Autour des solutions renormalisées de l'équation de transport

F. Boyer

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
CNRS / Université de Provence

Orléans, 12 Décembre 2006

Plan

Plan

1. Introduction

2. Solutions peu régulières du transport
   - Le transport pour des données régulières
   - Solutions faibles. Le problème de l'unicité
   - Solutions renormalisées à la DiPerna-Lions
   - Liens avec les EDO
   - Le cadre BV d'après Ambrosio

3. Théorèmes de trace. Problème au bord

4. Continuité en espace des solutions faibles

5. Conclusions

Considérons la trajectoire de la "particule" située en x à $t=0$ est

$$t \mapsto \Phi_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t,x).$$

Le *champ de vitesse* est défini par

$$v(t,y) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=t}\Big(\text{la trajectoire qui passe au point } y \text{ en } s=t\Big).$$

Considérons la trajectoire de la "particule" située en x à $t = 0$ est

$$t \mapsto \Phi_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t, x).$$

Le *champ de vitesse* est défini par

$$v(t, y) = \frac{\partial}{\partial s}_{\big|s=t} \big(\Phi_s(\Phi_t^{-1}(y))\big).$$

Considérons la trajectoire de la “particule” située en x à $t = 0$ est

$$t \mapsto \Phi_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t,x).$$

Le *champ de vitesse* est défini par

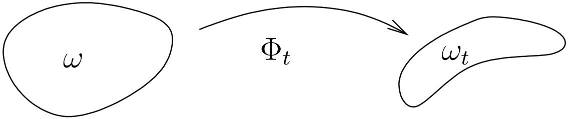
$$v(t,\Phi(t,x)) = \partial_t \Phi(t,x).$$

Considérons la trajectoire de la "particule" située en x à $t=0$ est

$$t \mapsto \Phi_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(t,x).$$

Le *champ de vitesse* est défini par

$$v(t,\Phi(t,x)) = \partial_t \Phi(t,x).$$



On note $\omega_t = \Phi_t(\omega)$.

Théorème (de Reynolds / du transport)

Pour toute fonction f régulière on a

$$\frac{d}{dt}\int_{\omega_t} f(t,y)\,dy = \int_{\omega_t}\Big(\partial_t f + \operatorname{div}(f v)\Big)\,dy.$$

- Conservation de la masse : $\rho =$ densité dans l'écoulement

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{\omega_t} \rho(t,y)\,dy = \int_{\omega_t} \Big(\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v)\Big)\,dy, \;\; \forall \omega, \forall t.$$

- Conservation de la masse : $\rho =$ densité dans l'écoulement

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

- Conservation de la masse : $\rho =$ densité dans l'écoulement

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

- Evolution de la quantité de mouvement : $\rho v =$ densité de q.d.m.

$$\int_{\omega_t} \Big(\partial_t (\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) \Big)\, dy = \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho v \, dy$$

Loi de Newton + Th. du moment cin. $\rightsquigarrow = \displaystyle\int_{\omega_t} \rho g \, dy + \int_{\partial \omega_t} \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} \, ds$

- Conservation de la masse : $\rho =$ densité dans l'écoulement

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

- Evolution de la quantité de mouvement : $\rho v =$ densité de q.d.m.

$$\begin{aligned}\int_{\omega_t} \Big(\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) \Big)\, dy &= \frac{d}{dt} \int_{\omega_t} \rho v \, dy \\ &= \int_{\omega_t} (\rho g + \operatorname{div}(\sigma))\, dy\end{aligned}$$

- Conservation de la masse : $\rho =$ densité dans l'écoulement

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

- Evolution de la quantité de mouvement : $\rho v =$ densité de q.d.m.

$$\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \operatorname{div} \sigma = \rho g.$$

- Conservation de la masse : $\rho =$ densité dans l'écoulement

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0.$$

- Evolution de la quantité de mouvement : $\rho v =$ densité de q.d.m.

$$\partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \operatorname{div}\sigma = \rho g.$$

- Modélisation de la contrainte :

$$\text{Fluide Newtonien : } \sigma = 2\mu(\rho) \underbrace{D(v)}_{=\frac{(\nabla v)+(\nabla v)^t}{2}} - p\,\mathrm{Id}.$$

