente par l'axiome dit de Playfair : donnée une droite et un point il existe au plus une droite parallèle à la droite par ce point. Alors sauriez-vous imaginer un plan qui satisfait 1,2,3,4 mais pas l'axiome de Playfair? C'est difficile... et encore pour les anciens la question n'était pas du tout posée ainsi. Pour eux il était clair que le cinquième axiome découlait des autres, il s'agissait plutôt de le démontrer. Comme nous avons dit ci-dessus un tel plan existe et il s'agit du plan hyperbolique, mais nous ne traiterons pas cet objet dans ces notes.

1.1 Les axiomes de Hilbert et le plan cartésien

Comme nous avons remarqué ci dessus, les définitions données par Euclide ne sont pas satisfaisantes et cela entraîne que quelque preuve parmi celles des livres des Éléments n'est pas complètement rigoureuse. Le premier exemple de cela est la Proposition I.1 (premier livre, première proposition), qui dit qu'on peut construire à la règle et compas un triangle équilatéral ayant comme base un segment donné.

Exercice 1. *Construire à la règle et compas un triangle équilatéral ayant comme base un segment donné. Quel est le problème dans la construction que vous venez de proposer?*

Surement quelque part dans votre construction vous avez considéré le point d'intersection d'un cercle avec une droite ou un cercle. Le problème est justement là : dans les axiomes rien ne vous assure qu'un tel point existe. Juste pour clarté supposez par exemple que l'objet qu'on veut appeler "plan" est l'ensemble $\mathbb{Q}^2$ (couples de nombres rationnels), que l'on visualise par les coordonnées x et y de façon standard, comme appris à l'école. Supposez aussi que les cercles et

les droites sont ceux que vous imaginez. Si le segment de départ est le segment d'extrémités $A = (0, 0)$ et $B = (0, 1)$ alors le troisième point cherché sera forcément $C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ (ou son symétrique par rapport à l'axe des x). Mais $\sqrt{3}/2 \notin \mathbb{Q}$ donc ce point n'est pas dans $\mathbb{Q}^2$: ce point n'existe pas dans le plan !

Voilà que donc il a fallu re-établir une liste d'axiomes qui identifie exactement le plan euclidien tel que nous l'imaginons, sans que des faits non-découlant des axiomes se glissent dans nos constructions et nos preuves. Ce travail a été accompli à la fin du XIX^{eme} siècle par le mathématicien allemand David Hilbert qui a fourni une liste complète d'axiomes. Je les reporte ci dessous seulement par souci de complétude mais ils ne sont pas du tout dans le programme de ce cours (pour une magnifique discussion de ces axiomes voir [?]) :

Axiomes 1.3 (de Hilbert). *Les premiers trois axiomes sont dits d'incidence :*

- I1 Par deux points distincts il passe une et une seule droite.
- I2 Chaque droite contient au moins deux points.
- I3 Il existe trois points non colinéaires.

Puis il y a 5 axiomes d'ordre : on postule (=on suppose) qu'il existe une relation sur les triplets de points (A, B, C) que nous appelons "B est entre A et C" et notons par $A * B * C$. On suppose que cette relation satisfait :

- O1 Si B est entre A et C alors il est aussi entre C et A.
- O2 Donnés deux points A et C distincts, il existe un point entre A et C.
- O3 Donnés trois points distincts sur une droite exactement l'un des trois est entre les deux autres.
- O4 (Axiome de Pasch) Soient A, B, C trois points non colinéaires et ℓ une droite qui ne contient aucun d'entre A, B et C mais qui contient un point D qui est entre A et B. Alors ℓ contient soit un point qui est entre B et C soit un point qui est entre C et A.

(Par la relation "être entre" l'on définit alors le segment $\overline{AB}$ comme l'ensemble des points qui sont entre A et B auquel l'on ajoute A et B. On peut prouver que forcément tout point divise une droite en deux sous ensembles dits "rayons", ou demi-droites et que toute droite coupe le plan en deux "demi-plans". En plus on peut définir la notion de cercle de rayon donné et centre donné.)

Puis il y a les axiomes de congruence : l'on postule l'existence d'une relation dite congruence entre les segments.

- C1 Donné un segment $\overline{AB}$ un point C et une demi-droite commençant en C il existe un et un seul point D sur la demi-droite tel que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
- C2 Si $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ et $\overline{CD} \cong \overline{EF}$ alors aussi $\overline{AB} \cong \overline{EF}$. En plus $\overline{AB} \cong \overline{AB}$.
- C3 Donnés trois points A, B, C sur une droite tels que B est entre A et C et trois points sur une autre droite D, E, F tels que E est entre D et F, si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ et $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ alors aussi $\overline{AC} \cong \overline{DF}$.

