

Volumes finis pour la résolution de problèmes elliptiques hétérogènes anisotropes sur maillages généraux

Franck BOYER

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
CNRS / Université Paul Cézanne

Ecole d'été du GDR CHANT
Roscoff, Août 2008

MoMaS

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE EN MILIEU POREUX

$\operatorname{div} v = 0$, conservation de la masse,

$v = -\varphi(x, \nabla p)$, loi constitutive.

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE EN MILIEU POREUX

$\operatorname{div} v = 0$, conservation de la masse,

$v = -\varphi(x, \nabla p)$, loi constitutive.

LOI DE DARCY

$$v = -K(x)\nabla p,$$

le tenseur $K(x)$ est la perméabilité.

ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE INCOMPRESSIBLE EN MILIEU POREUX

$\operatorname{div} v = 0$, conservation de la masse,

$v = -\varphi(x, \nabla p)$, loi constitutive.

RÉGIMES NONLINÉAIRES

Dans certains cas, on doit considérer des effets nonlinéaires :

- **Loi de Darcy-Forchheimer** : En cas de forts gradients de pression

$$-\nabla p = \frac{1}{k}v + \beta|v|v, \iff v = \frac{-2k\nabla p}{1 + \sqrt{1 + 4\beta k^2|\nabla p|}}.$$

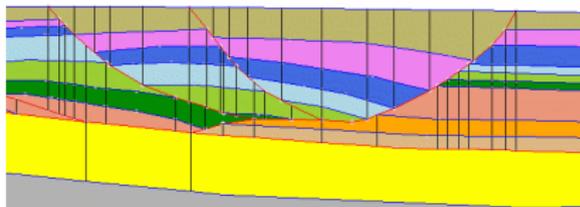
- **Loi de puissance** : Effets non-newtoniens

$$|v|^{n-1}v = -k\nabla p, \iff v = -|k\nabla p|^{\frac{1}{n}-1}(k\nabla p).$$

Dans tous les cas, la loi $\nabla p \mapsto v = -\varphi(x, \nabla p)$ est monotone

HÉTÉROGÉNÉITÉS, DISCONTINUITÉS, ANISOTROPIE

Exemple de structure souterraine



Chaque couleur représente un milieu poreux différent :

$$-\operatorname{div}(\varphi(x, \nabla p)) = f.$$

- $\varphi(x, \cdot)$ peut être linéaire pour certains matériaux.
- $\varphi(x, \cdot)$ peut être non linéaire pour d'autres.
- Certains matériaux sont très perméables, d'autres très imperméables.
- Fortes anisotropies dues à des directions privilégiées dans la structure des pores.

CONDITIONS DE TRANSMISSION

- La pression est continue aux interfaces.
- Le flux de masse $\varphi(x, \nabla p) \cdot \nu$ est continu aux interfaces.

ÉCOULEMENTS MULTIPHASIQUES EN MILIEU POREUX

- Couplage non-linéaire d'une équation de Darcy avec un problème hyperbolique.
- En pratique on résout successivement via un schéma en temps :
 - 1) Un problème de Darcy dont la perméabilité est une fonction de la saturation.

$$-\operatorname{div}(K(u)\nabla p) = f,$$

- 2) Un problème hyperbolique non linéaire qui fait intervenir la vitesse de Darcy $v = -K(u)\nabla p$ calculée précédemment.

$$\partial_t(\theta u) + \operatorname{div}(f(u)v) = 0.$$

- La première étape relève du problème étudié ici.
- On a besoin d'une bonne approximation des flux $(v \cdot \nu)$ dans la seconde étape.

ÉCOULEMENTS MULTIPHASIQUES EN MILIEU POREUX

- Couplage non-linéaire d'une équation de Darcy avec un problème hyperbolique.
- En pratique on résout successivement via un schéma en temps :
 - 1) Un problème de Darcy dont la perméabilité est une fonction de la saturation.

$$-\operatorname{div}(K(u)\nabla p) = f,$$

- 2) Un problème hyperbolique non linéaire qui fait intervenir la vitesse de Darcy $v = -K(u)\nabla p$ calculée précédemment.

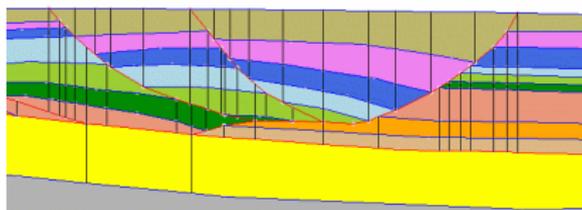
$$\partial_t(\theta u) + \operatorname{div}(f(u)v) = 0.$$

- La première étape relève du problème étudié ici.
- On a besoin d'une bonne approximation des flux $(v \cdot \nu)$ dans la seconde étape.

CONVECTION-DIFFUSION D'UN POLLUANT

$$\partial_t(\theta c) + \operatorname{div}(cv) - \operatorname{div}(D\nabla c) = 0,$$

où D est un tenseur de diffusion/dispersion et v la vitesse de Darcy.



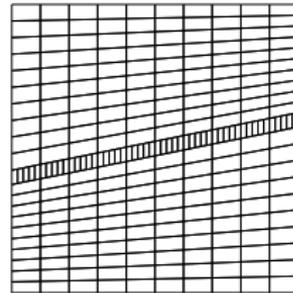
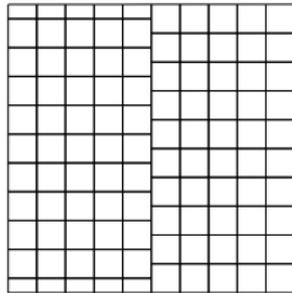
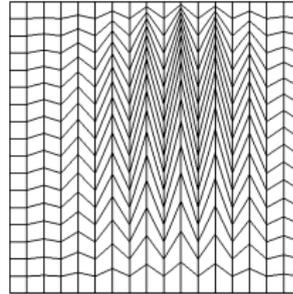
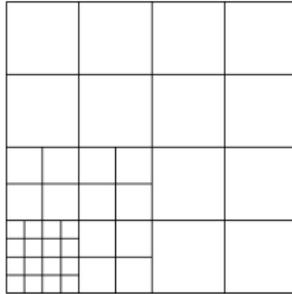
PROPRIÉTÉS ATTENDUES DES SCHÉMAS

- Conservation locale de la masse et consistance des flux.
- Préservation des propriétés qualitatives des EDP (monotonie, existence, unicité, etc ...).
- Préservation des bornes physiques de la solution.
- Bonne précision, même sur des maillages grossiers.
- Implémentation “facile” et coût de calcul “raisonnable”.

CONTRAINTES FAIBLES SUR LES MAILLAGES

- Maillages non conformes : grilles adaptées à la géométrie de l'écoulement.
- Raffinement local.
- Cellules très déformées.

EXEMPLES ACADÉMIQUES DE MAILLAGES



1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

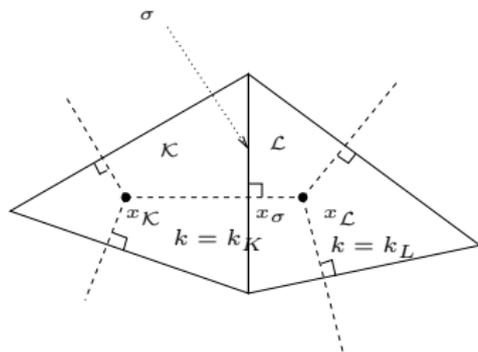
- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

On considère le problème suivant (+ C.L.)

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega$$

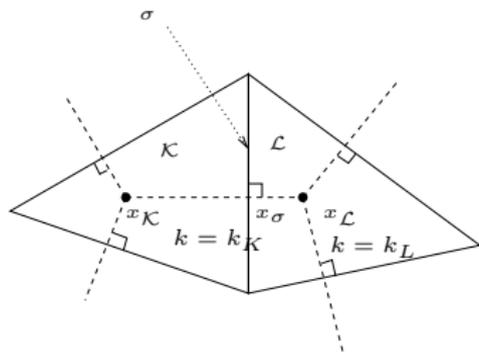
sur un maillage de triangles avec centres de cercles circonscrits.



On considère le problème suivant (+ C.L.)

$$-\Delta u = f, \quad \text{dans } \Omega$$

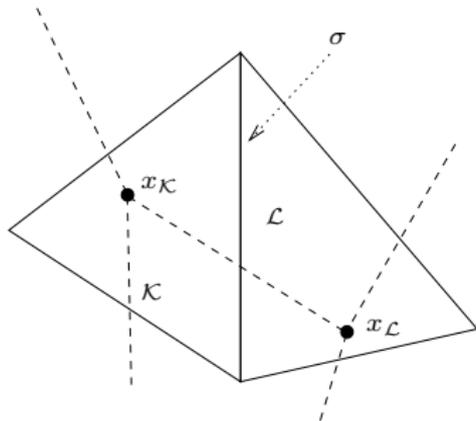
sur un maillage de triangles avec centres de cercles circonscrits.



$$\int_{\mathcal{K}} f = \int_{\mathcal{K}} -\Delta u = - \sum_{\sigma \subset \partial \mathcal{K}} \int_{\sigma} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \approx \sum_{\sigma \subset \partial \mathcal{K}} |\sigma| \underbrace{\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}}_{=F_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \rightsquigarrow \text{schéma VF4.}$$

CONSISTANCE : OUI car $[x_{\mathcal{K}} x_{\mathcal{L}}] \parallel \boldsymbol{\nu}$ i.e. $[x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}] \perp \sigma$.

SI ON PREND D'AUTRES CENTRES



$$\int_{\mathcal{K}} f = \int_{\mathcal{K}} -\Delta u = - \sum_{\sigma \subset \partial \mathcal{K}} \int_{\sigma} \nabla u \cdot \nu \stackrel{?}{\approx} \sum_{\sigma \subset \partial \mathcal{K}} |\sigma| \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}.$$

CONSISTANCE : **NON** car on n'a plus $[x_{\mathcal{K}}x_{\mathcal{L}}] \parallel \nu$.

On **ne peut pas** toujours utiliser les centres des cercles circonscrits :

- ❶ Ces points n'existent que pour certains maillages (triangles, Voronoï, ...).
- ❷ Problème avec les maillages non conformes.
- ❸ La condition géométrique de consistance (K -orthogonalité) n'est pas aussi claire pour des coefficients variables

$$-\operatorname{div}(K(x)\nabla p) = f.$$

**Il faut utiliser plus de 2 inconnues pour approcher les flux
 \approx approcher tout le gradient de la solution**

On **ne peut pas** toujours utiliser les centres des cercles circonscrits :

- ❶ Ces points n'existent que pour certains maillages (triangles, Voronoï, ...).
- ❷ Problème avec les maillages non conformes.
- ❸ La condition géométrique de consistance (K -orthogonalité) n'est pas aussi claire pour des coefficients variables

$$-\operatorname{div}(K(x)\nabla p) = f.$$

**Il faut utiliser plus de 2 inconnues pour approcher les flux
 \approx approcher tout le gradient de la solution**

- Schémas **cell-centered** : On utilise les inconnues sur les mailles voisines.
- Schémas **primal/dual** : On utilise de nouvelles inconnues aux sommets (maillage dual).
- Schémas **mimétiques/hybrides** : On utilise des inconnues aux arêtes.

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

LOI DE DARCY-FORCHHEIMER

On veut approcher la solution u de

$$-\operatorname{div} \left(\frac{\alpha \nabla u}{1 + \sqrt{1 + \beta |\nabla u|}} \right) = f.$$

Une méthode de volumes finis va nécessiter une approximation consistante des flux

$$\int_{\sigma} \frac{\alpha}{1 + \sqrt{1 + \beta |\nabla u|}} \nabla u \cdot \nu.$$

↪ **Ici aussi on doit approcher tout le gradient.**

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

CE DONT JE NE PARLERAI PAS AUJOURD'HUI

- La prise en compte des conditions aux limites.
- Les problèmes 3D.
- Les méthodes Discontinuous Galerkin.
- Beaucoup d'autres schémas (dont peut-être votre schéma favori)

Je ne présenterai pas le schéma idéal !

