

Sur l'approximation numérique d'un contrôle à zéro de l'équation de la chaleur

Franck BOYER*

avec Florence HUBERT* et Jérôme LE ROUSSEAU†

* LATP, Université Paul Cézanne, Université de Provence

† MAPMO, Université d'Orléans

Orléans, Juin 2009



- 1 INTRODUCTION
- 2 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME SEMI-DISCRET EN ESPACE
- 3 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME COMPLÈTEMENT DISCRET
- 4 UN PEU D'EXPLORATION NUMÉRIQUE
- 5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

- 1 INTRODUCTION
- 2 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME SEMI-DISCRET EN ESPACE
- 3 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME COMPLÈTEMENT DISCRET
- 4 UN PEU D'EXPLORATION NUMÉRIQUE
- 5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

NOTATIONS

On s'intéresse au problème parabolique suivant

$$(S) \begin{cases} \partial_t y - \nabla \cdot (\gamma \nabla y) = \mathbf{1}_\omega v & \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $T > 0$, Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n , $\omega \Subset \Omega$, $\gamma = \gamma(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ quelconque et $v \in L^2(Q)$ est le contrôle.

$$\text{Coût du contrôle : } \|v\|_{L^2(Q)} = \left(\int_0^T \int_\omega |v|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

NOTATIONS

On s'intéresse au problème parabolique suivant

$$(S) \begin{cases} \partial_t y - \nabla \cdot (\gamma \nabla y) = \mathbf{1}_\omega v & \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $T > 0$, Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n , $\omega \Subset \Omega$, $\gamma = \gamma(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ quelconque et $v \in L^2(Q)$ est le contrôle.

$$\text{Coût du contrôle : } \|v\|_{L^2(Q)} = \left(\int_0^T \int_\omega |v|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

PROBLÈMES DE CONTRÔLE

Peut-on trouver $v \in L^2(Q)$ tel que la solution y de (S) vérifie :

- $y(T) = y_T$, avec $y_T \in L^2(\Omega)$ quelconque donné.

NON

NOTATIONS

On s'intéresse au problème parabolique suivant

$$(S) \begin{cases} \partial_t y - \nabla \cdot (\gamma \nabla y) = \mathbf{1}_\omega v & \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $T > 0$, Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n , $\omega \Subset \Omega$, $\gamma = \gamma(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ quelconque et $v \in L^2(Q)$ est le contrôle.

$$\text{Coût du contrôle : } \|v\|_{L^2(Q)} = \left(\int_0^T \int_\omega |v|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

PROBLÈMES DE CONTRÔLE

Peut-on trouver $v \in L^2(Q)$ tel que la solution y de (S) vérifie :

- $y(T) = y_T$, avec $y_T \in L^2(\Omega)$ quelconque donné. **NON**
- $|y(T) - y_T|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$, avec $y_T \in L^2(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ donnés.
OUI mais coût $\rightarrow \infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$

NOTATIONS

On s'intéresse au problème parabolique suivant

$$(S) \begin{cases} \partial_t y - \nabla \cdot (\gamma \nabla y) = \mathbf{1}_\omega v & \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega \\ y(0) = y^0 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $T > 0$, Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n , $\omega \Subset \Omega$, $\gamma = \gamma(x) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $y^0 \in L^2(\Omega)$ quelconque et $v \in L^2(Q)$ est le contrôle.

$$\text{Coût du contrôle : } \|v\|_{L^2(Q)} = \left(\int_0^T \int_\omega |v|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

PROBLÈMES DE CONTRÔLE

Peut-on trouver $v \in L^2(Q)$ tel que la solution y de (S) vérifie :

- $y(T) = y_T$, avec $y_T \in L^2(\Omega)$ quelconque donné. **NON**
- $|y(T) - y_T|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$, avec $y_T \in L^2(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$ donnés. **OUI mais coût $\rightarrow \infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$**
- $y(T) = 0$. **OUI, équivalent au contrôle aux trajectoires**

PROBLÈME ADJOINT

$$(S^*) \begin{cases} -\partial_t q - \nabla \cdot (\gamma \nabla q) = 0 & \text{dans } Q \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \\ q(T) = q_F & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec $q_F \in L^2(\Omega)$ quelconque.

PROBLÈME ADJOINT

$$(S^*) \begin{cases} -\partial_t q - \nabla \cdot (\gamma \nabla q) = 0 & \text{dans } Q \\ q = 0 & \text{sur } \Sigma \\ q(T) = q_F & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

avec $q_F \in L^2(\Omega)$ quelconque.

THÉORÈME

Le système (S) est contrôlable à zéro au temps T si et seulement si le système adjoint (S) est observable au temps T > 0, i.e. s'il existe $C_{\text{obs}} > 0$ telle que **toute solution** de (S*) vérifie*

$$|q(0)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{\text{obs}} \iint_{(0,T) \times \omega} |q(t,x)|^2 dt dx.$$

Dans ce cas, il existe un contrôle v pour (S) tel que

$$\|v\|_{L^2(Q)} \leq \sqrt{C_{\text{obs}}} |y^0|_{L^2(\Omega)}.$$

STRATÉGIE 1 : CONSTRUCTION EXPLICITE DU CONTRÔLE

(Lebeau-Robbiano, '95)

- Preuve d'une **mauvaise** inégalité d'observabilité **partielle**, c'est-à-dire sur les basses fréquences de l'opérateur $-\nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$.
- Celle-ci découle d'une inégalité spectrale pour l'opérateur elliptique $-\nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$.
- Celle-ci provient elle-même d'une inégalité de Carleman locale sur un opérateur elliptique augmenté du type

$$\partial_t^2 + \nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$$

- Construction du contrôle par un découpage de l'intervalle de temps ; utilisation de la dissipation parabolique.

STRATÉGIE 1 : CONSTRUCTION EXPLICITE DU CONTRÔLE

(Lebeau-Robbiano, '95)

- Preuve d'une **mauvaise** inégalité d'observabilité **partielle**, c'est-à-dire sur les basses fréquences de l'opérateur $-\nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$.
- Celle-ci découle d'une inégalité spectrale pour l'opérateur elliptique $-\nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$.
- Celle-ci provient elle-même d'une inégalité de Carleman locale sur un opérateur elliptique augmenté du type

$$\partial_t^2 + \nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$$

- Construction du contrôle par un découpage de l'intervalle de temps ; utilisation de la dissipation parabolique.

STRATÉGIE 2 : PREUVE DIRECTE DE L'INÉGALITÉ D'OBSERVABILITÉ

(Fursikov-Imanuvilov, '96)

- Preuve d'une inégalité de Carleman globale sur l'opérateur parabolique

$$\partial_t - \nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$$

INÉGALITÉ SPECTRALE

Soient $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \dots$ les valeurs propres de l'opérateur $-\nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$ avec CL de Dirichlet homogène et $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée des fonctions propres associées.

THÉORÈME (LEBEAU-ROBBIANO, '95)

Il existe $C > 0$ telle que pour tout $\mu > 0$

$$\sum_{\mu_i \leq \mu} |\alpha_i|^2 \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \int_{\omega} \left| \sum_{\mu_i \leq \mu} \alpha_i \phi_i(x) \right|^2 dx, \quad (\alpha_i)_i \subset \mathbb{R}.$$

INÉGALITÉ SPECTRALE

Soient $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k \dots$ les valeurs propres de l'opérateur $-\nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$ avec CL de Dirichlet homogène et $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la base Hilbertienne de $L^2(\Omega)$ formée des fonctions propres associées.

THÉORÈME (LEBEAU-ROBBIANO, '95)

Il existe $C > 0$ telle que pour tout $\mu > 0$

$$\sum_{\mu_i \leq \mu} |\alpha_i|^2 \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \int_{\omega} \left| \sum_{\mu_i \leq \mu} \alpha_i \phi_i(x) \right|^2 dx, \quad (\alpha_i)_i \subset \mathbb{R}.$$

THÉORÈME (OBSERVABILITÉ PARTIELLE)

Il existe $C > 0$ telle que toute solution du problème adjoint (S^) avec $q_F \in E_{\mu} = \text{Vect}(\phi_k, \mu_k \leq \mu)$, vérifie*

$$|q(0)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \frac{e^{C\sqrt{\mu}}}{T} \iint_{(0,T) \times \omega} |q(t,x)|^2 dt dx.$$

En utilisant les résultats précédents, on obtient directement un résultat de contrôlabilité pour des données contenant un nombre fini de modes propres de l'opérateur.

THÉORÈME (CONTRÔLABILITÉ PARTIELLE)

Pour $\mu > 0$ quelconque fixé, le système

$$(S_\mu) \begin{cases} \partial_t y - \nabla \cdot (\gamma \nabla y) = \Pi_{E_\mu}(1_\omega v) & \text{dans } Q = (0, T) \times \Omega \\ y = 0 & \text{sur } \Sigma = (0, T) \times \partial\Omega \\ y(0) = y^0 \in E_\mu \end{cases}$$

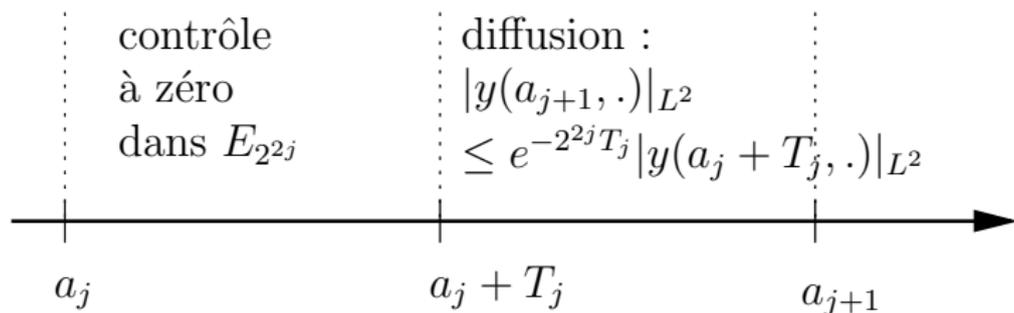
est exactement contrôlable à 0 avec un contrôle v qui vérifie

$$\|v\|_{L^2(Q)} \leq C \frac{e^{C\sqrt{\mu}}}{\sqrt{T}} |y^0|_{L^2(\Omega)}.$$

- On considère $E_{2^{2j}} = \text{Vect}(\phi_k, \mu_k \leq 2^{2j})$.
- On écrit $[0, T] = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} [a_j, a_{j+1}]$
 - $a_0 = 0, a_{j+1} = a_j + 2T_j$, pour tout $j \in \mathbb{N}$
 - $T_j = K2^{-j\rho}$ avec $\rho \in (0, 1)$
 - K choisi pour que $2 \sum_{j=0}^{\infty} T_j = T$

- On considère $E_{2^{2j}} = \text{Vect}(\phi_k, \mu_k \leq 2^{2j})$.
- On écrit $[0, T] = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} [a_j, a_{j+1}]$
 - $a_0 = 0, a_{j+1} = a_j + 2T_j$, pour tout $j \in \mathbb{N}$
 - $T_j = K2^{-j\rho}$ avec $\rho \in (0, 1)$
 - K choisi pour que $2 \sum_{j=0}^{\infty} T_j = T$

CONSTRUCTION DU CONTRÔLE COMPLET



Le contrôle ainsi obtenu *in fine* vérifie

$$\|v\|_{L^2(Q)} \leq C|y^0|_{L^2(\Omega)}.$$

COMMENT CALCULER NUMÉRIQUEMENT UN CONTRÔLE À ZÉRO
POUR (S) ?

- Pour les problèmes de contrôle approché à $\varepsilon > 0$ près :
(Glowinski-Lions, '94)

On écrit le système d'EDP qui donne le HUM contrôle

\implies Discrétisation \implies Résolution

Comment peut-on faire tendre $\varepsilon, \delta t, h$ vers 0 ?

COMMENT CALCULER NUMÉRIQUEMENT UN CONTRÔLE À ZÉRO POUR (S) ?

- Pour les problèmes de contrôle approché à $\varepsilon > 0$ près :
(Glowinski-Lions, '94)

On écrit le système d'EDP qui donne le HUM contrôle

\implies Discrétisation \implies Résolution

Comment peut-on faire tendre $\varepsilon, \delta t, h$ vers 0 ?

- Autre stratégie :

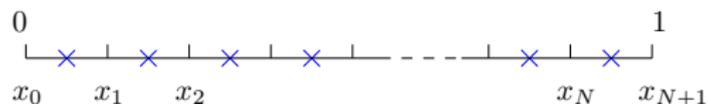
On discrétise d'abord le système (S)

\implies Ce système discret est-il contrôlable à zéro ?

\implies Si oui, peut-on évaluer le coût du contrôle en fonction de $h, \delta t$?