On définit aussi un angle comme la donnée de deux demi-droites sortant d'un même point et n'étant pas colinéaires. On postule qu'il existe une relation de congruence aussi pour les angles. Elle doit avoir les propriétés suivantes :

- C4 Donné un angle $\widehat{BAC}$ et une demi-droite $\vec{DE}$ partant de D il existe une seule demi-droite $\vec{DF}$ partant de D et qui est d'un coté donné de la demi-droite $\vec{DE}$ telle que l'angle $\widehat{EDF} \cong \widehat{BAC}$.
- C5 Pour chaque trois angles α, β, γ si $\alpha \cong \beta$ et $\beta \cong \gamma$ alors $\alpha \cong \gamma$.
- C6 Si deux triangles ABC et $A'B'C'$ ont $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ et $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ et $\widehat{BAC} \cong \widehat{B'A'C'}$ alors aussi $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, $\widehat{ABC} \cong \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BCA} \cong \widehat{B'C'A'}$.

Puis il ya l'axiome de Playfair :

- P Donnée une droite et un point il existe au plus une parallèle à la droite par ce point.

Le dernier axiome, est celui de continuité ou de Dedekind :

D Si une droite est divisée en deux sous-ensembles S et T tels que aucun point de S n'est entre deux points de T et réciproquement, alors il existe un et un seul point P dans la droite tel que pour tout $A \in S$ et pour tout $B \in T$ on a que P est entre A et B .

L'axiôme de Dedekind est à la base de la construction des nombres réels et il est donc très puissant. Il exclut par exemple que le plan puisse être $\mathbb{Q}^2$ comme dans l'exemple ci dessus, et il assure qu'une droite soit une copie de $\mathbb{R}$.

Mais une question que nous n'avons pas discuté est : existe-t'il un plan ayant toutes ces propriétés ? La réponse est bien entendu "oui", mais il faut expliciter un tel exemple. Notre plan est donc le plan cartésien : $\mathbb{R}^2$ où les droites sont les lieux de zéro des équations $ax + by + c$ (avec $a^2 + b^2 > 0$). Le segment d'extrémités $A = (a, b)$ et $B = (c, d)$ est l'ensemble $\overline{AB} = \{(ta + (1-t)c, tb + (1-t)d) | t \in [0, 1]\}$; sa longueur euclidienne est $\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$ et deux segments sont défini congruents ssi leur longueurs sont les mêmes (tout ça c'est des définitions !). De façon similaire on définit l'amplitude de l'angle aigu formé par deux droites de pentes m et m' par la valeur $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ telle que $\tan(\alpha) = |\frac{m-m'}{1+mm'}|$ (et encore il faudrait spécifier cette règle lorsque l'une des deux droites est parallèle à l'axe des y ...). Deux angles sont alors congruents s'ils ont la même amplitude. On peut vérifier que tous les axiômes de Hilbert sont satisfaits par ce "modèle". Donc il existe bien un plan euclidien ! Mais ce qui est beaucoup plus important est que ce plan est unique au sens suivant :

Théorème 1.4 (Hilbert). *Soit π un plan muni de droites, d'une relation sur les triplets de points "être entre" et d'une relation de congruence sur les segments et sur les angles. Si π satisfait tous les axiomes de Hilbert alors il existe une bijection $\phi : \pi \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que :*

1. *pour toute droite $\ell \subset \pi$ on a que $\phi(\ell) \subset \mathbb{R}^2$ est une droite et cette correspondance est une bijection entre les droites de π et celles de $\mathbb{R}^2$;*
2. *pour tout angle $\alpha \subset \pi$ on a que $\phi(\alpha) \subset \mathbb{R}^2$ est un angle et cette correspondance est une bijection entre les angles de π et ceux de $\mathbb{R}^2$;*
3. *pour tout $A, B, C \in \pi$, B est entre A et C ssi $\phi(B)$ est entre $\phi(A)$ et $\phi(C)$;*
4. *pour tout $A, B, C, D \in \pi$ on a $\overline{AB} \cong \overline{CD} \iff \overline{\phi(A)\phi(B)} \cong \overline{\phi(C)\phi(D)}$.*
5. *pour tout angles α, β en π on a $\alpha \cong \beta \iff \phi(\alpha) \cong \phi(\beta)$.*

Ce théorème nous assure que quelle que soit la façon dont vous imaginez votre plan, s'il satisfait les axiomes de Hilbert, alors il sera isométrique (peut être par une bijection ϕ compliquée !) au plan cartésien $\mathbb{R}^2$. C'est rassurant !

2 Rappels sur espaces vectoriels et produits scalaires

Ce chapitre est dédié aux rappels sur les espaces vectoriels. Un des concepts les plus importants de la théorie des espaces vectoriels est celui de "choix d'une base", qui correspond du point de vue physique au choix d'un système de coordonnées pour décrire l'espace ou l'espace-temps.