PROBLÈMES LINÉAIRES

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$$

- SCHÉMAS PUREMENT CELL-CENTERED

- MPFA

(Aavatsmark et al. '98 → '08)

(Edwards et al. '06, '08)

- Schémas diamant

(Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)

(Manzini et al ... '04 → '07)

PROBLÈMES LINÉAIRES

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$$

- SCHÉMAS PUREMENT CELL-CENTERED

- MPFA

(Aavatsmark et al. '98 → '08)

(Edwards et al. '06, '08)

- Schémas diamant

(Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)

(Manzini et al ... '04 → '07)

- SCHÉMAS VF MONOTONES NON-LINÉAIRES

- Schémas diamant non-linéaire

(Bertolazzo-Manzini '07)

- NMFV

(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

PROBLÈMES LINÉAIRES

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$$

• SCHÉMAS PUREMENT CELL-CENTERED

- MPFA

(Aavatsmark et al. '98 → '08)

(Edwards et al. '06, '08)

- Schémas diamant

(Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)

(Manzini et al ... '04 → '07)

• SCHÉMAS VF MONOTONES NON-LINÉAIRES

- Schémas diamant non-linéaire

(Bertolazzo-Manzini '07)

- NMFV

(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

• SCHÉMAS SUR MAILLAGES PRIMAL ET DUAL

- DDFV

(Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05)

(Pierre '06) (Andreianov-B.-Hubert '07)

- m-DDFV

(Hermeline '03) (B.-Hubert '08)

PROBLÈMES LINÉAIRES

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$$

• SCHÉMAS PUREMENT CELL-CENTERED

- MPFA (Aavatsmark et al. '98 → '08)
(Edwards et al. '06,'08)
- Schémas diamant (Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)
(Manzini et al ... '04 → '07)

• SCHÉMAS VF MONOTONES NON-LINÉAIRES

- Schémas diamant non-linéaire (Bertolazzo-Manzini '07)
- NMFV (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

• SCHÉMAS SUR MAILLAGES PRIMAL ET DUAL

- DDFV (Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05)
(Pierre '06) (Andreianov-B.-Hubert '07)
- m-DDFV (Hermeline '03) (B.-Hubert '08)

• SCHÉMAS MIXTES OU HYBRIDES

- Schémas mimétiques (Brezzi, Lipnikov et al '05 → '08)
(Manzini et al '07-'08)
- VF mixtes (Droniou-Eymard '06)
- SUSHI (version hybride) (Eymard-Gallouet-Herbin '08)

PROBLÈMES LINÉAIRES

$$-\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f$$

● SCHÉMAS PUREMENT CELL-CENTERED

- MPFA (Aavatsmark et al. '98 → '08)
(Edwards et al. '06,'08)
- Schémas diamant (Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)
(Manzini et al ... '04 → '07)

● SCHÉMAS VF MONOTONES NON-LINÉAIRES

- Schémas diamant non-linéaire (Bertolazzo-Manzini '07)
- NMFV (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

● SCHÉMAS SUR MAILLAGES PRIMAL ET DUAL

- DDFV (Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05)
(Pierre '06) (Andreianov-B.-Hubert '07)
- m-DDFV (Hermeline '03) (B.-Hubert '08)

● SCHÉMAS MIXTES OU HYBRIDES

- Schémas mimétiques (Brezzi, Lipnikov et al '05 → '08)
(Manzini et al '07-'08)
- VF mixtes (Droniou-Eymard '06)
- SUSHI (version hybride) (Eymard-Gallouet-Herbin '08)

PROBLÈMES NON-LINÉAIRES

$$-\operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u)) = f$$

- VF mixtes (Droniou '07)
- DDFV et m-DDFV (Andreianov-B.-Hubert '07), (B.-Hubert '08)

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

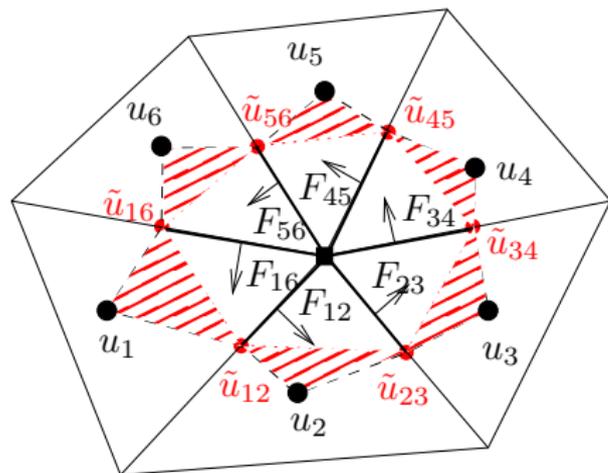
- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

SCHÉMA O



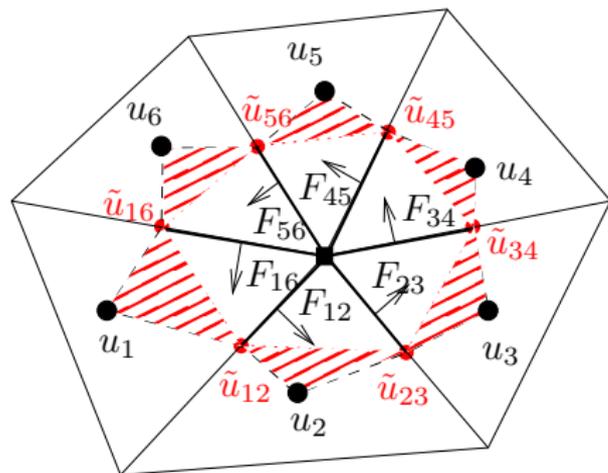
(Aavatsmark et al. '98 → '08)

- Inconnues intermédiaires : \tilde{u}_{ij}
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\begin{aligned} \nabla_i u &= \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|} (\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^\perp \\ &\quad + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|} (\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^\perp. \end{aligned}$$

SCHÉMA O

(Aavatsmark et al. '98 → '08)



- Inconnues intermédiaires : \tilde{u}_{ij}
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

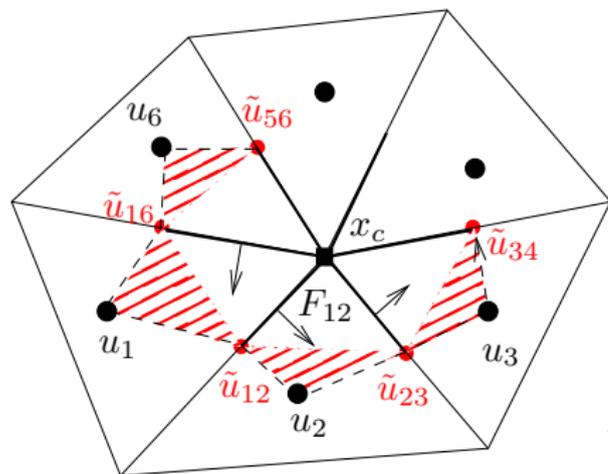
$$\nabla_i u = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|} (\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^\perp + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|} (\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^\perp.$$

- On écrit la continuité des flux

$$F_{i,i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{(A_i \nabla_i u) \cdot n_{i,i+1} = (A_{i+1} \nabla_{i+1} u) \cdot n_{i,i+1}}.$$

- Etant donnés les u_i , on calcule les $\tilde{u}_{i,i+1}$ puis les flux $F_{i,i+1}$.

SCHÉMA U : On veut calculer F_{12} (Aavatsmark et al. '98 → '08)

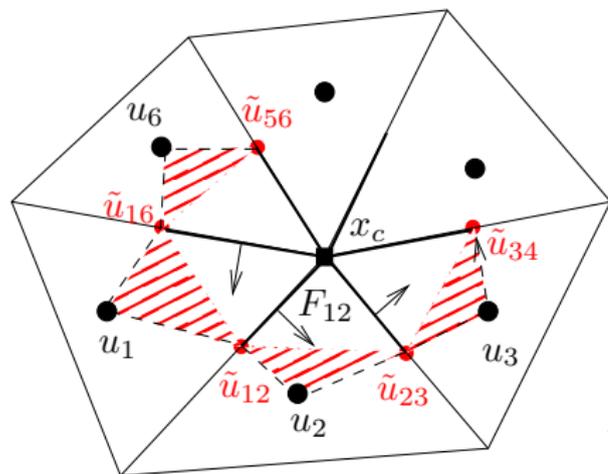


- Inconnues intermédiaires : \tilde{u}_{ij}
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|} (\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^\perp + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|} (\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^\perp.$$

↪ Fonction affine $U_i(x)$ sur chaque cellule.

SCHÉMA U : On veut calculer F_{12} (Aavatsmark et al. '98 → '08)



- Inconnues intermédiaires : \tilde{u}_{ij}
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|} (\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^\perp + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|} (\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^\perp.$$

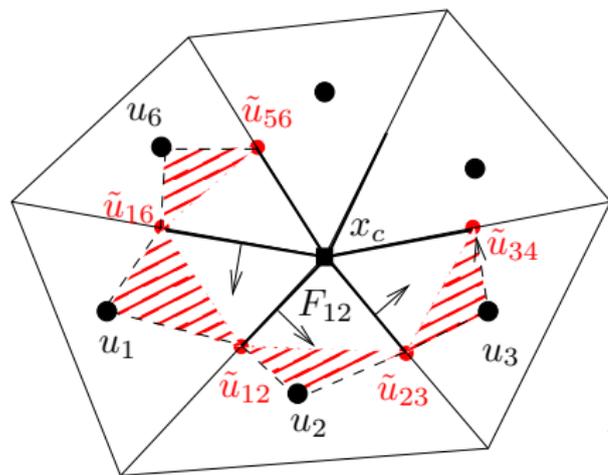
↪ Fonction affine $U_i(x)$ sur chaque cellule.

- On écrit la continuité des flux pour F_{12} , F_{23} et F_{61}

$$F_{i,i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{(A_i \nabla_i u) \cdot n_{i,i+1} = (A_{i+1} \nabla_{i+1} u) \cdot n_{i,i+1}}, \quad i \in \{1, 2, 6\}$$

- Il manque deux équations.

SCHÉMA U : On veut calculer F_{12} (Aavatsmark et al. '98 → '08)



- Inconnues intermédiaires : \tilde{u}_{ij}
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|} (\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^\perp + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|} (\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^\perp.$$

↪ Fonction affine $U_i(x)$ sur chaque cellule.

- On écrit la continuité des flux pour F_{12} , F_{23} et F_{61}

$$F_{i,i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{(A_i \nabla_i u) \cdot n_{i,i+1} = (A_{i+1} \nabla_{i+1} u) \cdot n_{i,i+1}}, \quad i \in \{1, 2, 6\}$$

- Il manque deux équations. On écrit :

$$U_2(x_c) = U_3(x_c), \quad \text{et} \quad U_1(x_c) = U_6(x_c).$$

- Etant donnés les u_i , on calcule les $\tilde{u}_{i,i+1}$ puis le flux F_{12} .

PROPRIÉTÉS

- En général :
 - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
 - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans (Le Potier, '05).

PROPRIÉTÉS

- En général :
 - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
 - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans (Le Potier, '05).
- Stencil :
 - La méthode O engendre un stencil trop grand.
 - Pour la méthode U sur des triangles conformes : un flux dépend de 6 inconnues.
 - En général, l'équation sur un volume de contrôle κ dépend des voisins de κ et des voisins des voisins de κ .

PROPRIÉTÉS

- En général :
 - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
 - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans (Le Potier, '05).
- Stencil :
 - La méthode O engendre un stencil trop grand.
 - Pour la méthode U sur des triangles conformes : un flux dépend de 6 inconnues.
 - En général, l'équation sur un volume de contrôle κ dépend des voisins de κ et des voisins des voisins de κ .
- Pas de gradient discret complet naturellement à disposition.

PROPRIÉTÉS

- En général :
 - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
 - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans (Le Potier, '05).
- Stencil :
 - La méthode O engendre un stencil trop grand.
 - Pour la méthode U sur des triangles conformes : un flux dépend de 6 inconnues.
 - En général, l'équation sur un volume de contrôle κ dépend des voisins de κ et des voisins des voisins de κ .
- Pas de gradient discret complet naturellement à disposition.
- Pas de principe du maximum pour les méthodes de base.
Variantes pour assurer la monotonie dans certains cas.
- Convergence dans le cas général sous une hypothèse géométrique de coercivité (Agelas-Masson, '08)

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- **Schémas diamants**
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

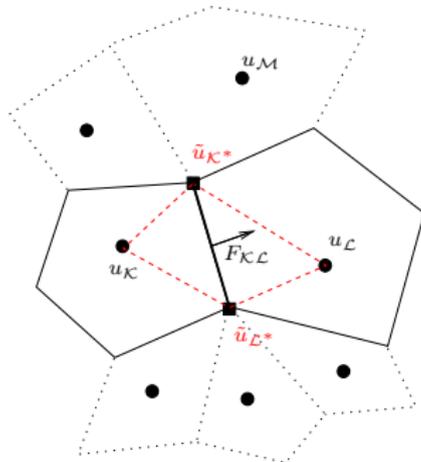
3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.

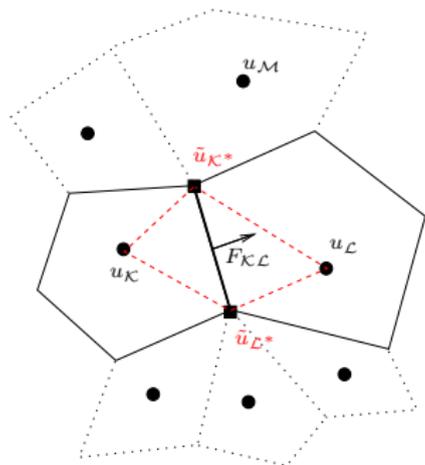


(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.
- Gradient discret sur la cellule diamant \mathcal{D} :

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^T u \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^T u \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$$

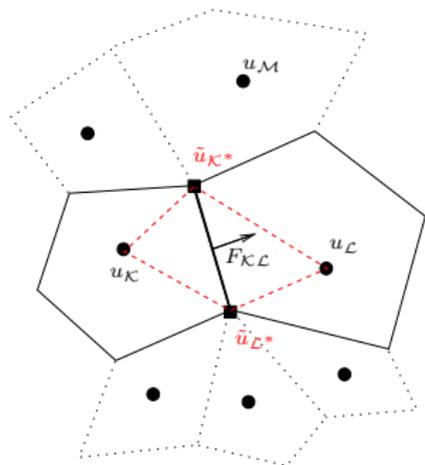


(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.
- Gradient discret sur la cellule diamant \mathcal{D} :

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^T u \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^T u \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$$



- $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont **calculés** par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{\geq 0} u_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M}\mathcal{L}^*} u_{\mathcal{M}},$$

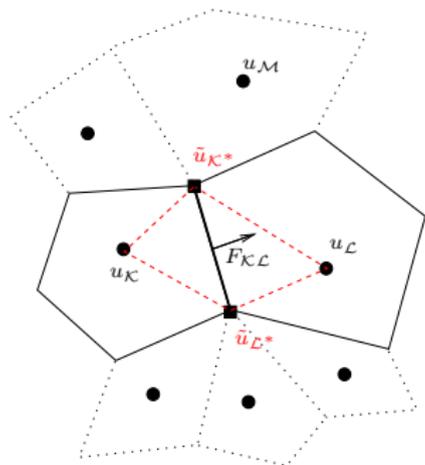
$$\text{avec } \sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} = 1, \quad \sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{M}} = x_{\mathcal{K}^*}.$$

(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.
- Gradient discret sur la cellule diamant \mathcal{D} :

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^T u \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^T u \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$$



- $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont **calculés** par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{\geq 0} u_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M}\mathcal{L}^*} u_{\mathcal{M}},$$

$$\text{avec } \sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} = 1, \quad \sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{M}} = x_{\mathcal{K}^*}.$$

- Le flux s'écrit alors

$$F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = -|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}}^T u \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

PROPRIÉTÉS

- Les poids $\gamma_{\mathcal{M},\kappa^*}$ sont calculés par moindres carrés.
- La consistance du schéma au sens des volumes finis est assurée.