- 1 INTRODUCTION
- 2 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME SEMI-DISCRET EN ESPACE
- 3 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME COMPLÈTEMENT DISCRET
- 4 UN PEU D'EXPLORATION NUMÉRIQUE
- 5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

ON SE PLACE EN 1D
MAILLAGE UNIF. - DIFF. FINIES



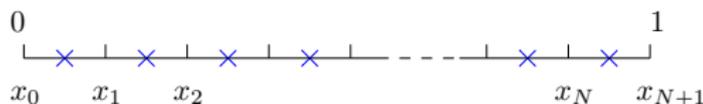
OK en multi-D cartésien
OK sur maillage régulier

$$\mathfrak{M} = (x_i)_{1 \leq i \leq N}$$

$$\overline{\mathfrak{M}} = (x_{i+\frac{1}{2}})_{0 \leq i \leq N}$$

ON SE PLACE EN 1D
 MAILLAGE UNIF. - DIFF. FINIES

OK en multi-D cartésien
 OK sur maillage régulier



$$\mathfrak{M} = (x_i)_{1 \leq i \leq N}$$

$$\overline{\mathfrak{M}} = (x_{i+\frac{1}{2}})_{0 \leq i \leq N}$$

- Fonctions discrètes

$$u = (u_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}, \quad v = (v_{i+\frac{1}{2}})_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^{\overline{\mathfrak{M}}}.$$

- Dérivées discrètes (CL Dirichlet $\Leftrightarrow u_0 = u_{N+1} = 0$)

$$\left((Du)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^{\overline{\mathfrak{M}}}, \quad \left((\bar{D}v)_i = \frac{v_{i+\frac{1}{2}} - v_{i-\frac{1}{2}}}{h} \right)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}},$$

- Intégrales discrètes et normes

$$\int_{\Omega} u = \sum_{i=1}^N h u_i, \quad \int_{\Omega} v = \sum_{i=0}^N h v_{i+\frac{1}{2}}, \quad \|u\|_{L^2(Q)}^2 = \int_0^T \sum_{i=1}^N h |u_i(t)|^2 dt, \dots$$

On note $\mathcal{A}^m = -\bar{D}(\gamma D \cdot)$ et on considère le système d'EDO suivant

$$(S_h) \begin{cases} \partial_t y + \mathcal{A}^m y = 1_\omega v & \text{dans } Q = (0, T) \times \mathfrak{M} \\ y_0 = y_{N+1} = 0 \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

On note $\mathcal{A}^m = -\bar{D}(\gamma D \cdot)$ et on considère le système d'EDO suivant

$$(S_h) \begin{cases} \partial_t y + \mathcal{A}^m y = 1_\omega v & \text{dans } Q = (0, T) \times \mathfrak{M} \\ y_0 = y_{N+1} = 0 \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

PROBLÈME DE CONTRÔLE À ZÉRO

- A maillage fixé, peut-on trouver $v \in L^2(Q)$ tel que $y(T) = 0$?
- Si oui, a-t'on $\|v\|_{L^2(Q)} \leq C|y^0|_{L^2(\Omega)}$ uniformément en h ?

On note $\mathcal{A}^m = -\bar{D}(\gamma D \cdot)$ et on considère le système d'EDO suivant

$$(S_h) \begin{cases} \partial_t y + \mathcal{A}^m y = 1_\omega v & \text{dans } Q = (0, T) \times \mathfrak{M} \\ y_0 = y_{N+1} = 0 \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

PROBLÈME DE CONTRÔLE À ZÉRO

- A maillage fixé, peut-on trouver $v \in L^2(Q)$ tel que $y(T) = 0$?
- Si oui, a-t'on $\|v\|_{L^2(Q)} \leq C|y^0|_{L^2(\Omega)}$ uniformément en h ?

QUELQUES RÉFÉRENCES

- **(Lopez-Zuazua, '98)** : OUI - 1D, coeffs constants, maillage uniforme, contrôle frontière. Utilisent la forme explicite des éléments propres de la matrice du Laplacien.
- **(Zuazua, '03, '06)** : contre-exemple en dimension 2 : existence de modes propres localisés en espace associés à des très hautes fréquences.
- **(Labbé-Trélat, '06)** : Cadre plus général mais résultat moins précis.

LE CONTRE-EXEMPLE EN DIMENSION 2

(Kavian '01, Zuazua '03)

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE : $\Omega =]0, 1[^2$. Maillage carré uniforme.

(Kavian '01, Zuazua '03)

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE : $\Omega =]0, 1[^2$. Maillage carré uniforme.

COEFFICIENTS CONSTANTS : $\gamma(x) = 1$

Matrice de l'opérateur $\mathcal{A}^m = -\bar{D}D =$ matrice du Laplacien standard.

$$(-\bar{D}Dy)_{i,j} = \frac{4y_{i,j} - y_{i-1,j} - y_{i+1,j} - y_{i,j-1} - y_{i,j+1}}{h^2}.$$

(Kavian '01, Zuazua '03)

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE : $\Omega =]0, 1[^2$. Maillage carré uniforme.

COEFFICIENTS CONSTANTS : $\gamma(x) = 1$

Matrice de l'opérateur $\mathcal{A}^m = -\bar{D}D =$ matrice du Laplacien standard.

$$(-\bar{D}Dy)_{i,j} = \frac{4y_{i,j} - y_{i-1,j} - y_{i+1,j} - y_{i,j-1} - y_{i,j+1}}{h^2}.$$

UN VECTEUR PROPRE LOCALISÉ EN ESPACE

On prend $\psi_{i,j} = (-1)^i \delta_{i,j}$.

$$(-\bar{D}D\psi)_{i,j} = \frac{4}{h^2}(-1)^i \delta_{i,j} = \frac{4}{h^2} \psi_{i,j}.$$

(Kavian '01, Zuazua '03)

GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE : $\Omega =]0, 1[^2$. Maillage carré uniforme.

COEFFICIENTS CONSTANTS : $\gamma(x) = 1$

Matrice de l'opérateur $\mathcal{A}^m = -\bar{D}D =$ matrice du Laplacien standard.

$$(-\bar{D}Dy)_{i,j} = \frac{4y_{i,j} - y_{i-1,j} - y_{i+1,j} - y_{i,j-1} - y_{i,j+1}}{h^2}.$$

UN VECTEUR PROPRE LOCALISÉ EN ESPACE

On prend $\psi_{i,j} = (-1)^i \delta_{i,j}$.

$$(-\bar{D}D\psi)_{i,j} = \frac{4}{h^2}(-1)^i \delta_{i,j} = \frac{4}{h^2}\psi_{i,j}.$$

SUPPOSONS QUE ω NE RENCONTRE PAS LA DIAGONALE

Pour tout contrôle v , la solution de (S) vérifie

$$\frac{d}{dt}(y(t), \psi)_{L^2(\Omega)} = (y^0, \psi)_{L^2(\Omega)} e^{-\frac{4}{h^2}t}.$$

Bilan : Le mode selon ψ n'est pas contrôlable. Mais c'est un mode très haute fréquence $\sim \frac{4}{h^2}$.

THÉORÈME

Il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $0 < h < h_0$, il existe un contrôle v pour le système (S_h) vérifiant

- *La solution y de (S_h) est telle que $|y(T)|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{-\frac{C}{h^2}} |y^0|_{L^2(\Omega)}$.*
- *On a l'estimation $\|v\|_{L^2(Q)} \leq C |y^0|_{L^2(\Omega)}$.*

De façon plus précise :

- Il existe une proportion du spectre (ind. de h) exactement contrôlable à zéro uniformément par rapport à h .

THÉORÈME

Il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $0 < h < h_0$, il existe un contrôle v pour le système (S_h) vérifiant

- La solution y de (S_h) est telle que $|y(T)|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{-\frac{C}{h^2}} |y^0|_{L^2(\Omega)}$.
- On a l'estimation $\|v\|_{L^2(Q)} \leq C |y^0|_{L^2(\Omega)}$.

De façon plus précise :

- Il existe une proportion du spectre (ind. de h) exactement contrôlable à zéro uniformément par rapport à h .

THÉORÈME

Il existe $h_0 > 0$ et $C_{\text{obs}} > 0$ tel que pour tout $0 < h < h_0$, toute solution du problème adjoint (S_h^*) vérifie

$$|q(0)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{\text{obs}} \iint_{(0,T) \times \omega} |q(t,x)|^2 dt dx + C e^{-\frac{C}{h^2}} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2.$$

- On choisit n'importe quelle fonction $\phi(h) \gg e^{-C/h^2}$, typiquement $\phi(h) = h^\beta$ ($\beta > 0$ quelconque).

- On choisit n'importe quelle fonction $\phi(h) \gg e^{-C/h^2}$, typiquement $\phi(h) = h^\beta$ ($\beta > 0$ quelconque).
- Pour toute donnée initiale discrète $y^0 \in \mathbb{R}^m$, on définit

$$q_F \in \mathbb{R}^m \xrightarrow{J^m} \frac{1}{2} \int_0^T |q(t)|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + (y^0, q(0))_{L^2(\Omega)},$$

où q est la solution du problème adjoint pour la donnée finale q_F .

- On choisit n'importe quelle fonction $\phi(h) \gg e^{-C/h^2}$, typiquement $\phi(h) = h^\beta$ ($\beta > 0$ quelconque).
- Pour toute donnée initiale discrète $y^0 \in \mathbb{R}^m$, on définit

$$q_F \in \mathbb{R}^m \xrightarrow{J^m} \frac{1}{2} \int_0^T |q(t)|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + (y^0, q(0))_{L^2(\Omega)},$$

où q est la solution du problème adjoint pour la donnée finale q_F .

PROPOSITION

- La fonctionnelle J^m admet un unique minimiseur $q_{opt} \in \mathbb{R}^m$.
- Si on pose $v = 1_\omega q$ où q est la solution du problème adjoint pour la donnée finale q_{opt} .
 - $|y(T)|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C_{obs}} \sqrt{\phi(h)} |y^0|_{L^2(\Omega)}$.
 - $\|v\|_{L^2(Q)} \leq \sqrt{C_{obs}} |y^0|_{L^2(\Omega)}$.

- On choisit n'importe quelle fonction $\phi(h) \gg e^{-C/h^2}$, typiquement $\phi(h) = h^\beta$ ($\beta > 0$ quelconque).
- Pour toute donnée initiale discrète $y^0 \in \mathbb{R}^m$, on définit

$$q_F \in \mathbb{R}^m \xrightarrow{J^m} \frac{1}{2} \int_0^T |q(t)|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + (y^0, q(0))_{L^2(\Omega)},$$

où q est la solution du problème adjoint pour la donnée finale q_F .

PROPOSITION

- La fonctionnelle J^m admet un unique minimiseur $q_{opt} \in \mathbb{R}^m$.
- Si on pose $v = 1_\omega q$ où q est la solution du problème adjoint pour la donnée finale q_{opt} .
 - $|y(T)|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{C_{obs}} \sqrt{\phi(h)} |y^0|_{L^2(\Omega)}$.
 - $\|v\|_{L^2(Q)} \leq \sqrt{C_{obs}} |y^0|_{L^2(\Omega)}$.
- Minimisation de $J^m \implies$ gradient conjugué.
- (Labbé-Trélat '06) : Résultat similaire mais la valeur de β est imposée par les propriétés du schéma et de l'équation.

$$J^m(q_F) = \frac{1}{2} \int_0^T |q(t)|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + \underbrace{(y^0, q(0))}_{=(e^{-TA^m} y^0, q_F)}_{L^2(\Omega)} .$$

COMMENT CALCULER LE GRADIENT DE J^m ?

$$J^m(q_F) = \frac{1}{2} \int_0^T |q(t)|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + \underbrace{(y^0, q(0))_{L^2(\Omega)}}_{=(e^{-T\mathcal{A}^m} y^0, q_F)_{L^2(\Omega)}} .$$

COMMENT CALCULER LE GRADIENT DE J^m ?

- ❶ q_F est donné. On calcule la solution q du problème adjoint

$$-\partial_t q + \mathcal{A}^m q = 0, \quad q(T) = q_F.$$

- ❷ On résout ensuite le problème direct

$$\partial_t w + \mathcal{A}^m w = 1_\omega q(t), \quad w(0) = 0.$$

- ❸ Alors pour tout $\tilde{q}_F \in \mathbb{R}^m$, on a

$$\iint_{]0, T[\times \omega} q(t, x) \tilde{q}(t, x) dt dx = (w(T), \tilde{q}_F)_{L^2(\Omega)}.$$

$$J^m(q_F) = \frac{1}{2} \int_0^T |q(t)|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + \underbrace{(y^0, q(0))_{L^2(\Omega)}}_{=(e^{-T\mathcal{A}^m} y^0, q_F)_{L^2(\Omega)}} .$$

COMMENT CALCULER LE GRADIENT DE J^m ?