Définition 2.1 (Espace vectoriel). *Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou réel, ou encore $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) (ou on peut remplacer $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ en obtenant la définition d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$) est un ensemble V , dont les éléments sont appelés vecteurs, muni de deux lois :*

1. *une loi interne " $+$ " : $V \times V \rightarrow V$ appelée addition ou somme vectorielle,*
2. *une loi de composition externe à gauche " $\cdot$ " : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$, appelée multiplication par un scalaire,*

telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :

1. *(Existence de l'élément neutre) Il existe un élément spécial dit le vecteur $\vec{0}$ tel que $\forall v \in V, v + \vec{0} = \vec{0} + v = v$;*
2. *(Existence de l'opposé) Pour tout $\vec{v} \in V$ il existe un autre vecteur, noté $-\vec{v}$ tel que $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} = (-\vec{v}) + \vec{v}$;*
3. *(Associativité de la somme) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in V$ on a $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \vec{v}_3 = \vec{v}_1 + (\vec{v}_2 + \vec{v}_3)$;*
4. *(Commutativité de la somme) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ on a $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1$;*
5. *$\forall \vec{v} \in V$ on a $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ et $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.*
6. *(Distributivité du produit par scalaire) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ et $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ on a $\lambda \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \lambda \cdot \vec{v}_1 + \lambda \cdot \vec{v}_2$;*
7. *$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\forall \vec{v} \in V$ on a $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{v}) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot \vec{v} = \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \cdot \vec{v})$.*

Définition 2.2 (Sous espace vectoriel). *Si V est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, un sous ensemble $U \subset V$ est un sous espace vectoriel si les lois $\cdot : \mathbb{R} \times U \rightarrow V$ et $+$: $U \times U \rightarrow V$ ont leurs valeurs en U (et pas seulement en V) et avec ces lois U est un espace vectoriel.*

Définition 2.3 (Combinaison linéaire). *Donnés k vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ et k nombres réels $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. On appelle combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ à coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ le vecteur $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{v}_k$.*

On dit que $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sont linéairement dépendants si on peut trouver $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ non tous nuls tels que $\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{v}_k = \vec{0}$. Autrement les $\{\vec{v}_i\}$ sont dits indépendants ou libres.

Définition 2.4. *Une famille génératrice d'un espace vectoriel V est une famille $\{\vec{v}_i\}_{i \in I}$ telle que $\forall \vec{w} \in V$ il existe nombres réels (complexes si on travaille sur $\mathbb{C}$) $(\lambda_i)_{i \in I}$ dont au plus un nombre fini est non nul et tels que $\vec{w} = \sum \lambda_i \vec{v}_i$. Une base de V est une famille génératrice libre.*

Théorème 2.5 (Existence des bases). *Tout espace vectoriel admet une base. Si V admet une base contenant seulement un nombre fini, $n \in \mathbb{N}$ de vecteurs, on dit que V est de dimension finie n . Deux bases d'un même espace de dimension finie ont le même nombre de vecteurs.*

Remarque 2.6. *La propriété cruciale des bases par rapport aux familles génératrices est que les coefficients λ_i de la Définition 2.4 sont uniques pour tout $\vec{w}$ ssi le système $(v_i)_{i \in I}$ est une base. On appelle ces valeurs les coordonnées de $\vec{w}$ par rapport à la base $(\vec{v}_i)_{i \in I}$.*

Définition 2.7 (Droites et plans vectoriels). *Une droite vectorielle est un sous espace vectoriel de V de dimension 1. Un plan vectoriel est un sous-espace vectoriel de V de dimension 2.*

Proposition 2.8. *Si V est un espace vectoriel de dimension n et $U \subset V$ est engendré par $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ vecteurs qui sont linéairement indépendants alors $m \leq n$ et $m = n$ ssi $U = V$.*

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur n . Si $\dim_{\mathbb{R}} V = 1$ l'énoncé est trivial. Supposons d'avoir prouvé l'énoncé jusqu'à $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ et prouvons-le pour $\dim_{\mathbb{R}} V = n + 1$. Soit $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1}$ une base de V et soient $\vec{w}_i := \sum_{j=1}^{n+1} m_{j,i} \vec{v}_j$. Si $m_{n+1,i} = 0, \forall i$ alors U est contenu dans le sous-espace vectoriel de V de dimension n qui est engendré par $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$: on termine par récurrence. Si non, supposons que par exemple $m_{n+1,1} = 1$ (à moins de re-ordonner les indices et diviser $\vec{w}_1$ par son dernier coefficient nous pouvons supposer tout cela). Puis, remplaçons la base $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ par $\vec{w}_1, \vec{w}'_2, \dots, \vec{w}'_m$ où $\vec{w}'_i := \vec{w}_i - m_{n+1,i} \vec{w}_1$. Il est immédiat de vérifier que les vecteurs $\vec{w}'_i$ sont linéairement indépendants et forment une base du sous-espace vectoriel $U \cap \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. Par récurrence donc on a $m - 1 \leq n$ et $m - 1 = n$ ssi $U \cap \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = \text{span}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$. Mais alors $m \leq n + 1$ et $m = n + 1$ si et seulement si $U = \text{span}(\vec{w}_1, \vec{w}'_2, \dots, \vec{w}'_m) = \text{span}(\vec{w}_1, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) = V$. 2.8

Dorenavant nous supposons toujours que V est un espace vectoriel réel de dimension finie.