PROPRIÉTÉS

- Les poids $\gamma_{\mathcal{M},\kappa^*}$ sont calculés par moindres carrés.
- La consistance du schéma au sens des volumes finis est assurée.
- La coercivité/stabilité **n'est pas assurée** sauf pour des maillages “proches” de maillages rectangles.
- Si on a coercivité, alors on a les estimations d'erreur en $O(h)$ pour u et ∇u en norme L^2 .

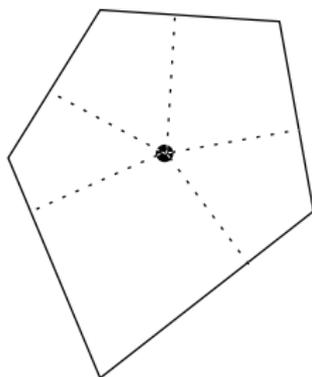
PROPRIÉTÉS

- Les poids $\gamma_{\mathcal{M},\kappa^*}$ sont calculés par moindres carrés.
- La consistance du schéma au sens des volumes finis est assurée.
- La coercivité/stabilité **n'est pas assurée** sauf pour des maillages “proches” de maillages rectangles.
- Si on a coercivité, alors on a les estimations d'erreur en $O(h)$ pour u et ∇u en norme L^2 .
- Le schéma peut s'écrire sur des maillages généraux mais n'est analysé que pour des simplexes (2D/3D) et des quadrangles en 2D.
- En général, le schéma **n'est pas symétrique**.

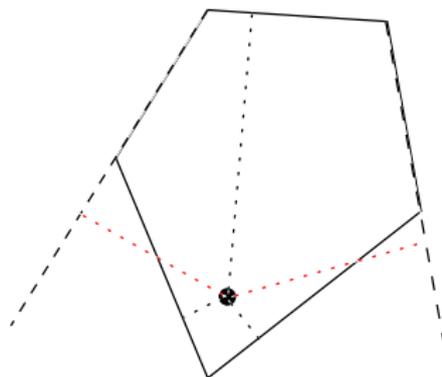
(Manzini et al ... '04 → '07)

- On suppose que les centres se projettent orthogonalement sur les arêtes.

OK

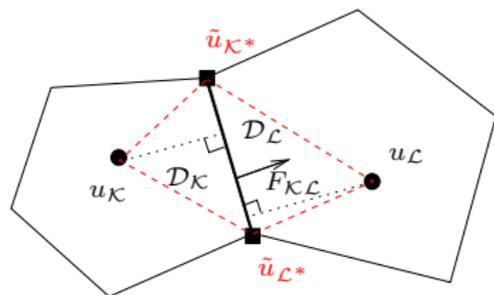


pas OK



- Les auteurs donnent une formule “explicite” qui convient pour les poids $\gamma_{\mathcal{M},\kappa^*}$.

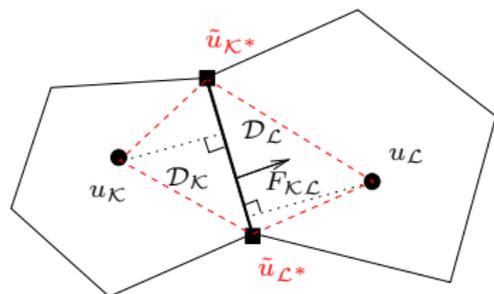
(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant \mathcal{D}_K et \mathcal{D}_L à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_K} u, \quad \nabla_{\mathcal{D}_L} u.$$

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant \mathcal{D}_K et \mathcal{D}_L à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_K} u, \quad \nabla_{\mathcal{D}_L} u.$$

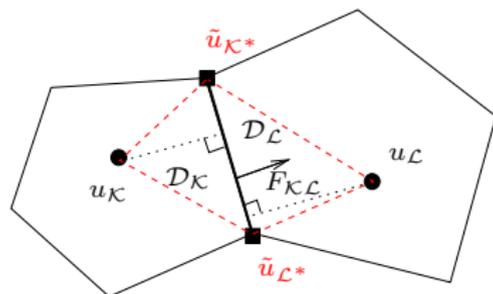
- On regarde alors les deux flux correspondant

$$-|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}_K} u \cdot \nu_{KL} = \underbrace{\alpha_K^\kappa}_{>0} (u_K - u_L) + \sum_{M \neq K} \underbrace{\alpha_M^\kappa}_{\geq 0} (u_K - u_M),$$

$$-|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}_L} u \cdot \nu_{KL} = \underbrace{\alpha_L^\ell}_{>0} (u_K - u_L) + \sum_{M \neq L} \underbrace{\alpha_M^\ell}_{\geq 0} (u_M - u_L).$$

On pose $\alpha = \min(\alpha_K^\kappa, \alpha_L^\ell) > 0$.

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant \mathcal{D}_K et \mathcal{D}_L à partir de trois valeurs :

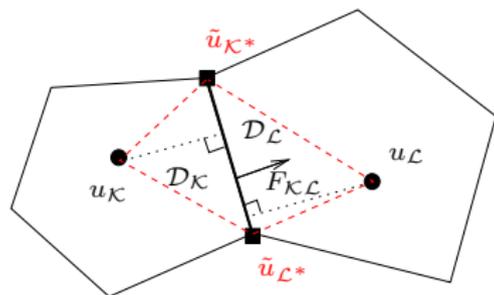
$$\nabla_{\mathcal{D}_K} u, \quad \nabla_{\mathcal{D}_L} u.$$

- On regarde alors les deux flux correspondant

$$-|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}_K} u \cdot \nu_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_K - u_L) + \underbrace{\sum_{\mathcal{M}} \underbrace{(\alpha_{\mathcal{M}}^{\mathcal{K}} - \alpha \delta_{\mathcal{M}\mathcal{L}})}_{\geq 0}}_{\stackrel{\text{def}}{=} g_{\mathcal{K}}(u)} (u_K - u_{\mathcal{M}}),$$

$$-|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}_L} u \cdot \nu_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_K - u_L) + \underbrace{\sum_{\mathcal{M}} \underbrace{(\alpha_{\mathcal{M}}^{\mathcal{L}} - \alpha \delta_{\mathcal{M}\mathcal{K}})}_{\geq 0}}_{\stackrel{\text{def}}{=} g_{\mathcal{L}}(u)} (u_{\mathcal{M}} - u_L).$$

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant \mathcal{D}_K et \mathcal{D}_L à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_K} u, \quad \nabla_{\mathcal{D}_L} u.$$

$$-|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}_K} u \cdot \nu_{KL} = \alpha(u_K - u_L) + g_K(u),$$

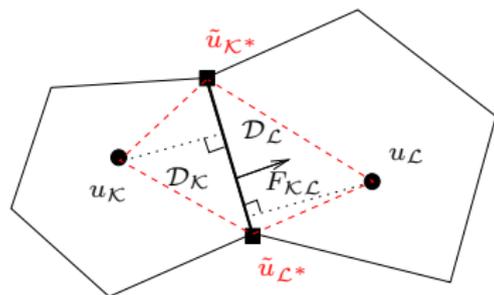
$$-|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}_L} u \cdot \nu_{KL} = \alpha(u_K - u_L) + g_L(u).$$

- On pose $\omega_D(u) = \frac{|g_L(u)|}{|g_K(u)| + |g_L(u)|}$ et on va prendre comme gradient

$$\nabla_D u = \omega_D(u) \nabla_{\mathcal{D}_K} u + (1 - \omega_D(u)) \nabla_{\mathcal{D}_L} u.$$

$$\Rightarrow F_{KL} \stackrel{\text{def}}{=} -|\sigma| \nabla_D u \cdot \nu_{KL} = \alpha(u_K - u_L) + \underbrace{\frac{g_K(u)|g_L(u)| + g_L(u)|g_K(u)|}{|g_K(u)| + |g_L(u)|}}_{=T}.$$

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant \mathcal{D}_K et \mathcal{D}_L à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_K} u, \quad \nabla_{\mathcal{D}_L} u.$$

$$F_{K,L} = -|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}} u \cdot \nu_{K,L} = \alpha(u_K - u_L) + \underbrace{\frac{g_K(u)|g_L(u)| + g_L(u)|g_K(u)|}{|g_K(u)| + |g_L(u)|}}_{=T}.$$

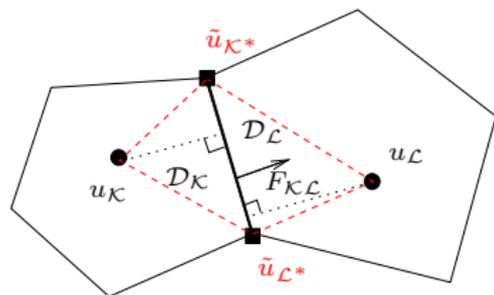
- Si $g_K(u)g_L(u) < 0$:

$$T = 0.$$

- Si $g_K(u)g_L(u) > 0$:

$$T = \frac{2g_K(u)g_L(u)}{g_K(u) + g_L(u)} \Rightarrow \begin{cases} T \text{ est un multiple } \mathbf{positif} \text{ de } g_K(u) \\ T \text{ est un multiple } \mathbf{positif} \text{ de } g_L(u) \end{cases}$$

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant \mathcal{D}_K et \mathcal{D}_L à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_K} u, \quad \nabla_{\mathcal{D}_L} u.$$

$$F_{K,L} = -|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}} u \cdot \nu_{K,L} = \alpha(u_K - u_L) + \underbrace{\frac{g_K(u)|g_L(u)| + g_L(u)|g_K(u)|}{|g_K(u)| + |g_L(u)|}}_{=\mathbf{T}}.$$

$$F_{K,L} = \alpha(u_K - u_L) + \underbrace{C_K}_{\geq 0} \sum_{\mathcal{M}} (\alpha_{\mathcal{M}}^K - \alpha \delta_{\mathcal{M},L})(u_K - u_{\mathcal{M}}),$$

$$F_{K,L} = \alpha(u_K - u_L) + \underbrace{C_L}_{\geq 0} \sum_{\mathcal{M}} (\alpha_{\mathcal{M}}^L - \alpha \delta_{\mathcal{M},K})(u_{\mathcal{M}} - u_L).$$

(Manzini et al ... '04 → '07)

PROPRIÉTÉS

- Consistance OK.
- Existence d'au moins une solution du schéma non-linéaire (bien que non régulier!).
- Quasi-unicité : toutes les solutions sont dans des boules de rayon $O(h^2)$.
- Résolution par un solveur itératif qui nécessite l'inversion d'une unique matrice (non SDP).

(Manzini et al ... '04 → '07)

PROPRIÉTÉS

- Consistance OK.
- Existence d'au moins une solution du schéma non-linéaire (bien que non régulier!).
- Quasi-unicité : toutes les solutions sont dans des boules de rayon $O(h^2)$.
- Résolution par un solveur itératif qui nécessite l'inversion d'une unique matrice (non SDP).

- Cette solution vérifie le principe du maximum discret.
- On a pas le principe du max à chaque itération du solveur.

(Manzini et al ... '04 → '07)

PROPRIÉTÉS

- Consistance OK.
- Existence d'au moins une solution du schéma non-linéaire (bien que non régulier!).
- Quasi-unicité : toutes les solutions sont dans des boules de rayon $O(h^2)$.
- Résolution par un solveur itératif qui nécessite l'inversion d'une unique matrice (non SDP).

- Cette solution vérifie le principe du maximum discret.
- On a pas le principe du max à chaque itération du solveur.

- Pas d'analyse de convergence *a priori*.
- Numériquement on obtient de l'ordre 2 en norme L^2 .
- Possibilité de rajouter un terme d'advection avec une technique de type "limiteur de pente".