- ❶ q_F est donné. On calcule la solution q du problème adjoint

$$-\partial_t q + \mathcal{A}^m q = 0, \quad q(T) = q_F.$$

- ❷ On résout ensuite le problème direct

$$\partial_t w + \mathcal{A}^m w = 1_\omega q(t), \quad w(0) = 0.$$

- ❸ Alors pour tout $\tilde{q}_F \in \mathbb{R}^m$, on a

$$\iint_{]0, T[\times \omega} q(t, x) \tilde{q}(t, x) dt dx = (w(T), \tilde{q}_F)_{L^2(\Omega)}.$$

OPÉRATEUR HUM (HILBERT UNIQUENESS METHOD, J.L.LIONS)

L'opérateur $\Lambda^m : q_F \in \mathbb{R}^m \mapsto w(T) \in \mathbb{R}^m$ défini ci-dessus est appelé l'opérateur HUM associé au problème et on a

$$\nabla J^m(q_F) = \Lambda^m q_F + \phi(h) q_F + e^{-T\mathcal{A}^m} y_0.$$

RÉSUMÉ : Pour calculer le contrôle discret $v = 1_\omega q$, on doit résoudre

$$(\Lambda^m + \phi(h)\text{Id}) q_F = -e^{-T\mathcal{A}^m} y^0. \quad (\star)$$

RÉSUMÉ : Pour calculer le contrôle discret $v = 1_\omega q$, on doit résoudre

$$(\Lambda^m + \phi(h)\text{Id}) q_F = -e^{-T\mathcal{A}^m} y^0. \quad (\star)$$

GRADIENT CONJUGUÉ

- Raisonnable car $\Lambda^m + \phi(h)\text{Id}$ est SDP.
- **MAIS** : La matrice de Λ^m n'est **pas aisément accessible** et elle est **pleine**.
- En réalité chaque produit matrice-vecteur est donné par :
 - On résout un problème rétrograde de $t = T$ à $t = 0$.
 - On résout un problème direct de $t = 0$ à $t = T$.
- Le système est très mal conditionné, en particulier quand $\phi(h)$ est petit, ou quand ω est petit.
- Trouver un préconditionneur efficace est un problème ouvert important.

RÉSUMÉ : Pour calculer le contrôle discret $v = 1_\omega q$, on doit résoudre

$$(\Lambda^m + \phi(h)\text{Id}) q_F = -e^{-T\mathcal{A}^m} y^0. \quad (\star)$$

GRADIENT CONJUGUÉ

- Raisonnable car $\Lambda^m + \phi(h)\text{Id}$ est SDP.
- **MAIS** : La matrice de Λ^m n'est **pas aisément accessible** et elle est **pleine**.
- En réalité chaque produit matrice-vecteur est donné par :
 - On résout un problème rétrograde de $t = T$ à $t = 0$.
 - On résout un problème direct de $t = 0$ à $t = T$.
- Le système est très mal conditionné, en particulier quand $\phi(h)$ est petit, ou quand ω est petit.
- Trouver un préconditionneur efficace est un problème ouvert important.

REMARQUE IMPORTANTE : $v = 1_\omega q$ est borné L^2 unif.en h .

BIEN QUE la solution q_F de (\star) satisfait

$$\|q_F\|_{L^2(\Omega)} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\phi(h)}} \longrightarrow \infty.$$

EXEMPLES NUMÉRIQUES

DYNAMIQUE DU SYSTÈME CONTRÔLÉ

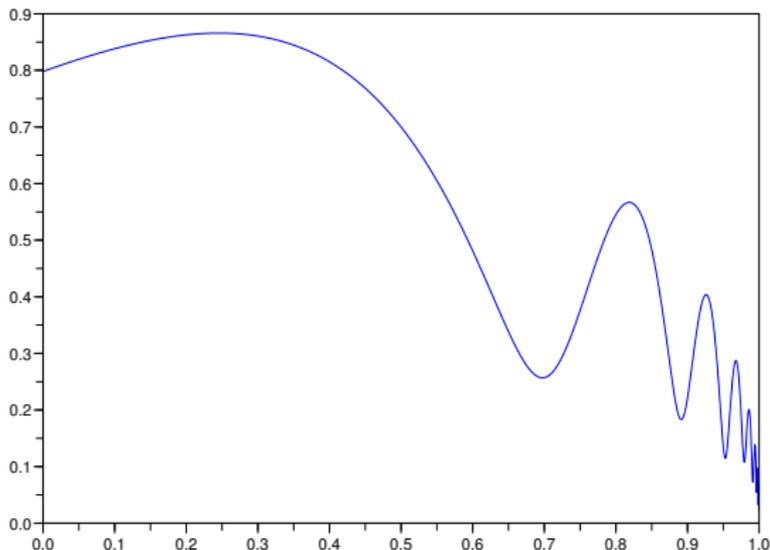
- 100 mailles ; $T = 1$; Domaine de contrôle $\omega =]0.5, 0.8[$; $\phi(h) = h^4$.
- Donnée initiale $y^0 = \sin(\pi x)^{10}$; Coeff. de diffusion $\gamma(x) = 0.1$.
- 218 it de GC (tolérance = 10^{-8}).
- Distance à la cible atteinte $\sim 10^{-5}$. Coût du contrôle ~ 0.66 .

EXEMPLES NUMÉRIQUES

DYNAMIQUE DU SYSTÈME CONTRÔLÉ

- 100 mailles ; $T = 1$; Domaine de contrôle $\omega =]0.5, 0.8[$; $\phi(h) = h^4$.
- Donnée initiale $y^0 = \sin(\pi x)^{10}$; Coeff. de diffusion $\gamma(x) = 0.1$.
- 218 it de GC (tolérance = 10^{-8}).
- Distance à la cible atteinte $\sim 10^{-5}$. Coût du contrôle ~ 0.66 .

NORME $L^2(\omega)$ DU CONTRÔLE EN FONCTION DE t



EXEMPLES NUMÉRIQUES

DYNAMIQUE DU SYSTÈME CONTRÔLÉ

- 100 mailles (non uniforme!); $T = 1$; $\omega =]0.4, 0.6[$; $\phi(h) = h^4$.
- Coeff. de diffusion $10^{-2} < \gamma(x) < 0.2$.
- 183 it de GC (tolérance = 10^{-8}).
- Distance à la cible atteinte $\sim 10^{-4}$. Coût du contrôle ~ 2.52 .

EXEMPLES NUMÉRIQUES

DE L'INFLUENCE DU PAS D'ESPACE

- Mêmes données que précédemment ($\phi(h) = h^4$)
- On fait seulement varier le pas d'espace.

| $N = 1/h$ | nb it GC | distance à la cible | coût du contrôle |
|--------------|----------------|-----------------------------|------------------|
| 50 | 87 | $4,2510^{-5}$ | 0.622 |
| 100 | 218 | 10^{-5} | 0.66 |
| 200 | 617 | $2,1 \cdot 10^{-6}$ | 0.686 |
| 400 | 1869 | $5 \cdot 10^{-7}$ | 0.797 |
| 800 | 6030 | $1.2 \cdot 10^{-7}$ | 0.717 |
| comportement | $\sim N^{1.6}$ | $\sim h^2 = \sqrt{\phi(h)}$ | |

EXEMPLES NUMÉRIQUES

DE L'INFLUENCE DU PAS D'ESPACE

- Mêmes données que précédemment ($\phi(h) = h^2$)
- On fait seulement varier le pas d'espace.

| $N = 1/h$ | nb it GC | distance à la cible | coût du contrôle |
|--------------|----------|---------------------------|------------------|
| 50 | 25 | $3,510^{-3}$ | 0.467 |
| 100 | 40 | $1,610^{-3}$ | 0.522 |
| 200 | 65 | 7.5710^{-4} | 0.564 |
| 400 | 110 | 3.4810^{-4} | 0.596 |
| 800 | 196 | 1.610^{-4} | 0.621 |
| comportement | $\sim N$ | $\sim h = \sqrt{\phi(h)}$ | |

EXEMPLES NUMÉRIQUES

DE L'INFLUENCE DU PAS D'ESPACE

- Mêmes données que précédemment ($\phi(h) = h$)
- On fait seulement varier le pas d'espace.

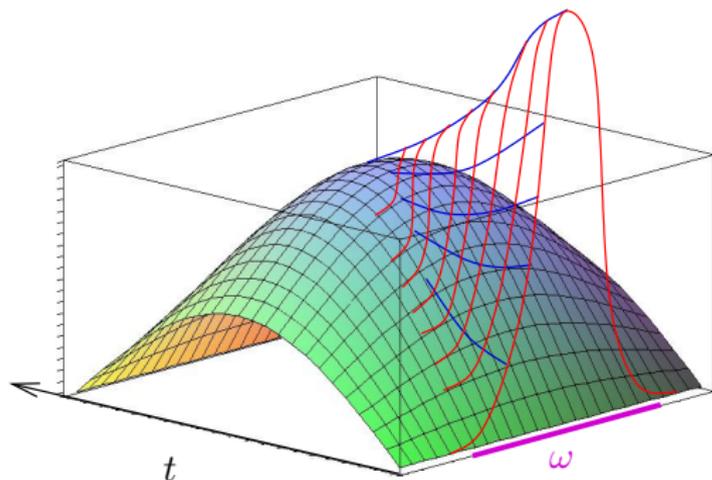
| $N = 1/h$ | nb it GC | distance à la cible | coût du contrôle |
|--------------|-------------------|---|------------------|
| 50 | 9 | 2.710^{-2} | 0.265 |
| 100 | 11 | 2.010^{-2} | 0.311 |
| 200 | 13 | 1.4410^{-2} | 0.356 |
| 400 | 15 | 1.010^{-2} | 0.398 |
| 800 | 18 | 6.910^{-3} | 0.434 |
| comportement | $\sim \text{cte}$ | $\sim h^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\phi(h)}$ | |

INÉGALITÉ DE CARLEMAN GLOBALE POUR UN OP. ELLIPTIQUE

On construit une fonction poids ψ dans $\mathcal{C}^2(\overline{Q}, \mathbb{R})$, telle que

$$|\nabla\psi| \geq c \text{ et } \psi > 0 \text{ dans } Q, \quad \partial_{n_x}\psi(t, x) < 0 \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega,$$

$$\partial_t\psi \geq c \text{ sur } \{0\} \times (\Omega \setminus \omega), \quad \nabla_x\psi = 0 \text{ et } \partial_t\psi \leq -c \text{ sur } \{T\} \times \Omega.$$



INÉGALITÉ DE CARLEMAN GLOBALE POUR UN OP. ELLIPTIQUE

On construit une fonction poids ψ dans $\mathcal{C}^2(\overline{Q}, \mathbb{R})$, telle que

$$|\nabla\psi| \geq c \text{ et } \psi > 0 \text{ dans } Q, \quad \partial_{n_x}\psi(t, x) < 0 \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega,$$

$$\partial_t\psi \geq c \text{ sur } \{0\} \times (\Omega \setminus \omega), \quad \nabla_x\psi = 0 \text{ et } \partial_t\psi \leq -c \text{ sur } \{T\} \times \Omega.$$

On pose $\varphi = e^{\lambda\psi}$ et on considère l'opérateur $P = -\partial_t^2 - \nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$

THÉORÈME

Pour $\lambda \geq 1$ assez grand, il existe $C > 0$ et $s_0 \geq 1$ tel que

$$s^3 \|e^{s\varphi} u\|_{L^2(Q)}^2 + s \|e^{s\varphi} \nabla u\|_{L^2(Q)}^2 + s |e^{s\varphi(0, \cdot)} \partial_t u(0, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+ s e^{2s\varphi(T)} |\partial_t u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + s^3 e^{2s\varphi(T)} |u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq C \left(\|e^{s\varphi} P u\|_{L^2(Q)}^2 + s e^{2s\varphi(T)} |\nabla_x u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \right.$$

$$\left. + s |e^{s\varphi(0, \cdot)} \partial_t u(0, \cdot)|_{L^2(\omega)}^2 \right),$$

pour tout $s \geq s_0$, et tout $u \in H^2(Q)$, avec $u(0) = 0$, et $u = 0$ sur $\partial\Omega$.