2.1 Applications linéaires, matrices et déterminants

Nous noterons dorenavant $\text{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices ayant m lignes et n colonnes et coefficients en $\mathbb{R}$. Nous rappelons que le produit d'une matrice M de taille $a \times b$ avec une autre matrice N de taille $c \times d$ est défini seulement si $b = c$ et dans ce cas l'entrée $(i, j)^{\text{eme}}$ du produit est définie par la formule :

$$(M \cdot N)_{i,j} := \sum_{k=1}^b M_{i,k} N_{k,j}.$$

Définition 2.9 (Applications linéaires ou homomorphismes). Soient V, W deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels. Une application $f : V \rightarrow W$ est linéaire si pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ on a

$$f(\lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{v}_2) = \lambda_1 \cdot f(\vec{v}_1) + \lambda_2 \cdot f(\vec{v}_2).$$

Son noyau est $\ker(f) := \{\vec{v} \in V \mid f(\vec{v}) = \vec{0}_W\}$. Son image est $\text{im}(f) = \{f(\vec{v}) \mid \vec{v} \in V\}$. On a que $\ker(f) \subset V$ et $\text{im}(f) \subset W$ sont deux sous espaces vectoriels.

Lemme 2.10. Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ bases respectivement de V et de W et soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors il existe une et une seule matrice de taille $(m \times n)$ (m lignes et n colonnes) telle que pour tout $\vec{v} \in V$, si $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$ alors $f(\vec{v}) = \sum_{j=1}^m \mu_j \vec{w}_j$ où les μ_j sont calculés par la formule :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1,n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Explicitement les coefficients $m_{i,j}$ sont ceux qui expriment $f(\vec{v}_i)$ dans la base $\vec{w}_j$: $f(\vec{v}_i) = \sum m_{j,i} \vec{w}_j$, c'est à dire les coefficients de $f(\vec{v}_i)$ apparaissent dans la i^{eme} colonne.

Démonstration. Existence. Soit $M = (m_{i,j})$ la matrice décrite dans l'énoncé. Alors si $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{v}_i$ par linéarité de f on a que $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sum_{j=1}^m m_{j,i} \vec{w}_j = \sum_{j=1}^m \vec{w}_j \sum_{i=1}^n m_{j,i} \lambda_i$, ce qui prouve l'existence de la matrice car le coefficient $\sum_{i=1}^n m_{j,i} \lambda_i$ est exactement le résultat de l'application de la matrice M au vecteur des coordonnées $\{\lambda_i\}$.

Unicité. Si il existait une autre matrice N représentant f dans les bases données, alors $M - N$ devrait représenter le morphisme 0. Mais il est simple de voir que si une matrice n'est pas la matrice nulle alors il existe un vecteur qui n'est pas envoyé en 0 par cette matrice. 2.10

Exemple 2.11 (Matrice de changement de base ou de passage). Si $Id : V \rightarrow V$ est l'application identique de V en V (c'est à dire $(Id(\vec{v}) = \vec{v} \forall \vec{v} \in V)$ elle est évidemment linéaire. Si alors $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ est une base de V et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ une autre base (elles ont la même taille !) alors on peut lui associer une et une seule matrice de taille $n \times n$ qui "exprime le changement de base de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ ". On appelle cette matrice la "matrice de changement de base de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ " ou "matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{w}_i\}$ ".

Plus explicitement, on a que, puisque $\{\vec{v}_i\}$ est une base, pour tout $\vec{w}_j$ il existe des coefficients $m_{i,j}$ tels que

$$\vec{w}_j = \sum_{i=1}^n m_{i,j} \vec{v}_i.$$

Alors la matrice $M = (m_{i,j})$ peut être utilisée pour re-exprimer le vecteur $\sum \lambda_i \vec{w}_i$ en fonction des vecteurs $\{\vec{v}_i\}$ comme $\sum \mu_i \vec{v}_i$ où les μ_i sont calculés par :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1,n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{m1} & m_{m2} & \dots & m_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{w}_i\}$ est donc M : elle est donc la matrice dont la i^{eme} colonne exprime le vecteur $\vec{w}_i$ dans la base $\{\vec{v}_j\}$. ATTENTION : La terminologie peut confondre ! En effet la matrice M s'appelle matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{w}_i\}$ mais en vérité elle vous permet de prendre les coordonnées d'un vecteur par rapport à la base $\{\vec{w}_i\}$ (les λ_i ci dessus) et de calculer les coordonnées du même vecteur par rapport à la base $\{\vec{v}_i\}$. Dit d'autre façon, la matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{w}_i\}$ exprime l'identité de V muni de la base $\{\vec{w}_i\}$ en V muni de la base $\{\vec{v}_i\}$.

Réciproquement on peut écrire aussi $\vec{w}_i = \sum_{j=1}^n c_{j,i} \vec{v}_j$ pour une certaine matrice C . Puisque si on change de base de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ et puis de $\{\vec{w}_i\}$ à $\{\vec{v}_i\}$ on a juste écrit l'application $Id : V \rightarrow V$ dans la base $\{\vec{w}_i\}$ au départ et à l'arrivée, on obtient que $C \cdot M = Id$ donc $C = M^{-1}$.