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

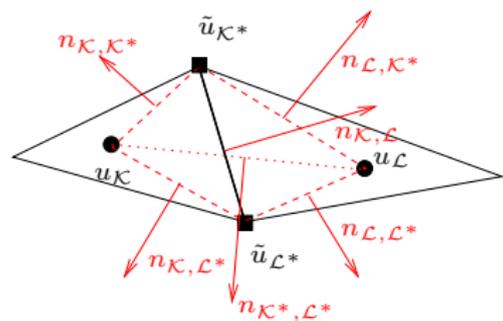
- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)



- Maillage de triangles.
- Les centres x_K et x_L seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets \tilde{u}_{K^*} et \tilde{u}_{L^*} sont donnés par

$$\tilde{u}_{K^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}K^*}}_{0 \leq \cdot \leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- Propriétés géométriques de base :

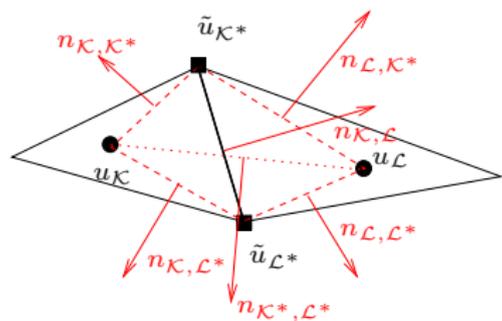
$$n_{K,K^*} + n_{L,K^*} + n_{K^*,L^*} = 0,$$

$$n_{K,L^*} + n_{L,L^*} - n_{K^*,L^*} = 0,$$

$$n_{K,K^*} + n_{K,L^*} + n_{K,L} = 0,$$

$$n_{L,K^*} + n_{L,L^*} - n_{K,L} = 0,$$

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)



- Maillage de triangles.
- Les centres x_K et x_L seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets \tilde{u}_{K^*} et \tilde{u}_{L^*} sont donnés par

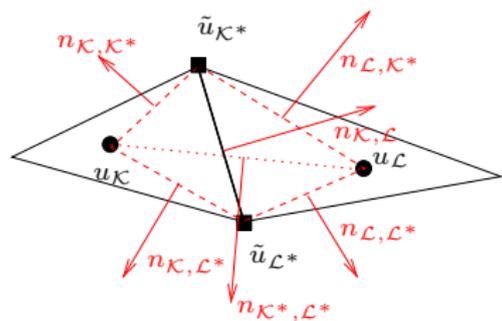
$$\tilde{u}_{K^*} = \sum_M \underbrace{\gamma_{MK^*}}_{0 \leq \cdot \leq 1} u_M.$$

- On définit deux gradients discrets

$$\nabla_{K^*} u = \frac{1}{C_{K^*}} \left(-u_L n_{K,K^*} - u_K n_{L,K^*} + \tilde{u}_{K^*} (n_{K,K^*} + n_{L,K^*}) \right),$$

$$\nabla_{L^*} u = \frac{1}{C_{L^*}} \left(-u_L n_{K,L^*} - u_K n_{L,L^*} + \tilde{u}_{L^*} (n_{K,L^*} + n_{L,L^*}) \right).$$

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)



- Maillage de triangles.
- Les centres x_K et x_L seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets \tilde{u}_{K^*} et \tilde{u}_{L^*} sont donnés par

$$\tilde{u}_{K^*} = \sum_M \underbrace{\gamma_{MK^*}}_{0 \leq \cdot \leq 1} u_M.$$

- On définit deux gradients discrets

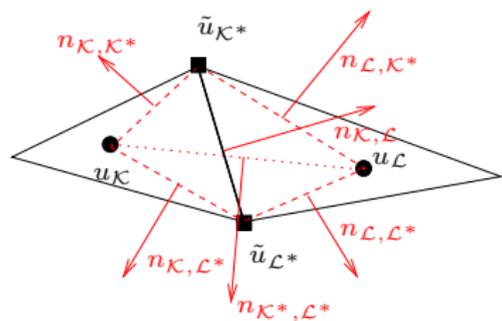
$$\nabla_{K^*} u = \frac{1}{C_{K^*}} \left(-u_L n_{K,K^*} - u_K n_{L,K^*} + \boxed{\tilde{u}_{K^*} (n_{K,K^*} + n_{L,K^*})} \right),$$

$$\nabla_{L^*} u = \frac{1}{C_{L^*}} \left(-u_L n_{K,L^*} - u_K n_{L,L^*} + \boxed{\tilde{u}_{L^*} (n_{K,L^*} + n_{L,L^*})} \right).$$

- On pose $F_{K,L} = -\mu |\sigma| (A \nabla_{K^*} u) \cdot n_{K,L} - (1-\mu) |\sigma| (A \nabla_{L^*} u) \cdot n_{K,L}$.
On cherche **la forme** d'un flux à deux points :

$$\frac{\mu \tilde{u}_{K^*}}{C_{K^*}} A (n_{K,K^*} + n_{L,K^*}) \cdot n_{K,L} + \frac{(1-\mu) \tilde{u}_{L^*}}{C_{L^*}} A (n_{K,L^*} + n_{L,L^*}) \cdot n_{K,L} = 0.$$

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)



- Maillage de triangles.
- Les centres x_K et x_L seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets \tilde{u}_{K^*} et \tilde{u}_{L^*} sont donnés par

$$\tilde{u}_{K^*} = \sum_M \underbrace{\gamma_{MK^*}}_{0 \leq \cdot \leq 1} u_M.$$

- On définit deux gradients discrets

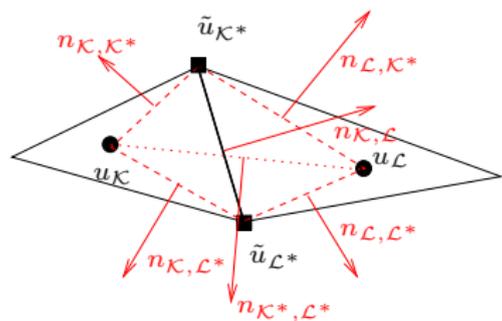
$$\nabla_{K^*} u = \frac{1}{C_{K^*}} \left(-u_L n_{K,K^*} - u_K n_{L,K^*} + \boxed{\tilde{u}_{K^*} (n_{K,K^*} + n_{L,K^*})} \right),$$

$$\nabla_{L^*} u = \frac{1}{C_{L^*}} \left(-u_L n_{K,L^*} - u_K n_{L,L^*} + \boxed{\tilde{u}_{L^*} (n_{K,L^*} + n_{L,L^*})} \right).$$

- On pose $F_{K,L} = -\mu |\sigma| (A \nabla_{K^*} u) \cdot n_{K,L} - (1-\mu) |\sigma| (A \nabla_{L^*} u) \cdot n_{K,L}$.
On cherche **la forme** d'un flux à deux points :

$$\left(\frac{\mu \tilde{u}_{K^*}}{C_{K^*}} - \frac{(1-\mu) \tilde{u}_{L^*}}{C_{L^*}} \right) = 0.$$

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)



- Maillage de triangles.
- Les centres x_K et x_L seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets \tilde{u}_{K^*} et \tilde{u}_{L^*} sont donnés par

$$\tilde{u}_{K^*} = \sum_M \underbrace{\gamma_{MK^*}}_{0 \leq \cdot \leq 1} u_M.$$

- On définit deux gradients discrets

$$\nabla_{K^*} u = \frac{1}{C_{K^*}} \left(-u_L n_{K,K^*} - u_K n_{L,K^*} + \boxed{\tilde{u}_{K^*} (n_{K,K^*} + n_{L,K^*})} \right),$$

$$\nabla_{L^*} u = \frac{1}{C_{L^*}} \left(-u_L n_{K,L^*} - u_K n_{L,L^*} + \boxed{\tilde{u}_{L^*} (n_{K,L^*} + n_{L,L^*})} \right).$$

- On pose $F_{K,L} = -\mu |\sigma| (A \nabla_{K^*} u) \cdot n_{K,L} - (1-\mu) |\sigma| (A \nabla_{L^*} u) \cdot n_{K,L}$.
On cherche **la forme** d'un flux à deux points :

$$\mu(u) = \frac{\tilde{u}_{L^*} / C_{L^*}}{\tilde{u}_{K^*} / C_{K^*} + \tilde{u}_{L^*} / C_{L^*}}.$$

BILAN :

(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u)|\sigma| u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u)|\sigma| u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u) = \frac{\mu(u)}{C_{\mathcal{K}^*}}(An_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \frac{1 - \mu(u)}{C_{\mathcal{L}^*}}(An_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}},$$

$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u) = -\frac{\mu(u)}{C_{\mathcal{K}^*}}(An_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} - \frac{1 - \mu(u)}{C_{\mathcal{L}^*}}(An_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}},$$

BILAN :

(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u)|\sigma| u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u)|\sigma| u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u) = \frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(An_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(An_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u) = -\frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(An_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(An_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

BILAN :

(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u)|\sigma| u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u)|\sigma| u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u) = \frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(An_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(An_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u) = -\frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(An_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(An_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

- Il faut maintenant montrer que sous de bonnes hypothèses on a

$$u \geq 0 \implies \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u) \geq 0, \quad \text{et} \quad \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u) \geq 0.$$

BILAN :

(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u)|\sigma| u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u)|\sigma| u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u) = \frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(An_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(An_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

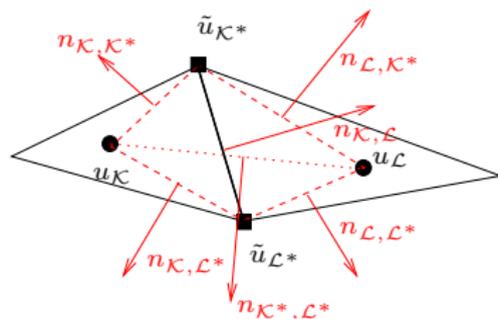
$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u) = -\frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(An_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(An_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

- Il faut maintenant montrer que sous de bonnes hypothèses on a

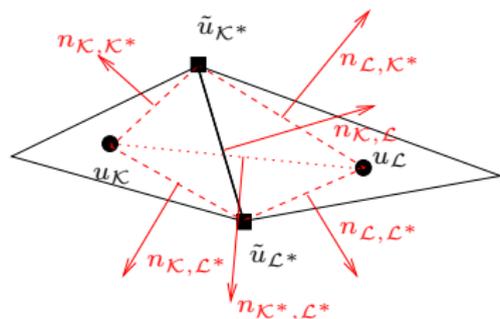
$$(An_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, \quad (An_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0,$$

$$(An_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0, \quad (An_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}) \cdot n_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0.$$

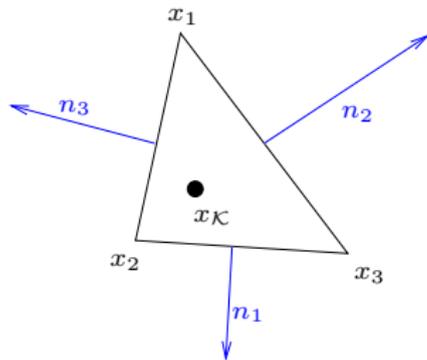
Pour cela, on montre qu'il existe un bon choix des centres $x_{\mathcal{K}}$.



On veut
$$\begin{cases} (An_{L,K^*}) \cdot n_{K,L} \geq 0, & (An_{L,L^*}) \cdot n_{K,L} \geq 0, \\ (An_{K,K^*}) \cdot n_{K,L} \leq 0, & (An_{K,L^*}) \cdot n_{K,L} \leq 0. \end{cases}$$



On veut
$$\begin{cases} (An_{L,K*}) \cdot n_{K,L} \geq 0, & (An_{L,L*}) \cdot n_{K,L} \geq 0, \\ (An_{K,K*}) \cdot n_{K,L} \leq 0, & (An_{K,L*}) \cdot n_{K,L} \leq 0. \end{cases}$$



Un choix convenable :

$$x_K = \frac{\|n_1\|_A x_1 + \|n_2\|_A x_2 + \|n_3\|_A x_3}{\|n_1\|_A + \|n_2\|_A + \|n_3\|_A},$$

avec

$$\|\xi\|_A = \sqrt{A\xi \cdot \xi}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

PROPRIÉTÉS

- L'existence d'une solution au problème non-linéaire n'est pas prouvée.
- Pas de résultat de convergence.

PROPRIÉTÉS

- L'existence d'une solution au problème non-linéaire n'est pas prouvée.
- Pas de résultat de convergence.
- En pratique, on résout le problème par une méthode itérative qui **préserve la positivité au cours des itérations**.
- Le système linéaire à résoudre change à chaque itération et n'est pas symétrique.

PROPRIÉTÉS

- L'existence d'une solution au problème non-linéaire n'est pas prouvée.
- Pas de résultat de convergence.
- En pratique, on résout le problème par une méthode itérative qui **préserve la positivité au cours des itérations**.
- Le système linéaire à résoudre change à chaque itération et n'est pas symétrique.
- Le principe du schéma se généralise (difficilement) à des maillages polygonaux seulement dans le cas où
 - $A(x)$ est isotrope.
 - Le maillage est régulier et les volumes de contrôle sont étoilés.

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

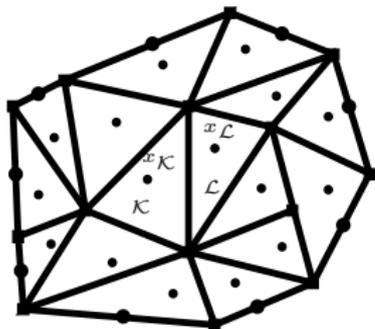
3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

(Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05) (Andreianov-Boyer-Hubert '07)

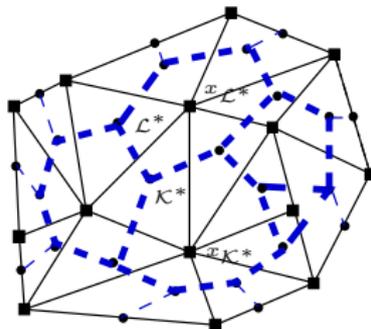
MAILLAGES



\triangle mesh \mathfrak{M}

Maillage primal

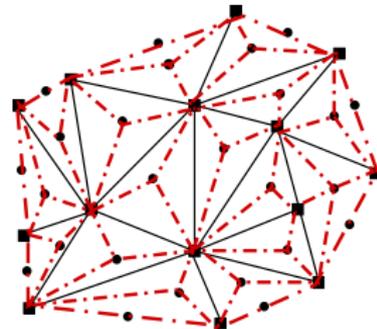
$$\rightsquigarrow (u_K)_{K \in \mathfrak{M}}$$



--- mesh \mathfrak{M}^*

Maillage dual

$$\rightsquigarrow (u_{K^*})_{K^* \in \mathfrak{M}^*}$$



--- mesh \mathfrak{D}

Maillage diamant

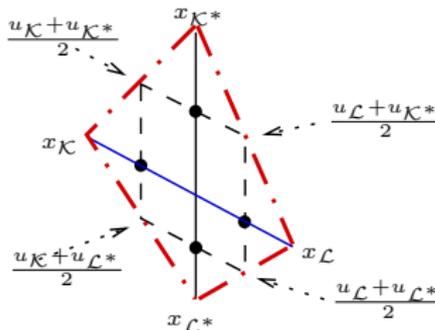
$$\rightsquigarrow \text{gradient discret}$$

SOLUTION APPROCHÉE :

$$u^T = \left((u_K)_{K \in \mathfrak{M}}, (u_{K^*})_{K^* \in \mathfrak{M}^*} \right)$$

GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \right), \quad \forall \text{ diamant } \mathcal{D}.$$



Définition équivalente

$$\begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$$

GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \right), \quad \forall \text{ diamant } \mathcal{D}.$$

MÉTHODE DDFV

Formulation Volumes Finis :

$$\begin{aligned} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}}) &= \int_{\mathcal{K}} f(x) dx, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \\ - \sum_{\sigma^* \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}} |\sigma^*| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*}) &= \int_{\mathcal{K}^*} f(x) dx, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, \end{aligned}$$

où

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \varphi(x, \xi) dx, \quad \text{flux de masse approché sur le diamant}$$

GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \nu_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \nu_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \right), \quad \forall \text{ diamant } \mathcal{D}.$$

MÉTHODE DDFV

Formulation équivalente (**Dualité Discrète**) :

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T v^T) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{m}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{m}^*} dx, \quad \forall v^T \in \mathbb{R}^T.$$

GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \nu_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \nu_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \right), \quad \forall \text{ diamant } \mathcal{D}.$$

MÉTHODE DDFV

Formulation équivalente (**Dualité Discrète**) :

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| (\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T v^T) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{m}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{m}^*} dx, \quad \forall v^T \in \mathbb{R}^T.$$

PROPRIÉTÉS

- Nombre d'inconnues = nombre de cellules + nombre de sommets.
- La monotonie et la coercivité de l'opérateur sont préservées.
- Existence et unicité de la solution approchée.
- Préservation de la structure variationnelle si $\varphi = \nabla_{\xi} \Phi$.
- Convergence dans le cas général et estimation d'erreur dans le cas régulier en $O(h)$ pour u et ∇u .