INÉGALITÉ DE CARLEMAN GLOBALE POUR UN OP. ELLIPTIQUE

On construit une fonction poids ψ dans $\mathcal{C}^2(\overline{Q}, \mathbb{R})$, telle que

$$|\nabla\psi| \geq c \text{ et } \psi > 0 \text{ dans } Q, \quad \partial_{n_x}\psi(t, x) < 0 \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega,$$

$$\partial_t\psi \geq c \text{ sur } \{0\} \times (\Omega \setminus \omega), \quad \nabla_x\psi = 0 \text{ et } \partial_t\psi \leq -c \text{ sur } \{T\} \times \Omega.$$

On pose $\varphi = e^{\lambda\psi}$ et on considère l'opérateur $P = -\partial_t^2 - \nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$

- Si $u(0) = 0$, $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et $Pu = 0$

$$s^3 e^{2s\varphi(T)} |u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq C \left(s e^{2s\varphi(T)} |\nabla_x u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + s |e^{s\varphi(0, \cdot)} \partial_t u(0, \cdot)|_{L^2(\omega)}^2 \right).$$

INÉGALITÉ DE CARLEMAN GLOBALE POUR UN OP. ELLIPTIQUE

On construit une fonction poids ψ dans $\mathcal{C}^2(\overline{Q}, \mathbb{R})$, telle que

$$|\nabla\psi| \geq c \text{ et } \psi > 0 \text{ dans } Q, \quad \partial_{n_x}\psi(t, x) < 0 \text{ dans } (0, T) \times \partial\Omega,$$

$$\partial_t\psi \geq c \text{ sur } \{0\} \times (\Omega \setminus \omega), \quad \nabla_x\psi = 0 \text{ et } \partial_t\psi \leq -c \text{ sur } \{T\} \times \Omega.$$

On pose $\varphi = e^{\lambda\psi}$ et on considère l'opérateur $P = -\partial_t^2 - \nabla \cdot (\gamma \nabla \cdot)$

- Si $u(0) = 0$, $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et $Pu = 0$

$$s^3 e^{2s\varphi(T)} |u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq C \left(s e^{2s\varphi(T)} |\nabla_x u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + s |e^{s\varphi(0, \cdot)} \partial_t u(0, \cdot)|_{L^2(\omega)}^2 \right).$$

CHOIX D'UN u PARTICULIER : Pour $\mu > 0$ et $(\alpha_j)_j \subset \mathbb{R}$

$$u(t, x) = \sum_{\mu_j \leq \mu} \alpha_j \frac{\sinh(\sqrt{\mu_j} t)}{\sqrt{\mu_j}} \phi_j(x) \implies Pu = 0.$$

$$s^3 e^{2s\varphi(T)} |u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(s e^{2s\varphi(T)} |\nabla_x u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + s e^{2s \sup \varphi(0)} |\partial_t u(0, \cdot)|_{L^2(\omega)}^2 \right).$$

avec $u(t, x) = \sum_{\mu_j \leq \mu} \alpha_j \frac{\sinh(\sqrt{\mu_j} t)}{\sqrt{\mu_j}} \phi_j(x), \quad \mu > 0, \quad (\alpha_j)_j \subset \mathbb{R}.$

$$s^3 e^{2s\varphi(T)} |u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(s e^{2s\varphi(T)} |\nabla_x u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + s e^{2s \sup \varphi(0)} |\partial_t u(0, \cdot)|_{L^2(\omega)}^2 \right).$$

avec $u(t, x) = \sum_{\mu_j \leq \mu} \alpha_j \frac{\sinh(\sqrt{\mu_j} t)}{\sqrt{\mu_j}} \phi_j(x), \quad \mu > 0, \quad (\alpha_j)_j \subset \mathbb{R}.$

EVALUATION DES DIFFÉRENTS TERMES

$$|u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{\mu_j \leq \mu} |\alpha_j|^2 \left(\frac{\sinh(\sqrt{\mu_j} T)}{\sqrt{\mu_j}} \right)^2 \geq \frac{1}{\mu} \left(\sum_{\mu_j \leq \mu} |\sinh(\sqrt{\mu_j} T)|^2 |\alpha_j|^2 \right).$$

$$s^3 e^{2s\varphi(T)} |u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(s e^{2s\varphi(T)} |\nabla_x u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + s e^{2s \sup \varphi(0)} |\partial_t u(0, \cdot)|_{L^2(\omega)}^2 \right).$$

avec $u(t, x) = \sum_{\mu_j \leq \mu} \alpha_j \frac{\sinh(\sqrt{\mu_j} t)}{\sqrt{\mu_j}} \phi_j(x), \quad \mu > 0, \quad (\alpha_j)_j \subset \mathbb{R}.$

EVALUATION DES DIFFÉRENTS TERMES

$$|u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{\mu_j \leq \mu} |\alpha_j|^2 \left(\frac{\sinh(\sqrt{\mu_j} T)}{\sqrt{\mu_j}} \right)^2 \geq \frac{1}{\mu} \left(\sum_{\mu_j \leq \mu} |\sinh(\sqrt{\mu_j} T)|^2 |\alpha_j|^2 \right).$$

$$|\nabla_x u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C' \left(\sum_{\mu_j \leq \mu} (\sinh(\sqrt{\mu_j} T))^2 |\alpha_j|^2 \right).$$

$$s^3 e^{2s\varphi(T)} |u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(s e^{2s\varphi(T)} |\nabla_x u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + s e^{2s \sup \varphi(0)} |\partial_t u(0, \cdot)|_{L^2(\omega)}^2 \right).$$

avec $u(t, x) = \sum_{\mu_j \leq \mu} \alpha_j \frac{\sinh(\sqrt{\mu_j} t)}{\sqrt{\mu_j}} \phi_j(x), \quad \mu > 0, \quad (\alpha_j)_j \subset \mathbb{R}.$

EVALUATION DES DIFFÉRENTS TERMES

$$|u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 = \sum_{\mu_j \leq \mu} |\alpha_j|^2 \left(\frac{\sinh(\sqrt{\mu_j} T)}{\sqrt{\mu_j}} \right)^2 \geq \frac{1}{\mu} \left(\sum_{\mu_j \leq \mu} |\sinh(\sqrt{\mu_j} T)|^2 |\alpha_j|^2 \right).$$

$$|\nabla_x u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C' \left(\sum_{\mu_j \leq \mu} (\sinh(\sqrt{\mu_j} T))^2 |\alpha_j|^2 \right).$$

$$|\partial_t u(0, \cdot)|_{L^2(\omega)}^2 = \int_{\omega} \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} \alpha_j \phi_j(x) \right|^2 dx.$$

$$s^3 e^{2s\varphi(T)} |u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left(s e^{2s\varphi(T)} |\nabla_x u(T, \cdot)|_{L^2(\Omega)}^2 + s e^{2s \sup \varphi(0)} |\partial_t u(0, \cdot)|_{L^2(\omega)}^2 \right).$$

avec $u(t, x) = \sum_{\mu_j \leq \mu} \alpha_j \frac{\sinh(\sqrt{\mu_j} t)}{\sqrt{\mu_j}} \phi_j(x)$, $\mu > 0$, $(\alpha_j)_j \subset \mathbb{R}$.

BILAN : On choisit $s \sim C\sqrt{\mu}$ et on trouve

$$\left(\sum_{\mu_j \leq \mu} |\alpha_j|^2 \right) \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \int_{\omega} \left| \sum_{\mu_j \leq \mu} \alpha_j \phi_j(x) \right|^2 dx.$$

BUTS :

- Obtention d'une inégalité de Lebeau-Robbiano discrète.
- Pour cela, on va prouver une inégalité de Carleman discrète pour l'opérateur elliptique semi-discret

$$P = -\partial_t^2 - \bar{D}(\gamma D \cdot).$$

BUTS :

- Obtention d'une inégalité de Lebeau-Robbiano discrète.
- Pour cela, on va prouver une inégalité de Carleman discrète pour l'opérateur elliptique semi-discret

$$P = -\partial_t^2 - \bar{D}(\gamma D \cdot).$$

CE QUI MARCHE À L'IDENTIQUE :

- Si on a Carleman discret : la preuve de l'inégalité de Lebeau-Robbiano sera la même.
- Si on a l'inégalité de Lebeau-Robbiano discrète : preuve de l'inégalité d'observabilité partielle similaire.
- Ensuite, construction du contrôle semi-discret identique.

BUTS :

- Obtention d'une inégalité de Lebeau-Robbiano discrète.
- Pour cela, on va prouver une inégalité de Carleman discrète pour l'opérateur elliptique semi-discret

$$P = -\partial_t^2 - \bar{D}(\gamma D \cdot).$$

CE QUI MARCHE À L'IDENTIQUE :

- Si on a Carleman discret : la preuve de l'inégalité de Lebeau-Robbiano sera la même.
- Si on a l'inégalité de Lebeau-Robbiano discrète : preuve de l'inégalité d'observabilité partielle similaire.
- Ensuite, construction du contrôle semi-discret identique.

LES DIFFICULTÉS :

- L'inégalité de Lebeau-Robbiano discrète est **fausse** sans hypothèse supplémentaire.
- L'inégalité de Carleman discrète ne peut donc pas être vraie non plus en toute généralité.

Des restrictions **vont nécessairement apparaître** dans la preuve.

Soit $\mathcal{A}^{\mathfrak{M}}$ l'opérateur elliptique discret $\mathcal{A}^{\mathfrak{M}} := -\bar{D}(\gamma D \cdot)$ défini sur un maillage \mathfrak{M} constitué de N points. On note $(\mu_j^{\mathfrak{M}})_{1 \leq j \leq N}$ ses valeurs propres et $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$ la base $L^2(\Omega)$ -orthonormale associée.

Soit $\mathcal{A}^{\mathfrak{M}}$ l'opérateur elliptique discret $\mathcal{A}^{\mathfrak{M}} := -\bar{D}(\gamma D \cdot)$ défini sur un maillage \mathfrak{M} constitué de N points. On note $(\mu_j^{\mathfrak{M}})_{1 \leq j \leq N}$ ses valeurs propres et $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$ la base $L^2(\Omega)$ -orthonormale associée.

INÉGALITÉ ATTENDUE

$$\sum_{\substack{\mu_k \in \mu^{\mathfrak{M}} \\ \mu_k \leq \mu}} |\alpha_k|^2 \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \int_{\omega} \left| \sum_{\substack{\mu_k \in \mu^{\mathfrak{M}} \\ \mu_k \leq \mu}} \alpha_k \phi_k \right|^2, \quad \forall (\alpha_k)_{1 \leq k \leq N} \in \mathbb{R}^N.$$

RAPPEL : $\int_{\omega} u = \sum_{x_i \in \omega} h u(x_i) \leftarrow$ somme de taille $N_{\omega} = \text{Card}(\omega \cap \mathfrak{M})$

Soit $\mathcal{A}^{\mathfrak{M}}$ l'opérateur elliptique discret $\mathcal{A}^{\mathfrak{M}} := -\bar{D}(\gamma D \cdot)$ défini sur un maillage \mathfrak{M} constitué de N points. On note $(\mu_j^{\mathfrak{M}})_{1 \leq j \leq N}$ ses valeurs propres et $(\phi_j)_{1 \leq j \leq N}$ la base $L^2(\Omega)$ -orthonormale associée.

INÉGALITÉ ATTENDUE

$$\sum_{\substack{\mu_k \in \mu^{\mathfrak{M}} \\ \mu_k \leq \mu}} |\alpha_k|^2 \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \int_{\omega} \left| \sum_{\substack{\mu_k \in \mu^{\mathfrak{M}} \\ \mu_k \leq \mu}} \alpha_k \phi_k \right|^2, \quad \forall (\alpha_k)_{1 \leq k \leq N} \in \mathbb{R}^N.$$

RAPPEL : $\int_{\omega} u = \sum_{x_i \in \omega} h u(x_i) \Leftarrow$ somme de taille $N_{\omega} = \text{Card}(\omega \cap \mathfrak{M})$

REMARQUE FONDAMENTALE

Pour des raisons de dimension cette inégalité ne peut être vraie, au mieux, que dans un sous-espace de \mathbb{R}^N de dimension N_{ω}

On peut espérer qu'elle soit vraie pour les N_{ω} premiers modes propres.

$$\text{proportion constante du spectre} \sim \frac{|\omega|}{|\Omega|} \Rightarrow \mu \lesssim \frac{1}{h^2} \frac{|\omega|}{|\Omega|}.$$

THÉORÈME

Il existe $C > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ et $h_0 > 0$ tels que, dès que $h \leq h_0$, on a l'inégalité suivante

$$\sum_{\substack{\mu_k \in \mu^{\mathfrak{M}} \\ \mu_k \leq \mu}} |\alpha_k|^2 \leq C e^{C\sqrt{\mu}} \int_{\omega} \left| \sum_{\substack{\mu_k \in \mu^{\mathfrak{M}} \\ \mu_k \leq \mu}} \alpha_k \phi_k \right|^2, \quad \forall (\alpha_k)_{1 \leq k \leq N} \subset \mathbb{R},$$

pour tout $0 < \mu \leq \frac{\varepsilon_1}{h^2}$.

INÉGALITÉ D'OBSERVABILITÉ PARTIELLE

- On obtient la même inégalité d'observabilité partielle en $\frac{e^{C\sqrt{\mu}}}{T}$, uniformément en h , pour les $\mu \leq \frac{\varepsilon_1}{h^2}$.

CONTRÔLABILITÉ À ZÉRO

- On montre la contrôlabilité exacte à zéro pour tous les modes inférieurs à $\frac{\varepsilon_1}{h^2}$, avec un contrôle uniformément borné en h .
- Les autres modes sont naturellement dissipés exponentiellement, ce qui montre la contrôlabilité à zéro à une distance $e^{-\frac{C}{h^2}}$ près.