Définition 2.12 (Determinant d'une matrice). Soit M une matrice de taille $n \times n$. Son déterminant, noté $\det(M) \in \mathbb{R}$ est défini par récurrence, grace à la règle de Laplace :

1. si $n = 1$ alors M est un nombre et $\det(M) = M$;
2. Autrement on suppose avoir défini le déterminant de toute matrice carré de taille $< n$, on choisit $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et on définit $\det(M)$ par la formule suivante :

$$\det(M) = \sum_{j=1}^n (-1)^{(i+j)} M_{i,j} \cdot \det(\hat{M}_{i,j})$$

où $\hat{M}_{i,j}$ est la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue de M en éliminant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne.

Remarque 2.13. La valeur $\det(\hat{M}_{i,j})$ est parfois appelé le déterminant du mineur $(i, j)^{eme}$ de M et la valeur $(-1)^{i+j} \det(\hat{M}_{i,j})$ le cofacteur $(i, j)^{eme}$ de M .

Exemple 2.14.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M) = ad - bc.$$

Proposition 2.15 (Quelques propriétés du déterminant). Soit M une matrice de taille $n \times n$ à coefficients en $\mathbb{R}$. On a :

1. Si M' est obtenue de M en multipliant une colonne ou une ligne de M par une constante $c \in \mathbb{R}$ alors $\det(M') = c \det(M)$.

2. Si M' est obtenue de M en échangeant deux lignes ou deux colonnes alors $\det(M') = -\det(M)$.
3. Si M a deux lignes ou colonnes égales ou proportionnelles alors $\det(M) = 0$.
4. Si A et B sont matrices carrées de la même taille alors $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$.
5. La matrice M admet une inverse (i.e. il existe une matrice N telle que $N \cdot M = Id$) si et seulement si $\det(M) \neq 0$ et dans ce cas $N = M^{-1}$ est la matrice dont l'entrée $(i, j)^{eme}$ est :

$$(M^{-1})_{i,j} := (-1)^{i+j} \frac{\det(\hat{M}_{j,i})}{\det(M)}$$

ou, comme avant, $\hat{M}_{j,i}$ est la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue de M en éliminant la j^{eme} ligne et la i^{eme} colonne.

Exercice 2. Soient $\{\vec{v}_i\}$, $\{\vec{w}_i\}$ et $\{\vec{t}_i\}$ trois bases de V , M la matrice de passage de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ et N la matrice de passage de $\{\vec{w}_i\}$ à $\{\vec{t}_i\}$.

1. Montrer que $\det(M) \neq 0$ et $\det(N) \neq 0$.
2. Montrer que la matrice de passage de $\{\vec{w}_i\}$ à $\{\vec{v}_i\}$ est M^{-1} .
3. Montrer que la matrice de passage de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{t}_i\}$ est $M \cdot N$.

Théorème 2.16 (Relation entre inversibilité et déterminants). Soit $f : V \rightarrow V$ une application linéaire. Les suivantes affirmations sont équivalentes :

1. $\ker(f) = \{\vec{0}\}$;
2. $\text{Im}(f) = V$;
3. " f est inversible" c'est à dire qu'il existe une application linéaire $f^{-1} : V \rightarrow V$ telle que

$$f^{-1}(f(\vec{v})) = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V;$$

4. Il existe une base $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ de V dans laquelle la matrice M qui exprime f a déterminant non-nul.

En plus si $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n$ est une autre base de V et M est la matrice associée à f en la base $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n$ alors on a $\det(M) = \det(M')$.

Démonstration. Soit $\{\vec{v}_i, i = 1, \dots, n\}$ une base de V . Si $\ker(f) = \{\vec{0}\}$ alors les vecteurs $f(\vec{v}_i)$ sont une famille libre de vecteurs en V (car si $\sum_i \lambda_i f(\vec{v}_i) = \vec{0}$ alors $f(\sum \lambda_i \vec{v}_i) = \vec{0}$ et donc aussi $\sum \lambda_i \vec{v}_i = \vec{0}$ et $\lambda_i = 0 \forall i$) et donc une base parce que $\dim(V) = n$ (voir Proposition 2.8) ; cela implique que f est surjective et donc $\text{Im}(f) = V$. Réciproquement si $\text{Im}(f) = V$ alors les $f(\vec{v}_i)$ engendrent tout V et donc ils sont linéairement indépendants (car $\dim(V) = n$) et donc $\ker(f) = \vec{0}$. Ces deux impliquent que pour tout $\vec{w} \in V$ il existe un et un seul $\vec{v} \in V$ tel que $f(\vec{v}) = \vec{w}$. Posons alors $f^{-1} : V \rightarrow V$ l'application qui à tout $\vec{w}$ associe ce $\vec{v}$; f^{-1} est l'inverse de f . Il est simple de vérifier que f^{-1} est linéaire et que son inverse est encore f . Donc on a $f^{-1} \circ f(\vec{v}) = \vec{v}$; en traduisant cela en termes des matrices M et N qui représentent f et f^{-1} en la base $\vec{v}_i$ on a que $N \cdot M = Id$ et donc que $N = M^{-1}$. Puisque $\det(M \cdot N) = \det(Id) = 1 = \det M \det N$ on a que ces déterminants sont l'un l'inverse de l'autre (et donc non nuls). Pour terminer il suffit de remarquer que si $\det(M) \neq 0$ la formule donnée en Proposition 2.15 v) fournit la matrice représentant l'inverse de M . 2.16

Proposition 2.17 (Matrice inverse = matrice de l'inverse). Soit $f : V \rightarrow V$ une application linéaire, $\{\vec{v}_i\}$ une base de V et M la matrice qui exprime f en cette base. Si f est inversible, la matrice qui exprime f^{-1} en la base $\{\vec{v}_i\}$ est la matrice M^{-1} .