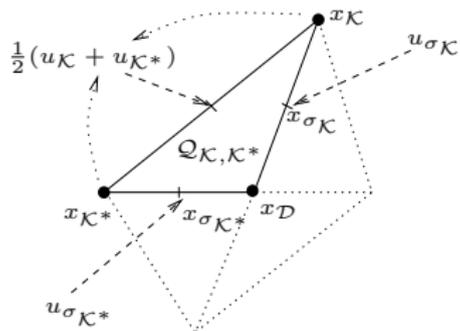
(Hermeline '03), (Boyer-Hubert '08)

OBJECTIFS

- Adapter DDFV à des coefficients discontinus en assurant la convergence optimale.
- Possibilité de considérer des couplages linéaires/non-linéaires.

PRINCIPE : Nouveau gradient discret sur les quarts de diamant

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} u^T = \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} 1_{\mathcal{Q}} \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T,$$



$$\nabla_{\mathcal{Q}_{K,K^*}}^{\mathcal{N}} u^T = \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\sigma_{K^*}} - \frac{1}{2}(u_K + u_{K^*})}{|\sigma_K|} \nu + \frac{u_{\sigma_K} - \frac{1}{2}(u_K + u_{K^*})}{|\sigma_{K^*}|} \nu^* \right)$$

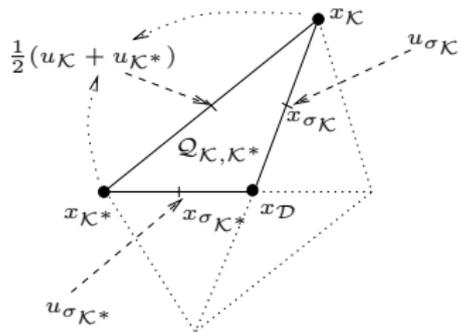
(Hermeline '03), (Boyer-Hubert '08)

OBJECTIFS

- Adapter DDFV à des coefficients discontinus en assurant la convergence optimale.
- Possibilité de considérer des couplages linéaires/non-linéaires.

PRINCIPE : Nouveau gradient discret sur les quarts de diamant

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} u^T = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} 1_{\mathcal{Q}} \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T,$$



$$\rightsquigarrow \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T = \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}, \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D}.$$

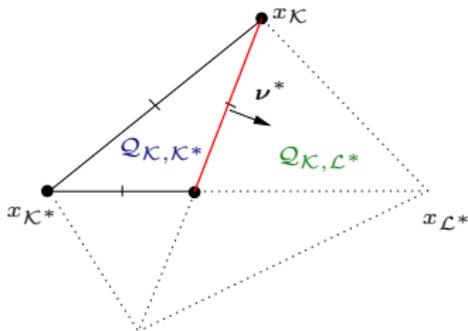
- $B_{\mathcal{Q}}$ est une matrice 2×4 dépendant seulement de la géométrie.
- Les inconnues intermédiaires $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$ doivent être éliminées.

On suppose que φ est régulier sur chaque quart de diamant

\Rightarrow **Discontinuités autorisées à travers les arêtes primales et duales.**

On pose $\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} \varphi(x, \xi) dx$.

ON DEMANDE LA CONTINUITÉ DES FLUX À L'INTÉRIEUR DE \mathcal{D}



Il faut que $\delta^{\mathcal{D}}$ vérifie

$$(\varphi_{\mathcal{Q}_{K,K^*}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{K,K^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{K,L^*}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{K,L^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*)$$

On suppose que φ est régulier sur chaque quart de diamant

⇒ **Discontinuités autorisées à travers les arêtes primales et duales.**

On pose $\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} \varphi(x, \xi) dx$.

ON DEMANDE LA CONTINUITÉ DES FLUX À L'INTÉRIEUR DE \mathcal{D}

$$(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*)$$

$$(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu^*)$$

$$(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu)$$

$$(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu) = (\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} (\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \nu)$$

PROPOSITION

Pour tout $u^T \in \mathbb{R}^T$, et tout diamant \mathcal{D} , il existe un **unique** $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$, qui assure la continuité des flux.

LE SCHÉMA M-DDFV

Dans DDFV, on remplace le flux approché

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) dx,$$

par

$$\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \varphi_{\mathcal{Q}} \underbrace{(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T))}_{=\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T},$$

FORMULATION EN DUALITÉ DISCRÈTE SUR LES DIAMANTS

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} |\mathcal{D}| (\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^T u^T), \nabla_{\mathcal{D}}^T v^T) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{m}} dz + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{m}*} dz, \quad \forall v^T \in \mathbb{R}^T.$$

PROPRIÉTÉS

- Existence et unicité de la solution du schéma non-linéaire.
- Estimation d'erreur pour des coefficients et des solutions régulières par morceaux y compris pour le problème non-linéaire. Dans le cas linéaire, estimation en $O(h)$ pour u et ∇u .

PROPRIÉTÉS

- Existence et unicité de la solution du schéma non-linéaire.
- Estimation d'erreur pour des coefficients et des solutions régulières par morceaux y compris pour le problème non-linéaire. Dans le cas linéaire, estimation en $O(h)$ pour u et ∇u .
- Solveur itératif de type décomposition-coordination dont la convergence est prouvée.
A chaque itération :
 - On “inverse” une même matrice SDP.
 - On effectue quelques itérations de plusieurs “petits” Newton indépendants.
- Dans le cas linéaire, on a une formule explicite de la matrice SDP du système :
 - Elle généralise la formule de moyenne harmonique usuelle en 1D.
 - Exactement le même stencil que DDFV.
 - Assemblage aisé en parcourant les arêtes.

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

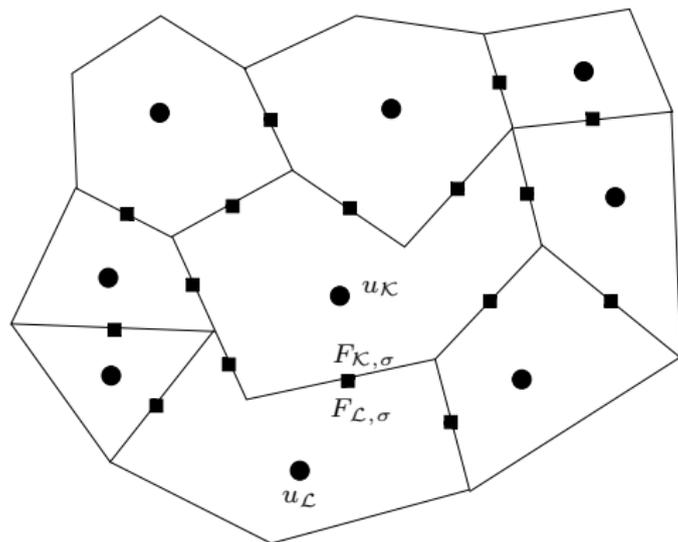
- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- **Schémas mimétiques**
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

(Lipnikov et al '05 \rightarrow '08) (Manzini '08)



- Une inconnue scalaire u_κ sur chaque volume de contrôle $\kappa \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\kappa,\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\kappa,\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- On note $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ (resp. $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$) l'ensemble des inconnues aux centres (resp. aux arêtes).

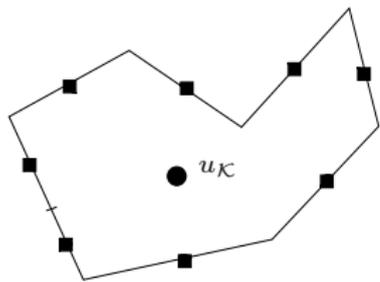
SCHÉMAS MIMÉTIQUES POUR $-\operatorname{div}(A(x)\nabla\cdot)$

PRINCIPE : Se baser sur la formule de Green

$$\int_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1}(A_{\mathcal{K}}\nabla u) \cdot \xi \, dx + \int_{\mathcal{K}} u(\operatorname{div} \xi) \, dx = \int_{\partial\mathcal{K}} u(\xi \cdot \nu) \, ds.$$

- Si $F \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}$, on définit la div. discrète

$$\operatorname{div}^{\mathcal{K}} F = \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| F_{\mathcal{K},\sigma}.$$



- On se donne un “produit scalaire” $(\cdot, \cdot)_{A^{-1},\mathcal{K}}$ sur l'ens. des \blacksquare qui approche $\int_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1} F \cdot G \, dx$.

HYPOTHÈSES

Coercivité : $\underline{C}|\mathcal{K}| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 \leq (F, F)_{A^{-1},\mathcal{K}} \leq \overline{C}|\mathcal{K}| \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |F_{\mathcal{K},\sigma}|^2, \quad \forall \mathcal{K},$

Consistance : $((A_{\mathcal{K}}\nabla\varphi), G)_{A^{-1},\mathcal{K}} + \int_{\mathcal{K}} \varphi \operatorname{div}^{\mathcal{K}} G \, dx$
 $= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma} \left(\int_{\sigma} \varphi \right), \quad \forall \mathcal{K}, \forall G \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}, \forall \varphi \text{ affine.}$

PRODUITS SCALAIRES GLOBAUX

$$(F, G)_{A^{-1}} = \sum_{\kappa} (F, G)_{A^{-1}, \kappa},$$

$$(u, v) = \sum_{\kappa} |K| u_{\kappa} v_{\kappa},$$

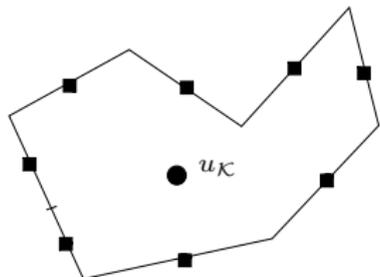
OPERATEUR FLUX APPROCHÉ : $\Phi : u \in \mathbb{R}^T \mapsto \Phi u \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}} \approx (A\nabla u) \cdot \nu$

$$(G, \Phi u)_{A^{-1}} = -(u, \operatorname{div}^{\kappa} G), \quad \forall u \in \mathbb{R}_0^T, \forall G \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}.$$

Le schéma s'écrit alors :

$$-\operatorname{div}^{\kappa}(\Phi u) = f^{\kappa}, \quad \forall \kappa.$$

Tout se ramène à construire un p.s. $(\cdot, \cdot)_{A^{-1}, \kappa}$ convenable vérifiant les hypothèses de consistance et coercivité



ON CHERCHE

$$(F, G)_{A^{-1}, \mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(F_{\mathcal{K}, \sigma} \right)_{\sigma}^t M_{\mathcal{K}} \left(G_{\mathcal{K}, \sigma} \right)_{\sigma},$$

avec $M_{\mathcal{K}}$ SDP de taille $m \times m$.

DÉFINITIONS

$$R = \begin{pmatrix} |\sigma_1|(x_{\sigma_1} - x_{\mathcal{K}})^t \\ \vdots \\ |\sigma_m|(x_{\sigma_m} - x_{\mathcal{K}})^t \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} \nu_{\sigma_1}^t \\ \vdots \\ \nu_{\sigma_m}^t \end{pmatrix} A_{\mathcal{K}}, \quad \text{de taille } m \times 2,$$

ON PREND

$$M_{\mathcal{K}} = \frac{1}{|\mathcal{K}|} R A_{\mathcal{K}}^{-1} R^t + \mu_{\mathcal{K}} C C^t,$$

où C de taille $m \times (m - 2)$ est une base du compl. orthogonal de N : $N^t C = 0$.

PROPRIÉTÉS

- Les mailles doivent être étoilées par rapport à leur barycentre.
- Le nombre total d'inconnues est égal au nombre d'éléments + le nombre d'arêtes.
- Le système linéaire à résoudre est de type point-selle.

PROPRIÉTÉS

- Les mailles doivent être étoilées par rapport à leur barycentre.
- Le nombre total d'inconnues est égal au nombre d'éléments + le nombre d'arêtes.
- Le système linéaire à résoudre est de type point-selle.

- On peut voir ces schémas comme une généralisation des éléments finis mixtes associés à des formules de quadrature bien choisies.

PROPRIÉTÉS

- Les mailles doivent être étoilées par rapport à leur barycentre.
- Le nombre total d'inconnues est égal au nombre d'éléments + le nombre d'arêtes.
- Le système linéaire à résoudre est de type point-selle.
- On peut voir ces schémas comme une généralisation des éléments finis mixtes associés à des formules de quadrature bien choisies.
- Sous de bonnes hypothèses de régularité, on peut montrer la convergence à l'ordre 2 en norme L^2 et à l'ordre 1 en norme H^1 .
- Pas encore de théorie dans le cas de coefficients discontinus.