IDÉE DE LA PREUVE POUR LE PROBLÈME CONTINU 1D :

- Estimations à poids exponentiels : $\rho = e^{s\varphi} = e^{se^{\lambda\psi}}$.
- On pose $f = -Pu = \partial_t^2 u + \partial_x(\gamma\partial_x u)$, et $u = \rho v$.

$$\rho^{-1} (\partial_t^2(\rho v) + \partial_x(\gamma\partial_x(\rho v))) = \rho^{-1} f.$$

IDÉE DE LA PREUVE POUR LE PROBLÈME CONTINU 1D :

- Estimations à poids exponentiels : $\rho = e^{s\varphi} = e^{se^{\lambda\psi}}$.
- On pose $f = -Pu = \partial_t^2 u + \partial_x(\gamma \partial_x u)$, et $u = \rho v$.

$$\rho^{-1} (\partial_t^2(\rho v) + \partial_x(\gamma \partial_x(\rho v))) = \rho^{-1} f.$$

- On développe les dérivées ($\gamma = \text{cte} = 1$) en posant $r = \rho^{-1}$

$$\underbrace{\partial_t^2 v + \partial_x^2 v + r(\partial_t^2 \rho)v + r(\partial_x^2 \rho)v}_{=Av} + \underbrace{2r(\partial_t \rho)(\partial_t v) + r(\partial_x \rho)(\partial_x v)}_{=Bv} = rf.$$

IDÉE DE LA PREUVE POUR LE PROBLÈME CONTINU 1D :

- Estimations à poids exponentiels : $\rho = e^{s\varphi} = e^{se^{\lambda\psi}}$.
- On pose $f = -Pu = \partial_t^2 u + \partial_x(\gamma\partial_x u)$, et $u = \rho v$.

$$\rho^{-1} (\partial_t^2(\rho v) + \partial_x(\gamma\partial_x(\rho v))) = \rho^{-1} f.$$

- On développe les dérivées ($\gamma = \text{cte} = 1$) en posant $r = \rho^{-1}$

$$\underbrace{\partial_t^2 v + \partial_x^2 v + r(\partial_t^2 \rho)v + r(\partial_x^2 \rho)v}_{=Av} + \underbrace{2r(\partial_t \rho)(\partial_t v) + r(\partial_x \rho)(\partial_x v)}_{=Bv} = rf.$$

- On élève au carré

$$\|Av\|_{L^2(Q)}^2 + \|Bv\|_{L^2(Q)}^2 + 2(Av, Bv)_{L^2(Q)} = \|rf\|_{L^2(Q)}^2,$$

IDÉE DE LA PREUVE POUR LE PROBLÈME CONTINU 1D :

- Estimations à poids exponentiels : $\rho = e^{s\varphi} = e^{se^{\lambda\psi}}$.
- On pose $f = -Pu = \partial_t^2 u + \partial_x(\gamma\partial_x u)$, et $u = \rho v$.

$$\rho^{-1} (\partial_t^2(\rho v) + \partial_x(\gamma\partial_x(\rho v))) = \rho^{-1} f.$$

- On développe les dérivées ($\gamma = \text{cte} = 1$) en posant $r = \rho^{-1}$

$$\underbrace{\partial_t^2 v + \partial_x^2 v + r(\partial_t^2 \rho)v + r(\partial_x^2 \rho)v}_{=Av} + \underbrace{2r(\partial_t \rho)(\partial_t v) + r(\partial_x \rho)(\partial_x v)}_{=Bv} = rf.$$

- On élève au carré et on ne garde que le double produit

$$2(Av, Bv)_{L^2(Q)} \leq \|rf\|_{L^2(Q)}^2,$$

IDÉE DE LA PREUVE POUR LE PROBLÈME CONTINU 1D :

- Estimations à poids exponentiels : $\rho = e^{s\varphi} = e^{se^{\lambda\psi}}$.
- On pose $f = -Pu = \partial_t^2 u + \partial_x(\gamma\partial_x u)$, et $u = \rho v$.

$$\rho^{-1} (\partial_t^2(\rho v) + \partial_x(\gamma\partial_x(\rho v))) = \rho^{-1} f.$$

- On développe les dérivées ($\gamma = \text{cte} = 1$) en posant $r = \rho^{-1}$

$$\underbrace{\partial_t^2 v + \partial_x^2 v + r(\partial_t^2 \rho)v + r(\partial_x^2 \rho)v}_{=Av} + \underbrace{2r(\partial_t \rho)(\partial_t v) + r(\partial_x \rho)(\partial_x v)}_{=Bv} = rf.$$

- On élève au carré et on ne garde que le double produit

$$2(Av, Bv)_{L^2(Q)} \leq \|rf\|_{L^2(Q)}^2,$$

- Nombreuses intégrations par parties dans le terme $(Av, Bv)_{L^2}$.
On utilise les C.L., la D.I. $u(0) = 0$ et les propriétés de ψ .

IDÉE DE LA PREUVE POUR LE PROBLÈME CONTINU 1D :

- Estimations à poids exponentiels : $\rho = e^{s\varphi} = e^{se^{\lambda\psi}}$.
- On pose $f = -Pu = \partial_t^2 u + \partial_x(\gamma\partial_x u)$, et $u = \rho v$.

$$\rho^{-1} (\partial_t^2(\rho v) + \partial_x(\gamma\partial_x(\rho v))) = \rho^{-1} f.$$

- On développe les dérivées ($\gamma = \text{cte} = 1$) en posant $r = \rho^{-1}$

$$\underbrace{\partial_t^2 v + \partial_x^2 v + r(\partial_t^2 \rho)v + r(\partial_x^2 \rho)v}_{=Av} + \underbrace{2r(\partial_t \rho)(\partial_t v) + r(\partial_x \rho)(\partial_x v)}_{=Bv} = rf.$$

- On élève au carré et on ne garde que le double produit

$$2(Av, Bv)_{L^2(Q)} \leq \|rf\|_{L^2(Q)}^2,$$

- Nombreuses intégrations par parties dans le terme $(Av, Bv)_{L^2}$.
On utilise les C.L., la D.I. $u(0) = 0$ et les propriétés de ψ .
- Choix, *a posteriori*, des paramètres λ et s suffisamment grands pour absorber les *mauvais* termes par les *bons*.

IDÉE DE LA PREUVE POUR LE PROBLÈME CONTINU 1D :

- Estimations à poids exponentiels : $\rho = e^{s\varphi} = e^{se^{\lambda\psi}}$.
- On pose $f = -Pu = \partial_t^2 u + \partial_x(\gamma \partial_x u)$, et $u = \rho v$.

$$\rho^{-1} (\partial_t^2(\rho v) + \partial_x(\gamma \partial_x(\rho v))) = \rho^{-1} f.$$

- On développe les dérivées ($\gamma = \text{cte} = 1$) en posant $r = \rho^{-1}$

$$\underbrace{\partial_t^2 v + \partial_x^2 v + r(\partial_t^2 \rho)v + r(\partial_x^2 \rho)v}_{=Av} + \underbrace{2r(\partial_t \rho)(\partial_t v) + r(\partial_x \rho)(\partial_x v)}_{=Bv} = rf.$$

- On élève au carré et on ne garde que le double produit

$$2(Av, Bv)_{L^2(Q)} \leq \|rf\|_{L^2(Q)}^2,$$

- Nombreuses intégrations par parties dans le terme $(Av, Bv)_{L^2}$.
On utilise les C.L., la D.I. $u(0) = 0$ et les propriétés de ψ .
- Choix, *a posteriori*, des paramètres λ et s suffisamment grands pour absorber les *mauvais* termes par les *bons*.
- L'inégalité obtenue est valable pour tout $\lambda \geq \lambda_1$ et tout $s \geq s_1$.

LA PREUVE DANS LE CAS DISCRET :

- On prend les mêmes poids que dans le cas continu.
- Les intégrations par parties discrètes et les dérivations discrètes de produits font apparaître des nouveaux termes.

$$\underbrace{\partial_t^2 v + r \bar{\rho} \bar{D} D v + r (\partial_t^2 \rho) v + r (\bar{D} D \rho) \bar{v}}_{=Av} + \underbrace{2r (\partial_t \rho) (\partial_t v) + 2r \bar{D} \rho \bar{D} v}_{=Bv} = r f + \dots$$

- Les termes en plus sont **petits** en h mais **grands** en s et λ .
- On va contrôler tous les nouveaux termes sous une condition

$$sh \leq \varepsilon_0,$$

avec un ε_0 bien choisi qui ne dépendra que des données.

- Comme on prend ensuite $s \sim \sqrt{\mu}$, on obtient bien $\mu \leq \frac{\varepsilon_1}{h^2}$.

DÉRIVATION DE PRODUITS

$$f_i \in \mathbb{R}^m, g_i \in \mathbb{R}^m$$

$$D(f_1 f_2) = (Df_1)\bar{f}_2 + (Df_2)\bar{f}_1,$$

$$\bar{D}(g_1 g_2) = (\bar{D}g_1)\bar{g}_2 + (\bar{D}g_2)\bar{g}_1.$$

MOYENNE DE PRODUITS

$$\overline{f_1 f_2} = \bar{f}_1 \bar{f}_2 + \frac{h^2}{4} (Df_1)(Df_2).$$

DOUBLES MOYENNES

$$\bar{\bar{f}} = f + \frac{h^2}{4} \bar{D}Df,$$

Par exemple (Rappel : $r = \rho^{-1}$)

$$r\bar{\bar{\rho}} = 1 + \frac{h^2}{4} r(\bar{D}D\rho) \approx 1 + \frac{h^2}{4} r\partial_x^2 \rho \approx 1 + \frac{h^2 s^2}{4} (\partial_x \phi)^2 \underbrace{r\rho}_{=1} + \dots$$

INTÉGRATIONS PAR PARTIES DISCRÈTES

$$f \in \mathbb{R}^m \text{ et } g \in \mathbb{R}^m$$

$$\int_{\Omega} f(Dg) = - \int_{\Omega} (\bar{D}f)g + f_{N+1}g_{N+\frac{1}{2}} - f_0g_{\frac{1}{2}}.$$

- 1 INTRODUCTION
- 2 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME SEMI-DISCRET EN ESPACE
- 3 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME COMPLÈTEMENT DISCRET**
- 4 UN PEU D'EXPLORATION NUMÉRIQUE
- 5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

CONTRÔLABILITÉ

On a vu que le système d'EDO suivant

$$(S_h) \begin{cases} \partial_t y + \mathcal{A}^m y = 1_\omega v & \text{dans } Q = (0, T) \times \mathfrak{M} \\ y_0 = y_{N+1} = 0 \\ y(0) = y^0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

est contrôlable à zéro uniformément en h à une erreur **exp. petite** près.

OBSERVABILITÉ

On a également obtenu l'inégalité d'observabilité uniforme en h

$$|q(0)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{\text{obs}} \iint_{(0, T) \times \omega} |q(t, x)|^2 dt dx + C e^{-\frac{c}{h^2}} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2.$$

pour toute solution du problème adjoint

$$(S_h^*) \begin{cases} -\partial_t q + \mathcal{A}^m q = 0 & \text{dans } Q = (0, T) \times \mathfrak{M} \\ q_0 = q_{N+1} = 0, \\ q(T) = q_F \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

CADRE DISCRET EN TEMPS ?

(Zheng, '08), (Ervedoza, Valein, '09)

Soit $M \geq 1$ un entier et $\delta t = T/M$.

SCHÉMA D'EULER IMPLICITE

$$(S_{h,\delta t}) \begin{cases} \frac{y^{n+1} - y^n}{\delta t} + \mathcal{A}^m y^{n+1} = 1_\omega v^{n+1}, & \forall 0 \leq n \leq M-1 \\ y^0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

- Le contrôle est donné par $(v^n)_{1 \leq n \leq M}$, avec $v^n \in \mathbb{R}^m$.
- La solution au temps final est $y^M \in \mathbb{R}^m$.
- Le schéma est inconditionnellement stable.

Soit $M \geq 1$ un entier et $\delta t = T/M$.

SCHÉMA D'EULER IMPLICITE

$$(S_{h,\delta t}) \begin{cases} \frac{y^{n+1} - y^n}{\delta t} + \mathcal{A}^m y^{n+1} = 1_\omega v^{n+1}, & \forall 0 \leq n \leq M-1 \\ y^0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

- Le contrôle est donné par $(v^n)_{1 \leq n \leq M}$, avec $v^n \in \mathbb{R}^m$.
- La solution au temps final est $y^M \in \mathbb{R}^m$.
- Le schéma est inconditionnellement stable.

QUESTIONS

- A δt et h fixés, le système est-il contrôlable à zéro ?

- Si oui, le coût du contrôle $\|v\|_{L^2(Q)} = \left(\sum_{n=1}^M \delta t |v^n|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ est-il uniformément borné en h et δt ?