Définition 2.18 (Rang d'une matrice rectangulaire). Soit $M \in \text{Mat}(m \times n; \mathbb{R})$. Le $\text{rank}(M)$ est la dimension du sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les vecteurs formés par les colonnes de M . De façon équivalente est la taille de la plus grande sous-matrice carrée ayant déterminant non nul obtenue en éliminant de M des lignes et des colonnes.

2.2 Orientation d'un espace vectoriel

Soient $\{\vec{v}_i\}$ et $\{\vec{w}_i\}$ deux bases de V . On dit que le changement de base de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ est positif si la matrice passage de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ a déterminant positif. Par l'exercice précédent, on peut définir une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases sur V qui est $\{\vec{v}_i\} \sim \{\vec{w}_i\}$ ssi la matrice de passage de $\{\vec{v}_i\}$ à $\{\vec{w}_i\}$ est positive.

Exercice 3. Prouver que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases sur V (i.e. qu'elle est réflexive, symétrique et transitive).

Définition 2.19. Une orientation sur V est le choix d'une classe d'équivalence par rapport à la relation $\sim$, ou de façon équivalente une famille maximale de bases de V telles que les matrices de passage d'une base à n'importe quelle autre de la famille est positive.

Exercice 4. Prouver qu'il existe exactement deux orientations sur V .

2.3 Invariants d'endomorphismes

La proposition suivante (dont la preuve est très simple) nous dit comment change la matrice qui exprime un morphisme lorsque on change de bases. Bien que cette proposition soit simple elle est très importante.

Proposition 2.20. Soit $f : V \rightarrow W$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels réels de dimension n et m respectivement. Soient aussi $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ et $\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n$ deux bases de V et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m$ et $\vec{w}'_1, \dots, \vec{w}'_m$ deux bases de W . Soit M la matrice qui exprime f en les bases $\{\vec{v}_i\}$ de V et $\{\vec{w}_i\}$ de W et soient P la matrice de passage de la base $\{\vec{v}_i\}$ à la base $\{\vec{v}'_i\}$ et Q la matrice de passage de la base $\{\vec{w}_i\}$ à la base $\{\vec{w}'_i\}$. Alors la matrice qui exprime f dans les bases $\{\vec{v}'_i\}$ et $\{\vec{w}'_i\}$ est $M' := Q^{-1}MP$.

Démonstration. L'énoncé traduit le fait que nous obtenons la matrice M' comme la matrice qui exprime la composition de trois morphismes : l'identité de V exprimé de la base $\vec{v}'_i$ à la base $\vec{v}_i$ (qui correspond à la matrice P), f exprimé dans les bases $\vec{v}_i$ et $\vec{w}_i$ (qui correspond à la matrice M) et l'identité de W exprimée de la base $\vec{w}_i$ à la base $\vec{w}'_i$ (qui correspond à la matrice U^{-1}). 2.20

Corollaire 2.21. Si $\{\vec{v}_i\}$ et $\{\vec{v}'_i\}$ sont deux bases de V et $f : V \rightarrow V$ est un endomorphisme qui dans la base $\{\vec{v}_i\}$ est exprimé par la matrice $M \in \text{Mat}(n \times n)$ alors la matrice M' qui exprime f dans la base $\{\vec{v}'_i\}$ est $U^{-1}MU$. En particulier le déterminant d'un endomorphisme est bien défini (il ne dépend pas du choix d'une base pour associer une matrice à M).

Un invariant d'un endomorphisme linéaire f d'un espace vectoriel réel est toute quantité associée à f sans le choix d'une base. Dit autrement un invariant est toute quantité que l'on peut associer à une matrice et qui soit invariante par l'opération de conjugaison de la matrice par une toute matrice inversible. Nous venons de voir que le déterminant est un exemple d'invariant d'un endomorphisme. Ci de suite nous en rappelons d'autres.

Exercice 5. Soit $M = (m_{i,j}) \in \text{Mat}(n \times n)$ et définissons sa trace par $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$. Montrer que

$$\text{tr}(M \cdot N) = \text{tr}(N \cdot M), \forall M, N \in \text{Mat}(n \times n)$$

et en conclure que la trace d'un endomorphisme est un invariant bien défini.

L'invariant d'un endomorphisme f le plus important est son polynôme caractéristique :

Définition 2.22. Soit $f : V \rightarrow V$ et M une matrice qui exprime f dans une base de V . Alors le polynôme caractéristique de f est $P(t) := \det(M - tId)$.

Exercice 6. Prouver que $P(t)$ ne dépend pas du choix de la base utilisée pour associer la matrice M à f et il a degré $n = \dim(V)$. Montrer qu'on a

$$P(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(M) t^{n-1} + l.o.t$$

(l.o.t = "lowest order terms" = termes de degré inférieur en t) et que son terme constant est $\det(M)$. Montrer que tous les coefficients du polynôme caractéristique de f sont des invariants de f .