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

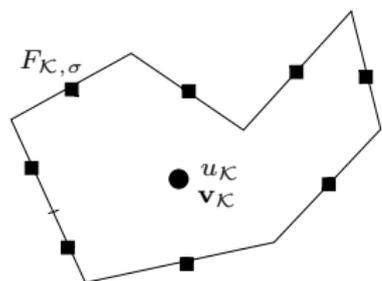
- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- **Schémas VF mixtes**
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

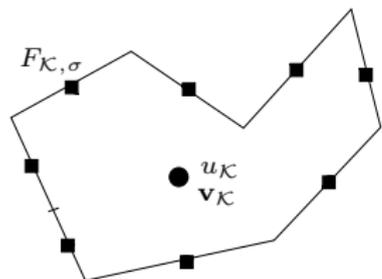
(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)



- Une inconnue scalaire u_κ sur chaque $\kappa \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle \mathbf{v}_κ sur chaque $\kappa \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\kappa,\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\kappa,\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)



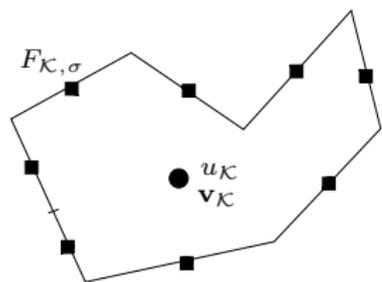
- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- Continuité de l'approximation au barycentre x_{σ} de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_{\sigma} - x_{\mathcal{L}}).$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)



- Une inconnue scalaire u_κ sur chaque $\kappa \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle \mathbf{v}_κ sur chaque $\kappa \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\kappa,\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\kappa,\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

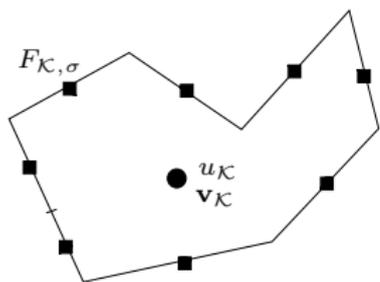
- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_\kappa + \mathbf{v}_\kappa \cdot (x_\sigma - x_\kappa) = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_\kappa).$$

- Formule de "géométrie"

$$|\kappa|\xi = \int_\kappa \operatorname{div} \left((x - x_\kappa) \otimes \xi \right) dx = \int_{\partial\kappa} (\xi \cdot \boldsymbol{\nu})(x - x_\kappa) dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)



- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

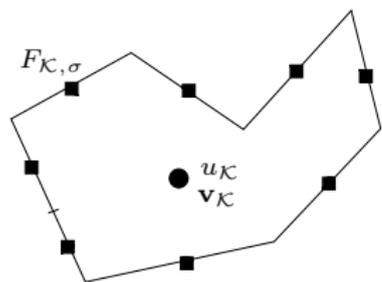
- Continuité de l'approximation au barycentre x_{σ} de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_{\sigma} - x_{\mathcal{L}}).$$

- Formule de "géométrie"

$$|\mathcal{K}|\xi = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| (\xi \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}) (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)



- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

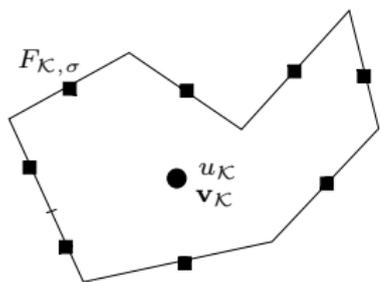
- Continuité de l'approximation au barycentre x_{σ} de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}).$$

- Formule de "géométrie"

$$|\mathcal{K}|A_K \mathbf{v}_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}).$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)



- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- Continuité de l'approximation au barycentre x_{σ} de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}).$$

- Formule de "géométrie"

$$|\mathcal{K}| A_{\mathcal{K}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}).$$

- Bilan des flux $\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = - \int_{\mathcal{K}} f(x) dx.$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

PROPRIÉTÉS

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

PROPRIÉTÉS

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.
- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé.
- Sur maillage quelconque, il faut pénaliser un petit peu l'équation de continuité en x_σ .
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u)) = f$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

PROPRIÉTÉS

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.
- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé.
- Sur maillage quelconque, il faut pénaliser un petit peu l'équation de continuité en x_σ .
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u)) = f$.
- Résultat de convergence de la solution $(u_\kappa)_\kappa$ et du gradient $(\mathbf{v}_\kappa)_\kappa$, pour un maillage quelconque et des données peu régulières.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

PROPRIÉTÉS

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.
- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé.
- Sur maillage quelconque, il faut pénaliser un petit peu l'équation de continuité en x_σ .
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\operatorname{div}(\varphi(x, \nabla u)) = f$.
- Résultat de convergence de la solution $(u_\kappa)_\kappa$ et du gradient $(\mathbf{v}_\kappa)_\kappa$, pour un maillage quelconque et des données peu régulières.
- Sous des hypothèses de régularité de la solution et des coefficients du problème :
 - Maillages généraux : Estimation d'erreur théorique en $O(\sqrt{h})$ pour la solution et son gradient.
 - Maillages simpliciaux : Estimation en $O(h)$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

IMPLÉMENTATION

- Le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

IMPLÉMENTATION

- Le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

HYBRIDATION (CAS LINÉAIRE)

On peut ramener tout le problème à la résolution d'un système symétrique défini positif sur de nouvelles inconnues.

- On définit $u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\kappa + \mathbf{v}_\kappa \cdot (x_\kappa - x_\sigma) = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma)$.
- On utilise

$$\mathbf{v}_\kappa = \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} F_{\kappa,\sigma} A_\kappa^{-1} (x_\sigma - x_\kappa).$$

- D'où $(F_{\kappa,\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} = B_\kappa^{-1} (u_\sigma - u_\kappa)_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa}$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

IMPLÉMENTATION

- Le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

HYBRIDATION (CAS LINÉAIRE)

On peut ramener tout le problème à la résolution d'un système symétrique défini positif sur de nouvelles inconnues.

- On définit $u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\kappa + \mathbf{v}_\kappa \cdot (x_\kappa - x_\sigma) = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma)$.
- On utilise

$$\mathbf{v}_\kappa = \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} F_{\kappa,\sigma} A_\kappa^{-1} (x_\sigma - x_\kappa).$$

- D'où $(F_{\kappa,\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} = B_\kappa^{-1} (u_\sigma - u_\kappa)_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa}$.
- Elimination de u_κ

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} F_{\kappa,\sigma} = - \int_\kappa f(x) dx.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

IMPLÉMENTATION

- Le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

HYBRIDATION (CAS LINÉAIRE)

On peut ramener tout le problème à la résolution d'un système symétrique défini positif sur de nouvelles inconnues.

- On définit $u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\kappa + \mathbf{v}_\kappa \cdot (x_\kappa - x_\sigma) = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma)$.
- On utilise

$$\mathbf{v}_\kappa = \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} F_{\kappa,\sigma} A_\kappa^{-1} (x_\sigma - x_\kappa).$$

- D'où $(F_{\kappa,\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} = B_\kappa^{-1} (u_\sigma - u_\kappa)_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa}$.
- Elimination de u_κ

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} c_{\kappa,\sigma} (u_\sigma - u_\kappa) = - \int_\kappa f(x) dx.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

IMPLÉMENTATION

- Le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

HYBRIDATION (CAS LINÉAIRE)

On peut ramener tout le problème à la résolution d'un système symétrique défini positif sur de nouvelles inconnues.

- On définit $u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\kappa + \mathbf{v}_\kappa \cdot (x_\kappa - x_\sigma) = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma)$.
- On utilise

$$\mathbf{v}_\kappa = \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} F_{\kappa,\sigma} A_\kappa^{-1} (x_\sigma - x_\kappa).$$

- D'où $(F_{\kappa,\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} = B_\kappa^{-1} (u_\sigma - u_\kappa)_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa}$.
- Elimination de $u_\kappa \Rightarrow u_\kappa = b_\kappa + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} \tilde{c}_{\kappa,\sigma} u_\sigma$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

IMPLÉMENTATION

- Le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

HYBRIDATION (CAS LINÉAIRE)

On peut ramener tout le problème à la résolution d'un système symétrique défini positif sur de nouvelles inconnues.

- On définit $u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\kappa + \mathbf{v}_\kappa \cdot (x_\kappa - x_\sigma) = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma)$.
- On utilise

$$\mathbf{v}_\kappa = \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} F_{\kappa,\sigma} A_\kappa^{-1} (x_\sigma - x_\kappa).$$

- D'où $(F_{\kappa,\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} = B_\kappa^{-1} (u_\sigma - u_\kappa)_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa}$.
- Elimination de $u_\kappa \Rightarrow u_\kappa = b_\kappa + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} \tilde{c}_{\kappa,\sigma} u_\sigma$.

$$\Rightarrow (F_{\kappa,\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} = C_\kappa (u_\sigma - u_{\sigma'})_{\sigma,\sigma' \in \mathcal{E}_\kappa} + (G_{\kappa,\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa}.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

IMPLÉMENTATION

- Le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

HYBRIDATION (CAS LINÉAIRE)

On peut ramener tout le problème à la résolution d'un système symétrique défini positif sur de nouvelles inconnues.

- On définit $u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\kappa + \mathbf{v}_\kappa \cdot (x_\kappa - x_\sigma) = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma)$.
- On utilise

$$\mathbf{v}_\kappa = \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} F_{\kappa,\sigma} A_\kappa^{-1} (x_\sigma - x_\kappa).$$

- D'où $(F_{\kappa,\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} = B_\kappa^{-1} (u_\sigma - u_\kappa)_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa}$.
- Elimination de $u_\kappa \Rightarrow u_\kappa = b_\kappa + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} \tilde{c}_{\kappa,\sigma} u_\sigma$.

$$\Rightarrow (F_{\kappa,\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} = C_\kappa (u_\sigma - u_{\sigma'})_{\sigma,\sigma' \in \mathcal{E}_\kappa} + (G_{\kappa,\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa}.$$

- $F_{\kappa,\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0 \Rightarrow$ Une équation par arête liant les u_σ .

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

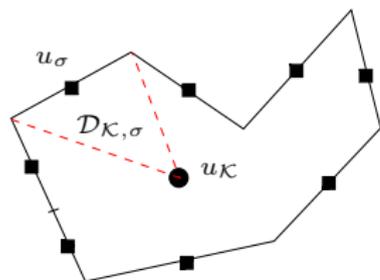
- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



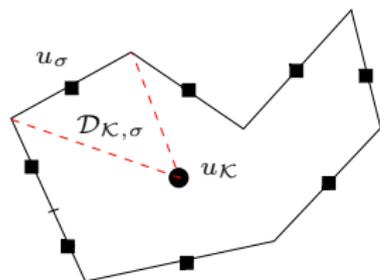
- Inconnues aux centres u_K et aux arêtes u_σ .
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_K \gamma_K^\sigma u_K$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule “géométrique” \implies définition d'un gradient discret :

$$\begin{aligned} |\kappa| \xi &= \int_K \nabla \left(\xi \cdot (x - x_K) \right) dx = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \int_\sigma \left(\xi \cdot (x - x_K) \right) \nu_{K,\sigma} dx \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| \left(\xi \cdot (x_\sigma - x_K) \right) \nu_{K,\sigma}. \end{aligned}$$

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



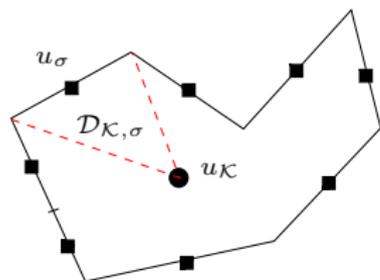
- Inconnues aux centres u_K et aux arêtes u_σ .
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_{\kappa} \gamma_{\kappa}^{\sigma} u_{\kappa}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule “géométrique” \implies définition d'un gradient discret :

$$|\kappa| \nabla u \approx \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} |\sigma| (u(x_\sigma) - u(x_\kappa)) \nu_{\kappa, \sigma}.$$

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



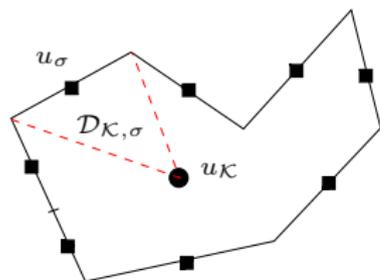
- Inconnues aux centres $u_{\mathcal{K}}$ et aux arêtes u_{σ} .
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_{σ} correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_{\sigma} = \sum_{\mathcal{K}} \gamma_{\mathcal{K}}^{\sigma} u_{\mathcal{K}}$.
- Les inconnues u_{σ} correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule “géométrique” \implies définition d'un gradient discret :

$$\nabla_{\mathcal{K}} u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| (u_{\sigma} - u_{\mathcal{K}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



- Inconnues aux centres $u_{\mathcal{K}}$ et aux arêtes u_{σ} .
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

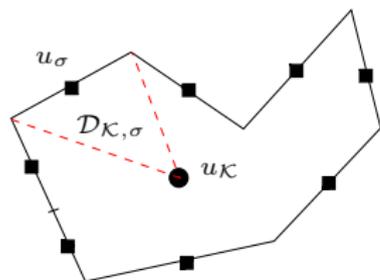
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_{σ} correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_{\sigma} = \sum_{\mathcal{K}} \gamma_{\mathcal{K}}^{\sigma} u_{\mathcal{K}}$.
- Les inconnues u_{σ} correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule “géométrique” \implies définition d'un gradient discret :

$$\nabla_{\mathcal{K}} u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| (u_{\sigma} - u_{\mathcal{K}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- Err. de consistance $R_{\mathcal{K},\sigma}(u) = \frac{\alpha}{d_{\mathcal{K},\sigma}} \left(u_{\sigma} - u_{\mathcal{K}} - \nabla_{\mathcal{K}} u \cdot (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}) \right)$.