Soit $M \geq 1$ un entier et $\delta t = T/M$.

SCHÉMA D'EULER IMPLICITE

$$(S_{h,\delta t}) \begin{cases} \frac{y^{n+1} - y^n}{\delta t} + \mathcal{A}^m y^{n+1} = 1_\omega v^{n+1}, & \forall 0 \leq n \leq M-1 \\ y^0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

- Le contrôle est donné par $(v^n)_{1 \leq n \leq M}$, avec $v^n \in \mathbb{R}^m$.
- La solution au temps final est $y^M \in \mathbb{R}^m$.
- Le schéma est inconditionnellement stable.

QUESTIONS

- A δt et h fixés, le système est-il contrôlable à zéro ?
- Si oui, le coût du contrôle $\|v\|_{L^2(Q)} = \left(\sum_{n=1}^M \delta t |v^n|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ est-il uniformément borné en h et δt ?

DÉBUT DE RÉPONSES

- On s'attend à une cible en e^{-C/h^2} .
- Si $M = 1$, le contrôle n'existe que si y^0 est supporté dans ω .

Soit $M \geq 1$ un entier et $\delta t = T/M$.

θ -SCHÉMA, AVEC $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$

$$(S_{h,\delta t,\theta}) \begin{cases} \frac{y^{n+1} - y^n}{\delta t} + \mathcal{A}^m(\theta y^{n+1} + (1-\theta)y^n) = 1_\omega v^{n+1}, & \forall 0 \leq n \leq M-1 \\ y^0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

- Le contrôle est donné par $(v^n)_{1 \leq n \leq M}$, avec $v^n \in \mathbb{R}^m$.
- La solution au temps final est $y^M \in \mathbb{R}^m$.
- Le schéma est inconditionnellement stable.
- Pour $\theta = 1$: Euler implicite.
- Pour $\theta = 1/2$: Crank-Nicholson.

On fixe le maillage \mathfrak{M} , le pas de temps δt et $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$.

On note $F = \ker(\text{Id} - \delta t(1 - \theta)\mathcal{A}^{\mathfrak{m}})$ et E un sev de $\mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$ t.q. $\mathcal{A}^{\mathfrak{m}}E \subset E$.

THÉORÈME (CONTRÔLABILITÉ \Leftrightarrow OBSERVABILITÉ)

Soit $C_{obs} > 0$. Les énoncés suivants sont équivalents :

- ❶ Pour tout $y^0 \in \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, il existe un contrôle v pour $(S_{h,\delta t,\theta})$ tel que

$$\|v\| \leq \sqrt{C_{obs}} |y^0|_{L^2(\Omega)},$$

et tel que la solution y vérifie $\Pi_{E \cap F^\perp} y^M = 0$.

- ❷ Toute solution $(q^n)_n$ du problème adjoint suivant

$$(S_{h,\delta t,\theta}^*) \begin{cases} q^{M+1} = q_F \in E \cap F^\perp, \\ \frac{q^M - q^{M+1}}{\delta t} + \theta \mathcal{A}^{\mathfrak{m}} q^M = 0, \\ \frac{q^n - q^{n+1}}{\delta t} + \mathcal{A}^{\mathfrak{m}} (\theta q^n + (1 - \theta) q^{n+1}) = 0, \quad \forall M - 1 \geq n \geq 1, \end{cases}$$

vérifie $|q^1 - \delta t(1 - \theta)\mathcal{A}^{\mathfrak{m}} q^1|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{obs} \sum_{n=1}^M \delta t |q^n|_{L^2(\omega)}^2$.

THÉORÈME (CAS $1/2 < \theta \leq 1$ - ÉNONCÉ APPROXIMATIF ...)

Il existe $C_{obs}, C > 0$, tels que pour tout h assez petit et $\delta t \lesssim h$, on a :

Pour tout $y^0 \in \mathbb{R}^m$, il existe un contrôle $v = (v^n)_{1 \leq n \leq M}$ tel que :

- La solution $(y^n)_{0 \leq n \leq M}$ de $(S_{h,\delta t,\theta})$ vérifie

$$|y^M|_{L^2(\Omega)} \leq C e^{-C/h} |y^0|_{L^2(\Omega)}.$$

- Le contrôle v vérifie

$$\sum_{n=1}^M \delta t |v^n|_{L^2(\omega)}^2 \leq C_{obs}^2 |y^0|_{L^2(\Omega)}^2.$$

CRANK-NICHOLSON : $\theta = 1/2$: Résultat similaire avec $\delta t \lesssim h^2$.

THÉORÈME (CAS $1/2 < \theta \leq 1$ - ÉNONCÉ APPROXIMATIF ...)

Il existe $C_{obs}, C > 0$ tels que pour h assez petit et $\delta t \lesssim h$, on a

$$|q^1 - \delta t(1 - \theta)\mathcal{A}^m q^1|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{obs}^2 \sum_{n=1}^M \delta t |q^n|_{L^2(\omega)}^2 + C e^{-\frac{C}{h}} |q^{M+1}|_{L^2(\Omega)}^2,$$

pour tout $(q^n)_n$ solution du problème adjoint $(S_{h,\delta t,\theta}^*)$ associée à toute donnée finale $q_F \in \mathbb{R}^m$.

Pour tout maillage \mathfrak{M} tel que $h \leq h_0$, et tout $y^0 \in \mathbb{R}^m$, on considère la fonctionnelle $q_F \in \mathbb{R}^m \mapsto J_{\delta t}^{\mathfrak{M}}(q_F)$ définie par

$$J_{\delta t}^{\mathfrak{M}}(q_F) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \delta t |q^n|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + (y^0, q^1 - \delta t(1 - \theta)\mathcal{A}^{\mathfrak{M}}q^1)_{L^2(\Omega)},$$

où $(q^n)_n$ est solution du pb adjoint pour la donnée finale $q^{M+1} = q_F$.

Pour tout maillage \mathfrak{M} tel que $h \leq h_0$, et tout $y^0 \in \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$, on considère la fonctionnelle $q_F \in \mathbb{R}^{\mathfrak{m}} \mapsto J_{\delta t}^{\mathfrak{m}}(q_F)$ définie par

$$J_{\delta t}^{\mathfrak{m}}(q_F) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \delta t |q^n|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + (y^0, q^1 - \delta t(1 - \theta)\mathcal{A}^{\mathfrak{m}}q^1)_{L^2(\Omega)},$$

où $(q^n)_n$ est solution du pb adjoint pour la donnée finale $q^{M+1} = q_F$.

PROPOSITION

$J_{\delta t}^{\mathfrak{m}}$ a un unique minimiseur $q_{F,opt,\delta t} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{m}}$. La solution $(q^n)_n$ du pb adjoint associé est telle que si on pose

$$v^n = \mathbf{1}_{\omega} q^n, \forall 1 \leq n \leq M,$$

- *Borne uniforme du coût* : $\sum_{n=1}^M \delta t |v^n|_{L^2(\omega)}^2 \leq C_{obs}^2 |y^0|_{L^2(\Omega)}^2$.
- *Taille de la cible* : la solution $(y^n)_n$ du problème contrôlé vérifie

$$|y^M|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\phi(h)} C_{obs} |y^0|_{L^2(\Omega)}.$$

On suppose fixée une fonction $h \mapsto \phi(h) \gg e^{-C/h}$.

- Pour le problème semi-discret : un contrôle $t \mapsto v(t)$ uniformément borné en h donné par la minimisation de

$$J^m(q_F) = \frac{1}{2} \int_0^T |q(t)|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + (y^0, q(0))_{L^2(\Omega)}.$$

On suppose fixée une fonction $h \mapsto \phi(h) \gg e^{-C/h}$.

- Pour le problème semi-discret : un contrôle $t \mapsto v(t)$ uniformément borné en h donné par la minimisation de

$$J^m(q_F) = \frac{1}{2} \int_0^T |q(t)|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + (y^0, q(0))_{L^2(\Omega)}.$$

- Pour les problèmes complètement discrets : un contrôle discret $(v^n)_n$ uniformément borné en h et δt , par minimisation de

$$J_{\delta t}^m(q_F) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \delta t |q^n|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + (y^0, q^1 - \delta t(1 - \theta) \mathcal{A}^m q^1)_{L^2(\Omega)}$$

On note alors $v_{\delta t}(t) = \sum_{n=1}^M v^n \mathbf{1}_{](n-1)\delta t, n\delta t[}(t)$.

ESTIMATION D'ERREUR EN TEMPS

On suppose fixée une fonction $h \mapsto \phi(h) \gg e^{-C/h}$.

- Pour le problème semi-discret : un contrôle $t \mapsto v(t)$ uniformément borné en h donné par la minimisation de

$$J^m(q_F) = \frac{1}{2} \int_0^T |q(t)|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + (y^0, q(0))_{L^2(\Omega)}.$$

- Pour les problèmes complètement discrets : un contrôle discret $(v^n)_n$ uniformément borné en h et δt , par minimisation de

$$J_{\delta t}^m(q_F) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \delta t |q^n|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{\phi(h)}{2} |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 + (y^0, q^1 - \delta t(1-\theta)\mathcal{A}^m q^1)_{L^2(\Omega)}$$

$$\text{On note alors } v_{\delta t}(t) = \sum_{n=1}^M v^n \mathbf{1}_{](n-1)\delta t, n\delta t[}(t).$$

THÉORÈME (ESTIMATION D'ERREUR)

$$A \text{ maillage } \mathfrak{M} \text{ fixé, } \|v_{\delta t} - v\|_{L^2(Q)} \leq C_h |y^0|_{L^2(\Omega)} \delta t.$$

EXEMPLES NUMÉRIQUES

SCHÉMA D'EULER IMPLICITE

- Mêmes données que dans le cas semi-discret.
- On fixe un maillage de 100 points et on fait varier δt .

| $1/\delta t$ | nb it GC | distance à la cible | coût du contrôle |
|--------------|-------------------|---------------------|------------------|
| 10 | 136 | 3.910^{-5} | 1.069 |
| 20 | 139 | 2.010^{-5} | 0.884 |
| 40 | 144 | 1.710^{-5} | 0.767 |
| 80 | 143 | 1.310^{-5} | 0.714 |
| 160 | 141 | 1.110^{-5} | 0.688 |
| 320 | 170 | 1.010^{-5} | 0.674 |
| 640 | 173 | 1.010^{-5} | 0.667 |
| 1280 | 174 | 9.610^{-6} | 0.664 |
| 2560 | 183 | 9.510^{-6} | 0.662 |
| ∞ | 218 | 10^{-5} | 0.660 |
| comportement | $\sim \text{cte}$ | $\sim \text{cte}$ | $\sim \delta t$ |

EXEMPLES NUMÉRIQUES

SCHEMA DE CRANK-NICHOLSON ($\theta = 1/2$)

- Mêmes données que dans le cas semi-discret.
- On fixe un maillage de 100 points et on fait varier δt .

| $1/\delta t$ | nb it GC | distance à la cible | coût du contrôle |
|--------------|-------------------|---------------------|-------------------|
| 10 | 139 | 1.810^{-5} | 0.688 |
| 20 | 157 | 1.010^{-5} | 0.660 |
| 40 | 186 | 9.410^{-6} | 0.660 |
| 80 | 202 | 9.410^{-6} | 0.660 |
| 160 | 202 | 9.410^{-6} | 0.660 |
| 320 | 201 | 9.410^{-5} | 0.660 |
| 640 | 202 | 9.410^{-5} | 0.660 |
| ∞ | 218 | 10^{-5} | 0.660 |
| comportement | $\sim \text{cte}$ | $\sim \text{cte}$ | $\sim \delta t^2$ |

OBSERVABILITÉ PARTIELLE

- On utilise l'inégalité de Lebeau-Robbiano discrète et la même preuve que dans le cas continu.

OBSERVABILITÉ PARTIELLE

- On utilise l'inégalité de Lebeau-Robbiano discrète et la même preuve que dans le cas continu.

CONSTRUCTION DU CONTRÔLE

- Découpage du temps discret $\{0, \dots, M\}$ en paquets de taille $2M_j$.
- On alterne le contrôle à zéro des fréquences $\leq 2^{2j}$ pendant M_j pas de temps, puis on fait M_j pas de temps d'évolution libre.
- On utilise la dissipation parabolique du schéma :

OBSERVABILITÉ PARTIELLE

- On utilise l'inégalité de Lebeau-Robbiano discrète et la même preuve que dans le cas continu.