Définition 2.23 (Valeur propre d'un endomorphisme). Soit $f : V \rightarrow V$ une application linéaire. Une valeur propre de f est une valeur $\lambda \in \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) telle qu'il existe un vecteur $\vec{v} \in V$ dit vecteur propre tel que :

$$f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}.$$

Proposition 2.24. Soit $f : V \rightarrow V$ une application linéaire et $\dim(V) = n$ et soit M la matrice carrée associée à f en une base $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sont racines réelles distinctes du polynôme $P(\lambda) := \det(M - \lambda Id)$ alors il existe vecteurs propres $\vec{w}_i, 1 = 1, \dots, k$ de valeurs propres respectives $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Ces vecteurs sont linéairement indépendants. En particulier si $k = n$ les vecteurs $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ forment une base de V .

Démonstration. Puisque $\det(M - \lambda_i Id) = 0$ alors $\ker(M - \lambda_i Id) \neq \{\vec{0}\}$ et donc il contient un vecteur non-nul, appelons-le $\vec{w}_i$. Mais alors $\vec{w}_i$ est le vecteur propre cherché car $(M - \lambda_i Id) \vec{w}_i = \vec{0} \iff M \vec{w}_i = \lambda_i \vec{w}_i$. Pour montrer que ces vecteurs sont indépendants, soit $W_j = \prod_{i \neq j} (M - \lambda_i Id)$; la matrice W_j représente un endomorphisme dont le noyau contient tous les $\vec{w}_i, i \neq j$; mais $\vec{w}_j \notin \ker W_j$ car $M \vec{w}_j = \lambda_j \vec{w}_j$ et $W_j \vec{w}_j = \vec{w}_j \prod_{i \neq j} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$ parce que les λ_i sont distincts. Mais alors le sous-espace vectoriel engendré par les $\vec{w}_i, i \neq j$ ne contient pas $\vec{w}_j$ et cela est vrai pour tout j . Cela est une reformulation de l'indépendance. 2.24

Exercice 7. Si $f : V \rightarrow V$ et $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_n$ sont une base de V faite par vecteurs propres alors la matrice associée à f en cette base est diagonale et la i^{eme} entrée diagonale est λ_i (la valeur propre du vecteur $\vec{w}_i$).

Remarque 2.25. Nous n'allons pas utiliser la forme canonique de Jordan dans ce qui suit, mais ici le lecteur est invité à aller reviser ce sujet. Plus précisément, la Proposition 2.24 ne s'applique que si les zéros du polynôme caractéristique sont tous réels et distincts. Que peut-on dire si les zéros du polynôme caractéristique sont tous réels mais ils ont des multiplicités? Et s'ils ne sont pas tous réels? (Pour répondre à cette deuxième question vous pourrez passer de V à $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ l'espace vectoriel complexifié, c'est à dire l'espace vectoriel où l'on accepte aussi des coefficients complexes...) Et si on veut répondre sans utiliser les nombres complexes? (Avez-vous jamais entendu parler de la forme canonique rationnelle ou forme de Frobenius?)

2.4 Exercices sur bases et morphismes

Exercice 8 (Changements linéaires de base en $\mathbb{R}^2$). En $\mathbb{R}^2$ soient $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ les vecteurs de la base canonique. Soient aussi $\vec{v}_1 = (2, 1)$, $\vec{v}_2 = (2, 3)$ et $\vec{w}_1 = (1, -1)$, $\vec{w}_2 = (-1, 3)$.

1. Dire si $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ forment une base.
2. Écrire les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Que remarquez-vous sur la matrice de changement de base que vous obtenez?
3. Dire si $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ forment une base.
4. Écrire les vecteurs $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.
5. Écrire les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ dans la base $\vec{w}_1, \vec{w}_2$.
6. Observez les deux matrices de changement de base que vous avez obtenu : comment sont-elles liées?

Solution de l'exercice. 1). Soit M la matrice 2×2 dont la première colonne est $\vec{v}_1$ et la deuxième ligne est $\vec{v}_2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det(M) = 4 \neq 0$ les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ engendrent un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension 2 donc tout $\mathbb{R}^2$. Donc ils sont une base. La matrice M est exactement la matrice de changement de base de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ à $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ (voir Exemple 2.11).

2). Pour écrire $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ nous devons trouver constantes $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ telles que $\vec{e}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ et $\vec{e}_2 = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$. Donc, pour trouver λ_1, λ_2 on peut résoudre le système :

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 = 1\lambda_1 + 3\lambda_2. \end{cases}$$

On peut re-écrire la première équation sous forme matricielle comme :

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Finalement on trouve que :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}.$$

De façon similaire on trouve

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc on a que $\vec{e}_1 = \frac{3}{4} \vec{v}_1 - \frac{1}{4} \vec{v}_2$ et que $\vec{e}_2 = -\frac{1}{2} \vec{v}_1 + \frac{1}{2} \vec{v}_2$. La matrice de changement de base de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ à $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ est donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = M^{-1}.$$

3). Soit W la matrice dont la première colonne est $\vec{w}_1$ et la deuxième colonne est $\vec{w}_2$. Puisque $\det(W) \neq 0$ alors $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et W exprime le changement de base de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ à $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ (voir Exemple 2.11).