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



- Inconnues aux centres u_K et aux arêtes u_σ .
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_{\kappa} \gamma_{\kappa}^{\sigma} u_{\kappa}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule “géométrique” \implies définition d'un gradient discret :

$$\nabla_{\mathcal{K}} u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| (u_{\sigma} - u_{\mathcal{K}}) \nu_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- Err. de consistance $R_{\mathcal{K},\sigma}(u) = \frac{\alpha}{d_{\mathcal{K},\sigma}} \left(u_{\sigma} - u_{\mathcal{K}} - \nabla_{\mathcal{K}} u \cdot (x_{\sigma} - x_{\mathcal{K}}) \right)$.
- Sur chaque triangle $\mathcal{D}_{\mathcal{K},\sigma}$ on définit un gradient **stabilisé**

$$\nabla_{\mathcal{K},\sigma} u = \nabla_{\mathcal{K}} u + R_{\mathcal{K},\sigma}(u) \nu_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- Le schéma s'écrit sous forme “variationnelle”

$$\int_{\Omega} (A(x) \nabla^{\tau} u) \cdot \nabla^{\tau} v \, dx = \sum_{\kappa} v_{\kappa} \left(\int_{\kappa} f \right), \quad \forall v = ((v_{\kappa})_{\kappa}, (v_{\sigma})_{\sigma}).$$

- Le schéma s'écrit sous forme “variationnelle”

$$\int_{\Omega} (A(x) \nabla^{\tau} u) \cdot \nabla^{\tau} v \, dx = \sum_{\kappa} v_{\kappa} \left(\int_{\kappa} f \right), \quad \forall v = ((v_{\kappa})_{\kappa}, (v_{\sigma})_{\sigma}).$$

- On peut l'écrire sous forme VF

$$\sum_{\kappa} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}} F_{\kappa, \sigma}(u) (v_{\kappa} - v_{\sigma}) = \sum_{\kappa} v_{\kappa} \left(\int_{\kappa} f \right), \quad \forall v = ((v_{\kappa})_{\kappa}, (v_{\sigma})_{\sigma}),$$

avec $F_{\kappa, \sigma}(u) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_{\kappa}} \alpha_{\kappa}^{\sigma, \sigma'} (u_{\kappa} - u_{\sigma'}), \alpha_{\kappa}^{\sigma, \sigma'}$ dépend des données.

- Le schéma s'écrit sous forme "variationnelle"

$$\int_{\Omega} (A(x) \nabla^{\tau} u) \cdot \nabla^{\tau} v \, dx = \sum_{\kappa} v_{\kappa} \left(\int_{\kappa} f \right), \quad \forall v = ((v_{\kappa})_{\kappa}, (v_{\sigma})_{\sigma}).$$

- On peut l'écrire sous forme VF

$$\sum_{\kappa} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}} F_{\kappa, \sigma}(u) (v_{\kappa} - v_{\sigma}) = \sum_{\kappa} v_{\kappa} \left(\int_{\kappa} f \right), \quad \forall v = ((v_{\kappa})_{\kappa}, (v_{\sigma})_{\sigma}),$$

avec $F_{\kappa, \sigma}(u) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_{\kappa}} \alpha_{\kappa}^{\sigma, \sigma'} (u_{\kappa} - u_{\sigma'})$, $\alpha_{\kappa}^{\sigma, \sigma'}$ dépend des données.

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_H$, l'inconnue v_{σ} est un degré de liberté, donc

$$F_{\kappa, \sigma}(u) + F_{\mathcal{L}, \sigma}(u) = 0.$$

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_B$, **ceci est faux**.

- Le schéma s'écrit sous forme “variationnelle”

$$\int_{\Omega} (A(x) \nabla^{\tau} u) \cdot \nabla^{\tau} v \, dx = \sum_{\kappa} v_{\kappa} \left(\int_{\kappa} f \right), \quad \forall v = ((v_{\kappa})_{\kappa}, (v_{\sigma})_{\sigma}).$$

- On peut l'écrire sous forme VF

$$\sum_{\kappa} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}} F_{\kappa, \sigma}(u) (v_{\kappa} - v_{\sigma}) = \sum_{\kappa} v_{\kappa} \left(\int_{\kappa} f \right), \quad \forall v = ((v_{\kappa})_{\kappa}, (v_{\sigma})_{\sigma}),$$

avec $F_{\kappa, \sigma}(u) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_{\kappa}} \alpha_{\kappa}^{\sigma, \sigma'} (u_{\kappa} - u_{\sigma'})$, $\alpha_{\kappa}^{\sigma, \sigma'}$ dépend des données.

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_H$, l'inconnue v_{σ} est un degré de liberté, donc

$$F_{\kappa, \sigma}(u) + F_{\mathcal{L}, \sigma}(u) = 0.$$

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_B$, **ceci est faux**.

CHOIX DES ARÊTES BARYCENTRIQUES/HYBRIDES

- On décide que $\sigma \in \mathcal{E}_B$ si le tenseur A est régulier près de σ .
- On décide que $\sigma \in \mathcal{E}_H$ si A est discontinu à travers σ pour assurer une bonne précision et la conservativité locale.

PROPRIÉTÉS

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)

- Schéma barycentrique/hybride adapté à la géométrie à mi-chemin entre VF et EF mixtes, proche des schémas mimétiques.

PROPRIÉTÉS

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)

- Schéma barycentrique/hybride adapté à la géométrie à mi-chemin entre VF et EF mixtes, proche des schémas mimétiques.
- La conservativité locale n'est assurée que sur les arêtes "hybrides".
 - Schéma totalement barycentrique :
peu d'inconnues / profil large / pas de conservativité locale
 - Schéma totalement hybride :
beaucoup d'inconnues / profil réduit / conservativité locale
- Dans le cas barycentrique, la notion de "flux local" n'est pas très claire.

PROPRIÉTÉS

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)

- Schéma barycentrique/hybride adapté à la géométrie à mi-chemin entre VF et EF mixtes, proche des schémas mimétiques.
- La conservativité locale n'est assurée que sur les arêtes "hybrides".
 - Schéma totalement barycentrique :
peu d'inconnues / profil large / pas de conservativité locale
 - Schéma totalement hybride :
beaucoup d'inconnues / profil réduit / conservativité locale
- Dans le cas barycentrique, la notion de "flux local" n'est pas très claire.
- Le système linéaire à résoudre est symétrique.
- Existence et unicité de la solution.
- Théorème de convergence dans le cas général.
- Estimation d'erreur en $O(h)$ pour u et ∇u dans le cas **isotrope régulier**.

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

(Herbin-Hubert, '08)

<http://www.latp.univ-mrs.fr/fvca5>

Actes de la conférence édités chez Wiley

Ed. : Robert Eymard et Jean-Marc Hérard

- 19 contributions.
- 9 cas tests.
- Une dizaine de familles de maillages.
- Quelques éléments de comparaison :
 - Nombre d'inconnues / d'éléments non nuls de la matrice.
 - Respect de la conservativité locale.
 - Erreurs L^∞/L^2 sur u et ∇u .
 - Erreur sur l'approximation des flux aux interfaces.
 - Respect de la positivité / Principe du maximum discret.
 - Bilan énergétique discret.

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

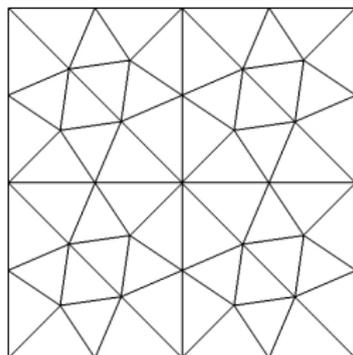
- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

TEST 1 : ANISOTROPIE MODÉRÉE

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega$$

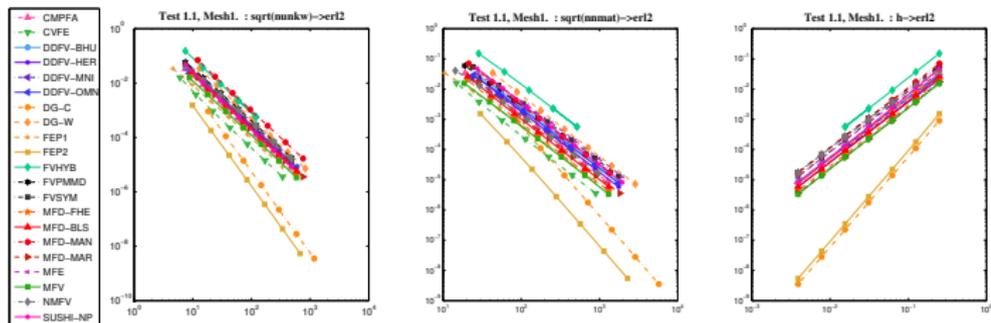
$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \text{ et } u(x, y) = 16x(1-x)y(1-y).$$



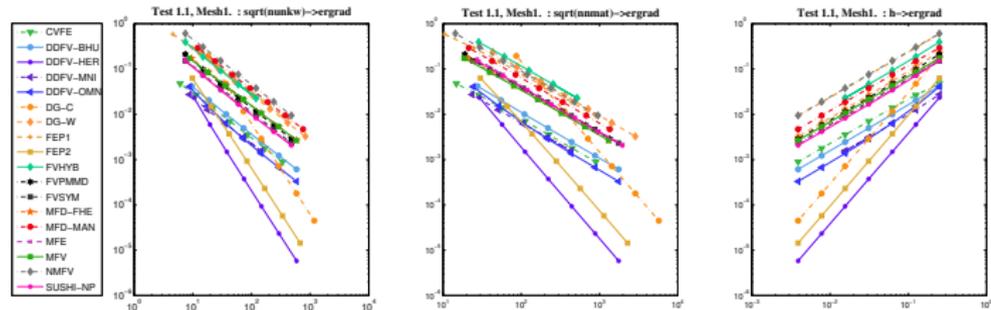
Mesh1

TEST 1 : ANISOTROPIE MODÉRÉE

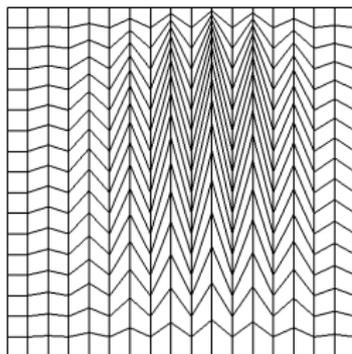
ERREUR L^2 SUR LA SOLUTION (ORDRES 2 OU 3)



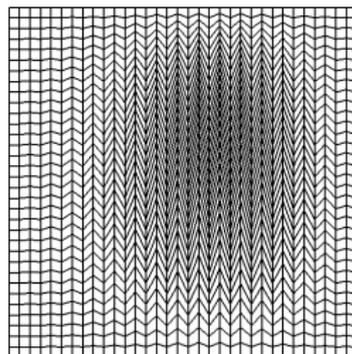
ET SUR LE GRADIENT (ORDRES 1 OU 2)



TEST 1 : ANISOTROPIE MODÉRÉE



Mesh4_1



Mesh4_2

MINIMUM ET MAXIMUM DE LA SOLUTION APPROCHÉE

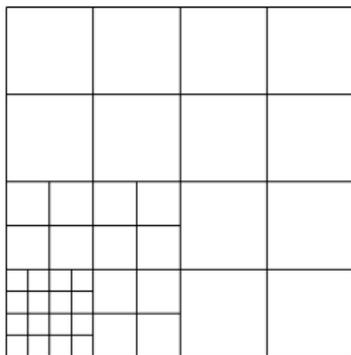
	mesh 4_1		mesh 4_2	
	umin	umax	umin	umax
CMPFA	9.95E-03	1.00E+00	2.73E-03	9.99E-01
DDFV-BHU	1.33E-02	9.96E-01	3.63E-03	9.99E-01
DDFV-HER	0.00E+00	1.03E+00	0.00E+00	1.01E+00
DDFV-OMN	1.34E-02	1.03E+00	3.65E-03	1.01E+00
FVHYB	2.14E-03	9.84E-01	7.16E-04	9.93E-01
FVSYM	7.34E-03	9.59E-01	2.33E-03	9.89E-01
MFD-BLS	8.54E-03	9.55E-01	2.44E-03	9.87E-01
MFD-MAN	6.64E-03	9.71E-01	1.50E-03	9.93E-01
MFV	1.08E-02	9.42E-01	3.34E-03	9.82E-01
NMFV	1.30E-02	1.11E+00	3.61E-03	1.04E+00
SUSHI	7.64E-03	8.88E-01	2.33E-03	9.61E-01

TEST 1 : ANISOTROPIE MODÉRÉE

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega$$

$$\text{avec } A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \text{ et}$$

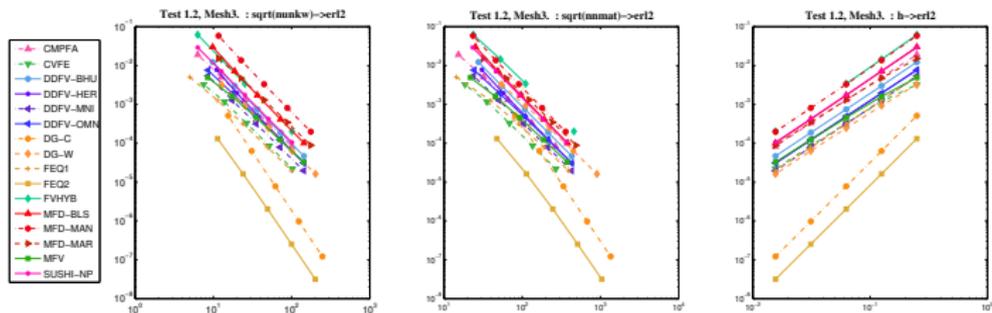
$$u(x, y) = \sin((1-x)(1-y)) + (1-x)^3(1-y)^2.$$