CONSTRUCTION DU CONTRÔLE

- Découpage du temps discret $\{0, \dots, M\}$ en paquets de taille $2M_j$.
- On alterne le contrôle à zéro des fréquences $\leq 2^{2j}$ pendant M_j pas de temps, puis on fait M_j pas de temps d'évolution libre.
- On utilise la dissipation parabolique du schéma :
 - Pour Euler implicite, la matrice d'itération du schéma est

$$B^m = (\text{Id} + \delta t \mathcal{A}^m)^{-1}.$$

- Pour le θ -schéma, la matrice d'itération du schéma est

$$B^m = (\text{Id} + \theta \delta t \mathcal{A}^m)^{-1} (\text{Id} - (1 - \theta) \delta t \mathcal{A}^m).$$

- A comparer à

$$e^{-\delta t \mathcal{A}^m}.$$

- 1 INTRODUCTION
- 2 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME SEMI-DISCRET EN ESPACE
- 3 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME COMPLÈTEMENT DISCRET
- 4 UN PEU D'EXPLORATION NUMÉRIQUE
- 5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

RAPPEL

Il existe $C_{obs} > 0$ tel que pour tout h assez petit, toute solution du problème adjoint (S_h^*) vérifie

$$|q(0)|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{obs} \left(\iint_{(0,T) \times \omega} |q(t,x)|^2 dt dx + \phi(h) |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

RAPPEL

Il existe $C_{obs} > 0$ tel que pour tout h assez petit, toute solution du problème adjoint (S_h^*) vérifie

$$|e^{-TA^m} q_F|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{obs} \left((\Lambda^m q_F, q_F)_{L^2(\Omega)} + \phi(h) |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

RAPPEL

Il existe $C_{obs} > 0$ tel que pour tout h assez petit, toute solution du problème adjoint (S_h^*) vérifie

$$|e^{-TA^m} q_F|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{obs} \left((\Lambda^m q_F, q_F)_{L^2(\Omega)} + \phi(h) |q_F|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

ESTIMATION DE C_{obs}

- Il s'agit de résoudre un problème aux valeurs propres généralisé

$$Aq = \lambda Bq,$$

avec A et B symétriques définies positives.

- Méthode de la puissance : $q_F^0 \in \mathbb{R}^m$, quelconque.

$$\begin{cases} r^{k+1} = \frac{e^{-2TA^m} q_F^k}{|e^{-2TA^m} q_F^k|_{L^2(\Omega)}} \\ q_F^{k+1} = (\Lambda^m + \phi(h)\text{Id})^{-1} r^{k+1}. \end{cases}$$

on a alors : $|e^{-2TA^m} q_F^k|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow C_{obs}$.

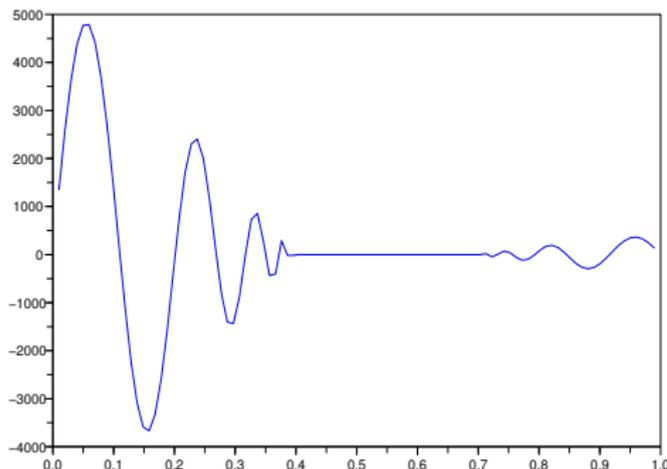
DONNÉES

- Coeff. de diffusion $\gamma = 0.1$; $\phi(h) = h^4$.

RÉSULTATS

$$\omega =]0.4, 0.7[$$

| h^{-1} | C_{obs} |
|----------|-----------|
| 50 | 1.686 |
| 100 | 1.725 |
| 200 | 1.761 |
| 300 | 1.78 |



ESTIMATION DE LA CONSTANTE D'OBSERVABILITÉ

RÉSULTATS

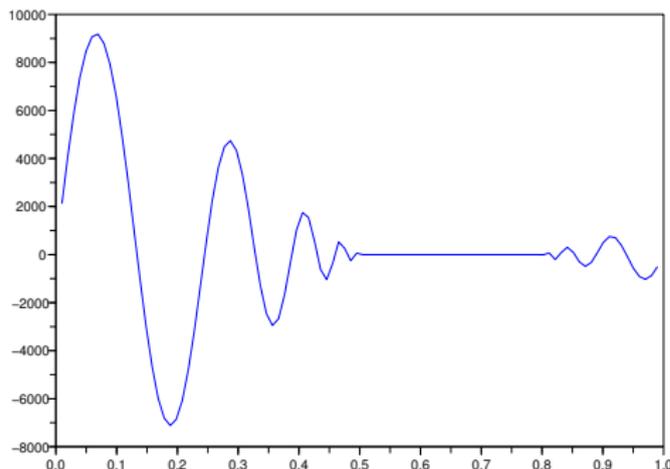
DONNÉES

- Coeff. de diffusion $\gamma = 0.1$; $\phi(h) = h^4$.

RÉSULTATS

$\omega =]0.5, 0.8[$

| h^{-1} | C_{obs} |
|----------|-----------|
| 50 | 4.149 |
| 100 | 4.404 |
| 200 | 4.615 |
| 300 | 4.720 |



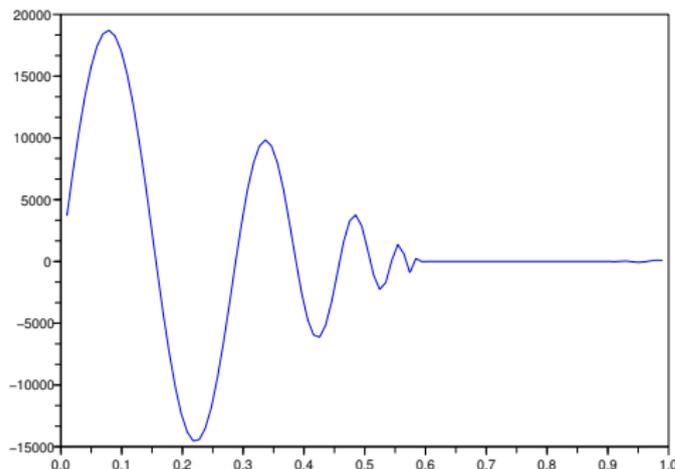
DONNÉES

- Coeff. de diffusion $\gamma = 0.1$; $\phi(h) = h^4$.

RÉSULTATS

$$\omega =]0.6, 0.9[$$

| h^{-1} | C_{obs} |
|----------|-----------|
| 50 | 11.25 |
| 100 | 12.69 |
| 200 | 13.83 |
| 300 | 14.42 |



ESTIMATION DE LA CONSTANTE D'OBSERVABILITÉ

RÉSULTATS

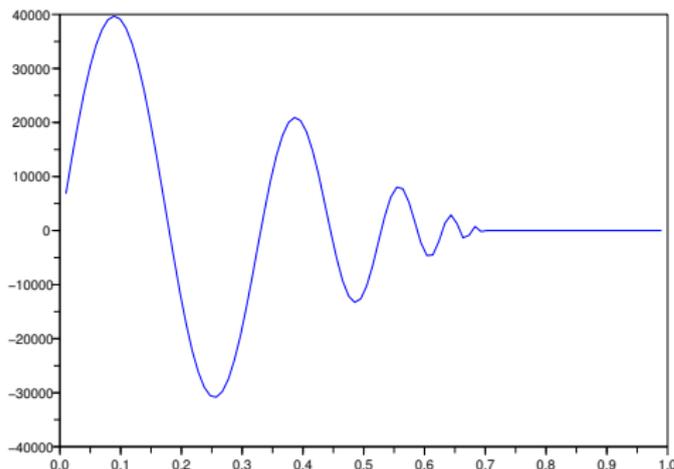
DONNÉES

- Coeff. de diffusion $\gamma = 0.1$; $\phi(h) = h^4$.

RÉSULTATS

$\omega =]0.7, 1.0[$

| h^{-1} | C_{obs} |
|----------|-----------|
| 50 | 34.97 |
| 100 | 42.41 |
| 200 | 49.00 |
| 300 | 52.44 |



LE HUM OPERATEUR A-T'IL UN NOYAU ?

- La matrice $\Lambda^{\mathfrak{M}} = (\Lambda_{ij})$ permet d'écrire

$$(\Lambda^{\mathfrak{M}} q)_i = \sum_{j=1}^N \Lambda_{ij} q_j = \int_{\Omega} \frac{\Lambda_{i \cdot}}{h} q(\cdot)$$

- On va donc regarder le comportement quand $h \rightarrow 0$ de

$$B_{ij} = \frac{1}{h} \Lambda_{ij}.$$

- S'il y a un noyau, on va obtenir une fonction b telle que

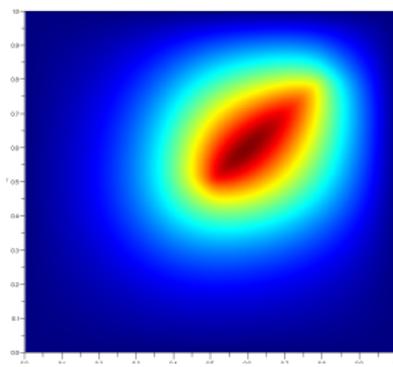
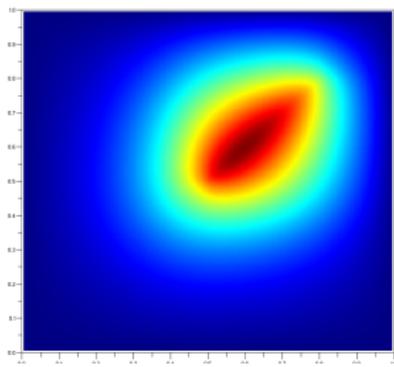
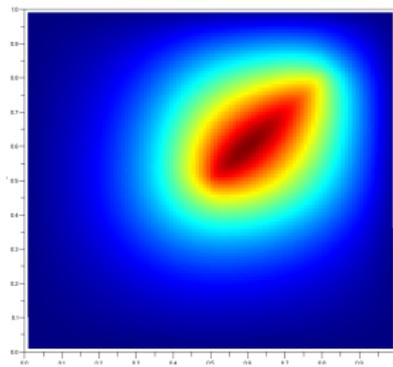
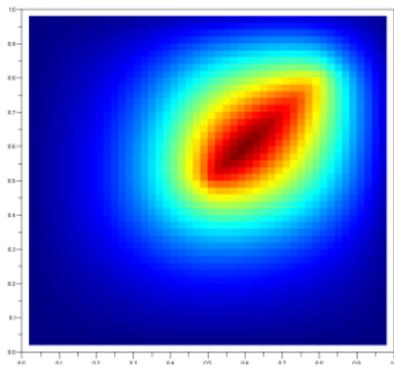
$$B_{ij} \approx b(x_i, x_j).$$

- Quelle est la régularité de b ? Etude des dérivées successives de b

$$B'_{i+\frac{1}{2}j} = \frac{B_{i+1j} - B_{ij}}{h},$$

$$B''_{ij} = \frac{B'_{i+\frac{1}{2}j} - B'_{i-\frac{1}{2}j}}{h}.$$

- $\omega =]0.5, 0.8[$. Diffusion $0.06 \leq \gamma(x) \leq 0.14$.



- $\omega =]0.5, 0.8[$. Diffusion $0.06 \leq \gamma(x) \leq 0.14$.

CALCUL DES NORMES SUR TOUT Ω

Maillage uniforme
Semi-discret

| N | $\ B\ _\infty$ | $\ B'\ _\infty$ | $\ B''\ _\infty$ |
|-----|----------------|-----------------|------------------|
| 50 | 0.717 | 4.487 | 257.069 |
| 100 | 0.705 | 4.986 | 509.200 |
| 200 | 0.699 | 5.510 | 1011.378 |
| 400 | 0.696 | 6.046 | 2013.575 |

- $\omega =]0.5, 0.8[$. Diffusion $0.06 \leq \gamma(x) \leq 0.14$.