4). Pour écrire $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ en fonction de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ nous cherchons comme avant des coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tels que $\vec{w}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2$ et $\vec{w}_2 = \mu_1 \vec{v}_1 + \mu_2 \vec{v}_2$. En raisonnant comme avant on arrive à trouver :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-9}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}$$

et donc on a que $\vec{w}_1 = \frac{5}{4} \vec{v}_1 - \frac{3}{4} \vec{v}_2$ et $\vec{w}_2 = -\frac{9}{4} \vec{v}_1 + \frac{7}{4} \vec{v}_2$. La matrice de changement de base de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ à $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ est donc :

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-9}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot W.$$

5). Pour écrire $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ dans la base $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ nous pouvons directement calculer la matrice inverse de celle que nous venons de calculer c'est à dire $W^{-1} \cdot M$. Pour nous convaincre de cela, nous allons maintenant re-faire ces calculs et voir que le

résultat est bien $W^{-1}M$. On cherche coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tels que $\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{w}_1 + \lambda_2 \vec{w}_2$ et $v_2 = \mu_1 \vec{w}_1 + \mu_2 \vec{w}_2$. Donc pour la première équation on a le système :

$$\begin{cases} 2 = 1\lambda_1 - 1\lambda_2 \\ 1 = -1\mu_1 + 3\mu_2 \end{cases}$$

qu'on peut traduire par l'équation matricielle :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = W \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

On trouve alors :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = W^{-1} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

et donc $\vec{v}_1 = \frac{7}{2} \vec{w}_1 + \frac{3}{2} \vec{w}_2$. De façon similaire nous trouvons :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = W^{-1} \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

et donc $\vec{v}_2 = \frac{9}{2} \vec{w}_1 + \frac{5}{2} \vec{w}_2$. Finalement nous trouvons que la matrice de changement de base de $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ à $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ est :

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = W^{-1}M.$$

6). Comme on vient de remarquer la matrice de changement de base de $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ à $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ est $M^{-1}W$ et celle de changement de base de $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ à $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ est $W^{-1}M$. Ces matrices sont l'inverse l'une de l'autre. Comment comprendre cela ? Rappelons que la matrice de changement de base de $\{\vec{e}_i\}$ à $\{\vec{v}_i\}$ (donc M) nous permet d'écrire n'importe quel vecteur qui est exprimé comme combinaison linéaire des $\vec{v}_i$ en fonction des $\vec{e}_i$. Plus explicitement si on a $\vec{v} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$ (donc les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ sont (c_1, c_2)) alors les coordonnées (x, y) de $\vec{v}$ dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ sont calculées par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Réciproquement si on a les coordonnées de v dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et on veut retrouver ses coordonnées dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ on n'a qu'à multiplier le vecteur (x, y) par la matrice M^{-1} . Mais alors, si nous avons un vecteur $\vec{w} = k_1 \vec{w}_1 + k_2 \vec{w}_2$, ses coordonnées dans la base $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ sont (k_1, k_2) et si on veut trouver ses coordonnées dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ nous pouvons d'abord convertir ses coordonnées en la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ (ce qui revient à multiplier par la matrice W) et puis re-converter ce qu'on obtient en coordonnées par rapport à $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ (ce qui revient à multiplier encore par M^{-1}). Donc pour passer des coordonnées en la base $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ à celle en la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ nous multiplions par $M^{-1}W$.

Exercice 9. Soient $\vec{v}_1 = (2, 1), \vec{v}_2 = (2, 3)$ et $f : V \rightarrow V$ l'endomorphisme défini par $f(\vec{v}_1) = -11\vec{v}_1 + 16\vec{v}_2$ et $f(\vec{v}_2) = -8\vec{v}_1 + 25\vec{v}_2$. Écrire la matrice M qui exprime f dans la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Calculer $\det(M), \text{tr}(M)$ et dire si f est inversible. Écrire la matrice N qui exprime f dans la base $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ (on pourra utiliser les résultats de l'exercice précédent). Calculer $\det(N)$ et $\text{tr}(N)$.

Trouver les valeurs propres λ_1, λ_2 de f et les vecteurs propres $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ correspondants. Trouver la matrice de changement de base de la base $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ à la base $\vec{w}_1, \vec{w}_2$. Écrire la matrice F qui exprime f dans la base $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ et calculer $\det(F)$ et $\text{tr}(F)$.

Exercice 10. Soient $A, B \in \text{Mat}(n \times n)$ et supposons que $\vec{v}$ est l'unique vecteur propre de l'endomorphisme représenté par A de valeur propre λ . Prouver que si $AB = BA$ alors $B(\vec{v}) = \mu \vec{v}$ pour un certain $\mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit D une matrice de taille $n \times n$ diagonale aux entrées $m_{i,i}$ toutes distinctes. Prouver que les seules matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales (c'est à dire les matrices M telles que $MD = DM$).