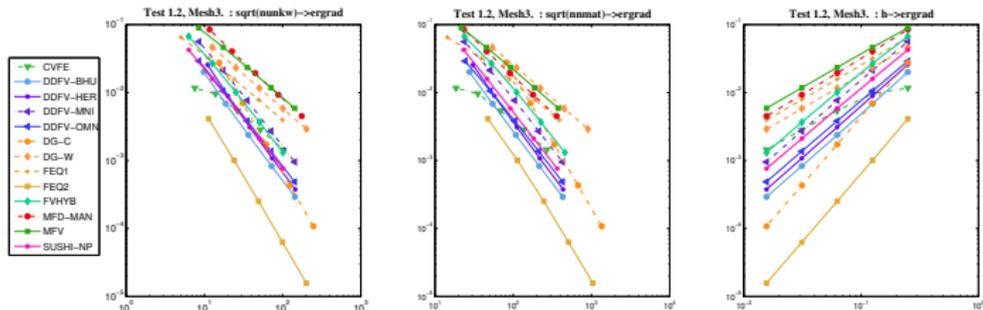
Mesh3

TEST 1 : ANISOTROPIE MODÉRÉE

ERREUR L^2 SUR LA SOLUTION (ORDRE 2 OU 3)



ET SUR LE GRADIENT (ORDRES 1, 1.5 OU 2)



1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

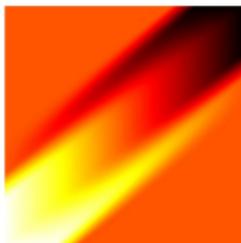
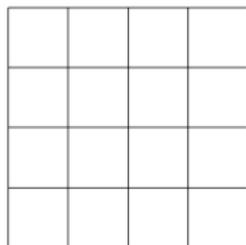
2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- **Test 3 : Ecoulement oblique**
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS



$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\text{avec } A = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{pmatrix} R_\theta^{-1}, \theta = 40^\circ$$

La donnée au bord \bar{u} est continue et linéaire par morceaux sur $\partial\Omega$:

$$\bar{u}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{on } (0, .2) \times \{0.\} \cup \{0.\} \times (0, .2) \\ 0 & \text{on } (.8, 1.) \times \{1.\} \cup \{1.\} \times (.8, 1.) \\ \frac{1}{2} & \text{on } (.3, 1.) \times \{0.\} \cup \{0.\} \times (.3, 1.) \\ \frac{1}{2} & \text{on } (0., .7) \times \{1.\} \cup \{1.\} \times (0., .7) \end{cases}$$

TEST 3 : ECOULEMENT OBLIQUE

MINIMUM ET MAXIMUM DES SOLUTIONS APPROCHÉES

	umin.i	umax.i	i
CMPFA	6.90E-02	9.31E-01	1
	9.83E-04	9.99E-01	7
DDFV-BHU	-4.72E-03	1.00E+00	1
	-5.31E-04	1.00E+00	7
DDFV-HER	-4.72E-03	1.00E+00	1
	-5.96E-08	1.00E+00	7
DDFV-OMN	1.04E-01	8.96E-01	1
	1.01E-03	9.99E-01	7
FVHYB	-1.75E-01	1.17E+00	1
	-1.00E-03	1.00E+00	6
FVSYM	6.85E-02	9.32E-01	1
	4.92E-04	9.99E-01	8
MFD-BLS	6.09E-02	9.39E-01	1
	1.29E-03	9.99E-01	7
MFD-MAN	7.56E-02	9.24E-01	1
	8.01E-04	9.99E-01	8
MFE	3.12E-02	9.69E-01	1
	5.08E-04	9.99E-01	8
MFV	1.22E-02	8.78E-01	1
	7.92E-04	9.99E-01	7
NMFV	1.11e-01	8.88e-01	1
	1.28E-03	9.99E-01	7
SUSHI	6.03E-02	9.40E-01	1
	8.52E-04	9.99E-01	7

LES ÉNERGIES

	ener1	eren	i
CMPFA	N/A N/A	N/A N/A	
DDFV-BHU	2.14E-01	9.60E-02	1
	2.42E-01	7.11E-06	7
DDFV-HER	2.14E-01	9.46E-02	1
	2.42E-01	1.91E-05	7
DDFV-OMN	1.81E-01	3.68E-03	1
	2.42E-01	1.77E-06	7
FVHYB	2.13E-01	2.55E-01	1
	2.42E-01	8.19E-03	6
FVSYM	2.20E-01	0.00E+00	1
	2.42E-01	0.00E+00	8
MFD-BLS	2.38E-01	4.44E-15	1
	2.42E-01	6.74E-13	7
MFD-MAN	1.91E-01	1.87E-14	1
	2.42E-01	3.70E-14	8
MFE	1.25E-01	2.46E-02	1
	2.41E-01	2.91E-03	8
MFV	4.85E-01	8.23E-07	1
	2.42E-01	9.74E-06	7
NMFV	2.33e-01	1.45e-01	1
	2.45E-01	1.94E-02	7
SUSHI	2.25E-01	3.01E-01	1
	2.43E-01	1.28E-02	7

Energie de volume

$$\text{ener1} \approx \int_{\Omega} A \nabla u \cdot \nabla u \, dx,$$

Energie de bord

$$\text{ener2} \approx \int_{\partial\Omega} A \nabla u \cdot \nu \, dx.$$

Sur le problème continu :

$$\text{eren1} = \text{eren2}.$$

Erreur sur le bilan d'énergie

$$\text{eren} = \text{ener1} - \text{ener2}.$$

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

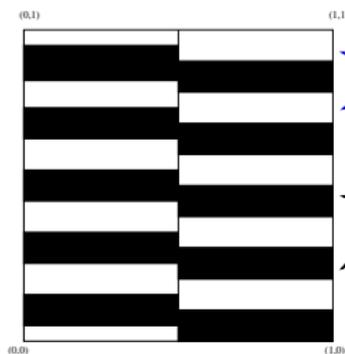
- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

TEST 4 : FAILLE VERTICALE



$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

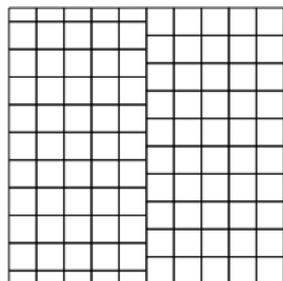
$$u = \bar{u} \text{ sur } \partial\Omega$$

 Ω_1

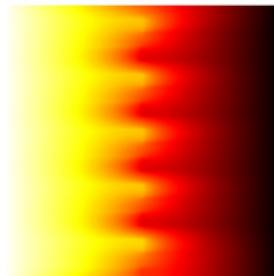
$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \text{ avec}$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^2 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega_1, \\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-2} \\ 10^{-3} \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega_2 \end{cases}$$

$$\text{et } \bar{u}(x, y) = 1 - x.$$



mesh5



TEST 4 : FAILLE VERTICALE

PRINCIPE DU MAXIMUM

- Vérifié par toutes les méthodes présentées ici.

VALEURS DES ÉNERGIES

	ener1 mesh5	eren mesh5	ener1 mesh5_ref	eren mesh5_ref
DDFV-BHU	42.1	3.65E-02	43.2	1.27E-03
DDFV-HER	49.3	1.75E-01	43.8	1.64E-02
DDFV-OMN	42.2	3.65E-02	43.2	1.28E-03
FVHYB	41.4	6.12E-02	/	/
MFD-BLS	33.9	7.93E-14	43.2	2.84E-12
MFD-MAN	31.4	1.16E-12	43.2	4.71E-14
MFV	49.9	4.21E-05	43.2	1.88E-05
NMFV	/	/	43.2	5.92E-04
SUSHI	39.1	6.67E-02	43.1	8.88E-04

TEST 4 : FAILLE VERTICALE

APPROXIMATION DES FLUX SORTANT

$$\text{flux0} = \int_{\partial\Omega \cap \{x=0\}} A \nabla u \cdot \nu,$$

	flux0 mesh5	flux0 mesh5_ref	flux1 mesh5	flux1 mesh5_ref	fluy0 mesh5	fluy0 mesh5_ref	fluy1 mesh5
CMPFA	-45.2	-42.1	46.1	44.4	-0.95	-2.33	4.84E-04
DDFV-BHU	-40.0	-42.1	41.8	44.4	-1.81	-2.33	9.08E-04
DDFV-HER	-40.0	-42.0	41.8	44.3	-1.81	-2.35	9.08E-04
DDFV-OMN	-40.0	-42.1	41.8	44.4	-1.81	-2.33	9.08E-04
FVHYB	-44.3	/	46.3	/	0.49	/	1.55E-04
MFD-BLS	-32.3	-42.1	36.2	44.4	-3.94	-2.33	1.22E-03
MFD-MAN	-29.7	-42.1	34.1	44.4	-4.37	-2.33	1.01E-03
MFV	-44.0	-42.1	50.3	44.4	-8.03	-2.33	1.72E+00
NMFV	-43.2	-42.1	44.5	44.4	-1.23	-2.33	2.32E-04
SUSHI	-40.9	-42.1	43.1	44.4	-2.21	-2.33	6.94E-04

1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

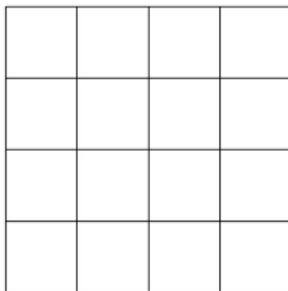
4 CONCLUSIONS

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega$$

avec

$$A = \frac{1}{(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} 10^{-3}x^2 + y^2 & (10^{-3} - 1)xy \\ (10^{-3} - 1)xy & x^2 + 10^{-3}y^2 \end{pmatrix}$$

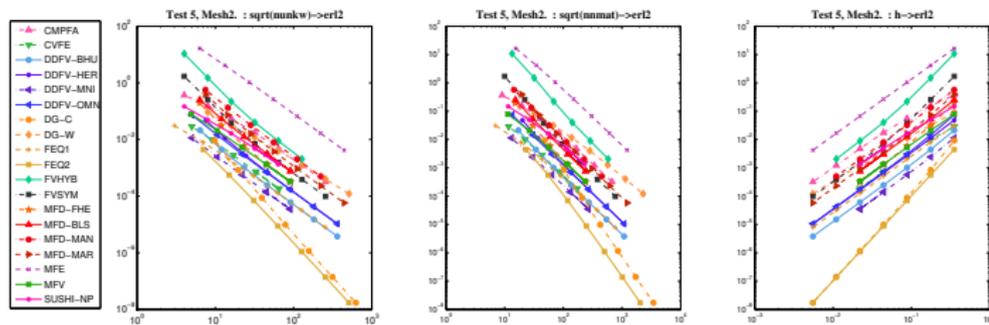
et $u(x, y) = \sin \pi x \sin \pi y$.



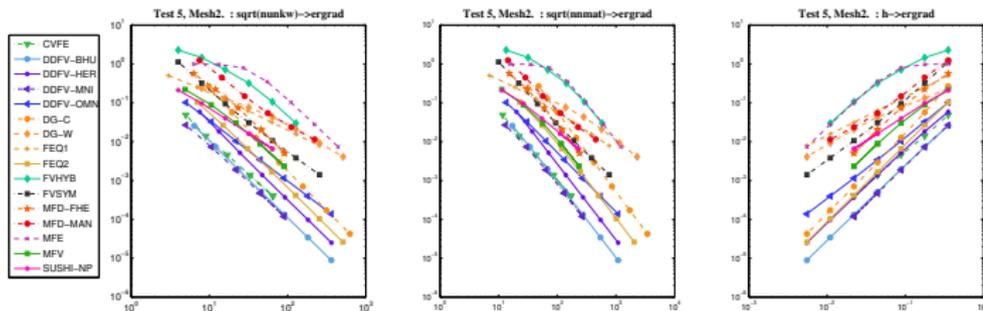
mesh2

TEST 5 : ANISOTROPIE TOURNANTE HÉTÉROGÈNE

ERREUR EN NORME L^2 SUR LA SOLUTION (ORDRES 2 ET 3)



ET SUR SON GRADIENT (ORDRES COMPRIS ENTRE 1 ET 2)



1 INTRODUCTION

- Ecoulements complexes en milieux poreux
- Le Schéma Volumes Finis de base (TPFA, VF4)
- Opérateurs non-linéaires

2 QUELQUES GRANDES CLASSES DE MÉTHODES

- Schémas MPFA
- Schémas diamants
- Schémas VF monotones non-linéaires
- Schémas DDFV
- Schémas mimétiques
- Schémas VF mixtes
- Schéma SUSHI

3 COMPARAISONS : BENCHMARK FVCA 5

- Test 1 : Anisotropie modérée
- Test 3 : Ecoulement oblique
- Test 4 : Faille verticale
- Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène

4 CONCLUSIONS

COMMENT CHOISIR UN SCHÉMA ?

- Ai-je besoin d'utiliser un maillage vraiment général (non conforme, déformé, ...)?
- Ai-je besoin d'assurer la positivité/monotonie?
- Ai-je besoin d'une approximation précise du gradient/des flux?
- Ai-je besoin d'une approximation précise des énergies?

COMMENT CHOISIR UN SCHÉMA ?

- Ai-je besoin d'utiliser un maillage vraiment général (non conforme, déformé, ...)?
 - Ai-je besoin d'assurer la positivité/monotonie?
 - Ai-je besoin d'une approximation précise du gradient/des flux?
 - Ai-je besoin d'une approximation précise des énergies?
-
- Avec quelles autres équations dois-je envisager un couplage ?
Avec un code déjà existant ?
 - Si oui, quelle est la structure de données dont je dispose dans mon code ?

COMMENT CHOISIR UN SCHÉMA ?

- Ai-je besoin d'utiliser un maillage vraiment général (non conforme, déformé, ...) ?
- Ai-je besoin d'assurer la positivité/monotonie ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise du gradient/des flux ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise des énergies ?

- Avec quelles autres équations dois-je envisager un couplage ?
Avec un code déjà existant ?
- Si oui, quelle est la structure de données dont je dispose dans mon code ?

- Ai-je besoin d'être rassuré par des théorèmes ?