CALCUL DES NORMES SUR TOUT Ω

Maillage uniforme
Semi-discret

| N | $\ B\ _\infty$ | $\ B'\ _\infty$ | $\ B''\ _\infty$ |
|-----|----------------|-----------------|------------------|
| 50 | 0.717 | 4.487 | 257.069 |
| 100 | 0.705 | 4.986 | 509.200 |
| 200 | 0.699 | 5.510 | 1011.378 |
| 400 | 0.696 | 6.046 | 2013.575 |

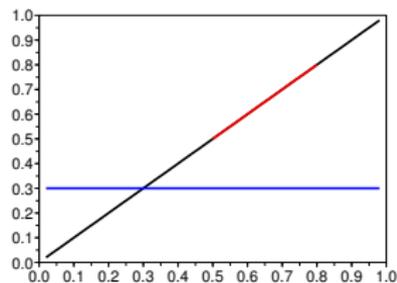
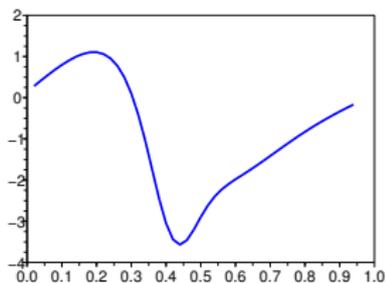
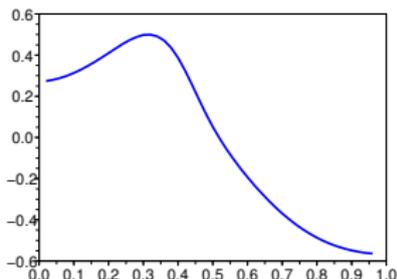
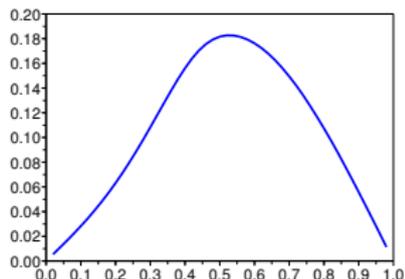
CALCUL DES NORMES LOIN DE ω

Maillage uniforme
Semi-discret

| N | $\ B\ _\infty$ | $\ B'\ _\infty$ | $\ B''\ _\infty$ |
|-----|----------------|-----------------|------------------|
| 50 | 0.346 | 1.385 | 9.090 |
| 100 | 0.330 | 1.314 | 6.893 |
| 200 | 0.335 | 1.331 | 6.605 |
| 400 | 0.337 | 1.339 | 6.454 |

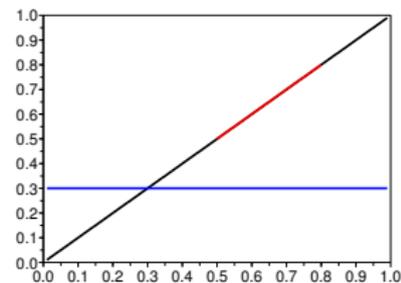
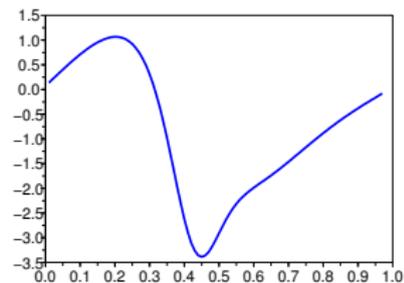
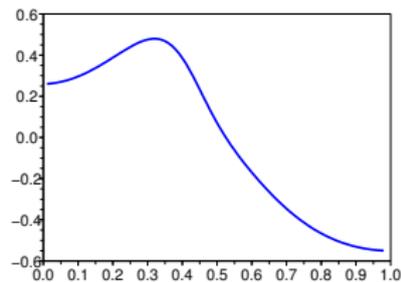
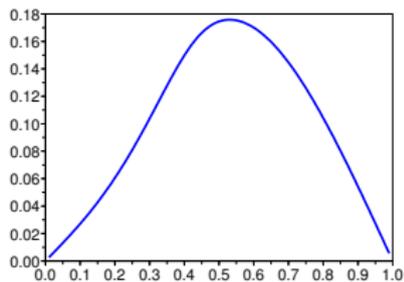
- $\omega =]0.5, 0.8[$. Diffusion $0.06 \leq \gamma(x) \leq 0.14$.

$N = 50$



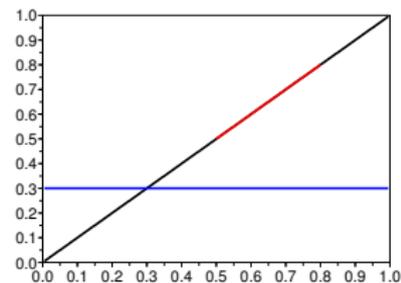
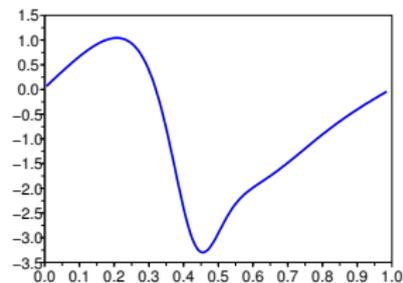
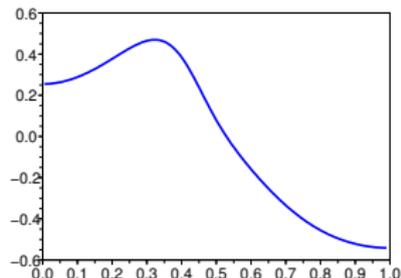
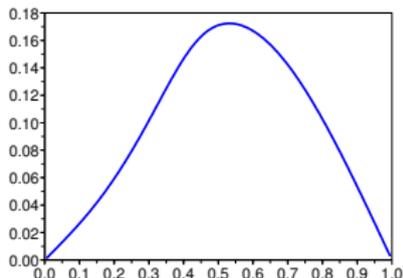
- $\omega =]0.5, 0.8[$. Diffusion $0.06 \leq \gamma(x) \leq 0.14$.

$N = 100$



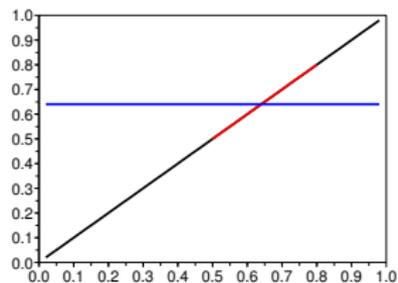
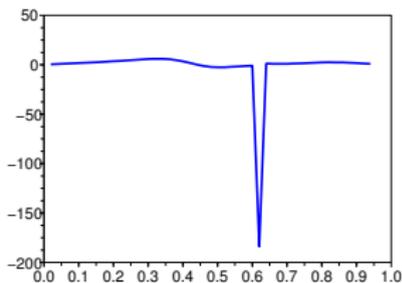
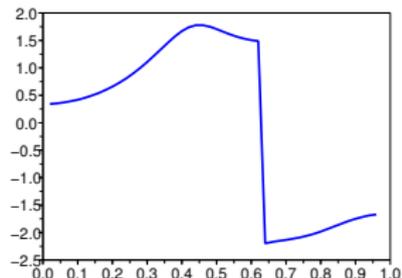
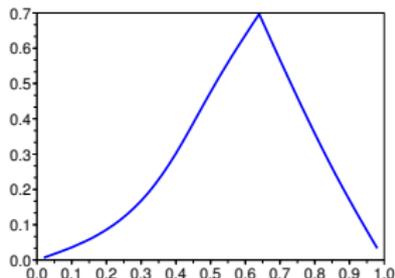
- $\omega =]0.5, 0.8[$. Diffusion $0.06 \leq \gamma(x) \leq 0.14$.

$N = 200$



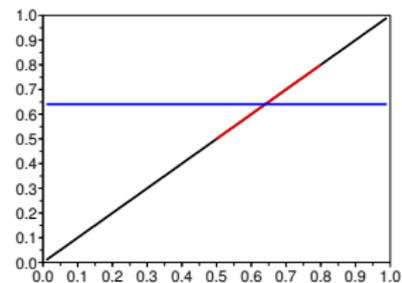
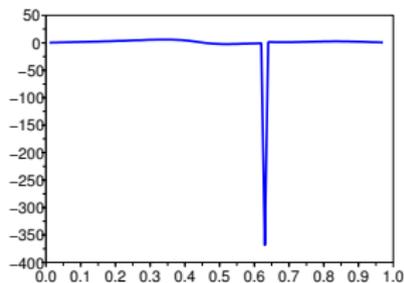
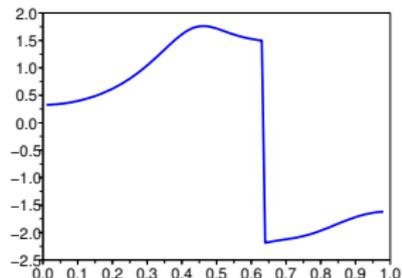
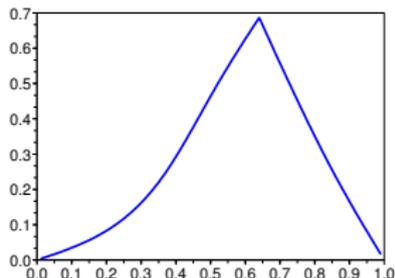
- $\omega =]0.5, 0.8[$. Diffusion $0.06 \leq \gamma(x) \leq 0.14$.

$N = 50$



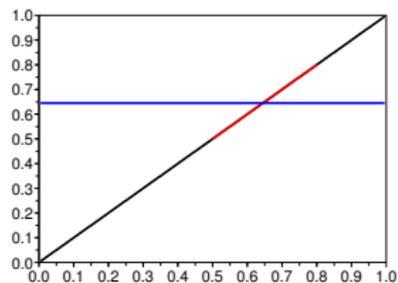
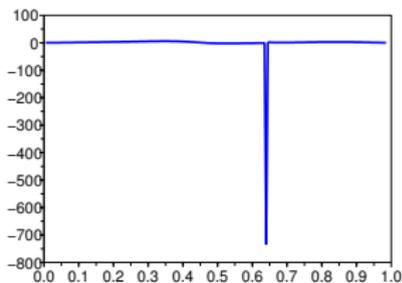
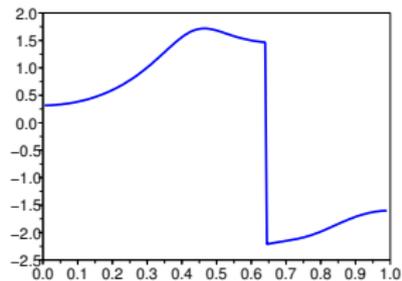
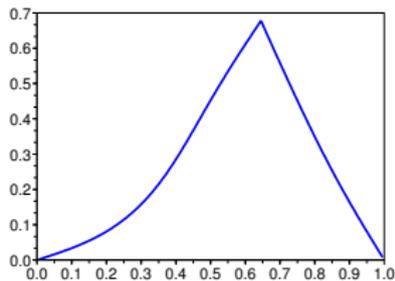
- $\omega =]0.5, 0.8[$. Diffusion $0.06 \leq \gamma(x) \leq 0.14$.

$N = 100$



- $\omega =]0.5, 0.8[$. Diffusion $0.06 \leq \gamma(x) \leq 0.14$.

$N = 200$



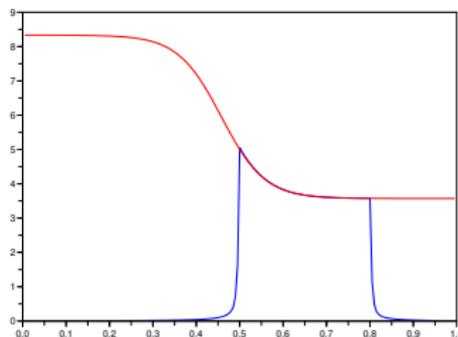
CONJECTURES

- L'opérateur HUM est un opérateur à noyau $(x, y) \mapsto b(x, y)$.
- b est régulière sur le complémentaire de

$$\Delta_\omega = \{(x, x), x \in \bar{\omega}\}.$$

- La singularité de b sur $\partial\Delta_\omega$ est du second ordre et de la forme

$$\partial_x^2 b \sim \frac{1}{2\gamma(x)} \delta_{\Delta_\omega} \iff \partial_x(\gamma(x)\partial_x b) \sim \frac{1}{2} \delta_{\Delta_\omega}.$$



- 1 INTRODUCTION
- 2 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME SEMI-DISCRET EN ESPACE
- 3 CONTRÔLABILITÉ DU PROBLÈME COMPLÈTEMENT DISCRET
- 4 UN PEU D'EXPLORATION NUMÉRIQUE
- 5 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

CONCLUSIONS

- Résultats de contrôlabilité uniforme en h pour un état final exponentiellement petit en h .
- Inégalités d'observabilité uniformes associées.
- Coefficients variables (en $x!$).
- Maillages cartésiens réguliers en multi-D.
- Cas semi-discret et complètement discret.
- Algorithmes de calcul avec estimation *a priori* de la taille de la cible.

CONCLUSIONS

- Résultats de contrôlabilité uniforme en h pour un état final exponentiellement petit en h .
- Inégalités d'observabilité uniformes associées.
- Coefficients variables (en $x!$).
- Maillages cartésiens réguliers en multi-D.
- Cas semi-discret et complètement discret.
- Algorithmes de calcul avec estimation *a priori* de la taille de la cible.

PERSPECTIVES

- Le cas des maillages non structurés est complètement ouvert.
- Amélioration du solveur par un préconditionneur.
- Etude plus fine de l'opérateur HUM Λ^m .
- Etude de la constante d'observabilité en fonction des paramètres du problème (domaine de contrôle, régularité des coefficients, ...).
- Inégalités de Carleman discrètes pour les problèmes paraboliques \Rightarrow coefficients dépendant du temps.
- Problèmes semi-linéaires. Systèmes.