- Loi d'état :

$$p = p(\rho).$$

Ecoulement incompressible non-homogène

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \underbrace{2 \operatorname{div}(\mu(\rho) D(v))}_{\approx \mu \Delta v} + \nabla p = \rho g. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \underbrace{2 \operatorname{div}(\mu(\rho) D(v))}_{\approx \mu \Delta v} + \nabla p = \rho g. \end{cases}$$

- Deux fluides non miscibles, sans tension de surface :

$$\rho_0(x) \in \{\rho_{\text{fluide1}}, \rho_{\text{fluide2}}\}, \quad \forall x \in \Omega.$$

$\hookrightarrow$ Données initiales peu régulières ($BV(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $\mathcal{M}(\Omega)$, ...).

Ecoulement incompressible non-homogène

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) - \underbrace{2 \operatorname{div}(\mu(\rho) D(v))}_{\approx \mu \Delta v} + \nabla p = \rho g. \end{cases}$$

- Deux fluides non miscibles, sans tension de surface :

$$\rho_0(x) \in \{\rho_{\text{fluide1}}, \rho_{\text{fluide2}}\}, \quad \forall x \in \Omega.$$

$\hookrightarrow$ Données initiales peu régulières ($BV(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $\mathcal{M}(\Omega)$, ...).

- Dans un cadre de sol. faibles, on peut espérer au mieux :

$$v \in L^2(]0, T[, (H^1_0(\Omega))^d).$$

Ecoulement incompressible non-homogène

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v\cdot\nabla\rho = \partial_t\rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \operatorname{div}(\rho v\otimes v) - \underbrace{2\operatorname{div}(\mu(\rho)D(v))}_{\approx \mu\Delta v} + \nabla p = \rho g. \end{cases}$$

- Deux fluides non miscibles, sans tension de surface :

$$\rho_0(x) \in \{\rho_{\text{fluide1}}, \rho_{\text{fluide2}}\}, \quad \forall x\in\Omega.$$

$\hookrightarrow$ Données initiales peu régulières ($BV(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$, $\mathcal{M}(\Omega)$, ...).

- Dans un cadre de sol. faibles, on peut espérer au mieux :

$$v \in L^2(]0,T[,(H^1_0(\Omega))^d).$$

Autres exemples :

- Equation de Vlasov. Espace des phases $(x,\xi)\in\Omega\times\mathbb{R}^d$

$$\partial_t f + \xi\cdot\nabla_x f + E(t,x)\cdot\nabla_\xi f = 0, \quad \operatorname{div}_{x,\xi}(\xi, E(t,x)) = 0.$$

- Systèmes de lois de conservation (Keyfitz et Kranzer, ...).

$$\partial_t u + \operatorname{div}(u\otimes G(|u|)) = 0, \quad G:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}^d.$$

Plan

Méthode des caractéristiques dans Ω

Equation de transport dans Ω ouvert borné régulier :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \ \text{ dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{T}$$

avec un champ de vecteurs tangent à $\partial\Omega$.

$$v : \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d \ \text{ lip., borné,} \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Equation de transport dans Ω ouvert borné régulier :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{T}$$

avec un champ de vecteurs tangent à $\partial\Omega$.

$$v : \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d \ \text{ lip., borné,} \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Flot : $X(s,t,x) \in \Omega, \quad \forall t, s, \ \forall x \in \Omega.$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds} X(s,t,x) = v(s, X(s,t,x)), \\ X(t,t,x) = x. \end{cases}$$

N.B. : $\Phi_t(x) = X(t,0,x)$.

Méthode des caractéristiques dans Ω

Equation de transport dans Ω ouvert borné régulier :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \tag{T}$$

avec un champ de vecteurs tangent à $\partial\Omega$.

$$v : \mathbb{R} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d \ \text{ lip., borné,} \quad \operatorname{div} v = 0, \quad \text{et } v \cdot \boldsymbol{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Flot : $X(s,t,x) \in \Omega, \quad \forall t, s, \ \forall x \in \Omega.$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds} X(s,t,x) = v(s, X(s,t,x)), \\ X(t,t,x) = x. \end{cases}$$

Proposition

Toute solution régulière de (T) est constante le long des caractéristiques (= Traj. des "particules").
$\rightsquigarrow$ *Si ρ_0 est régulière, l'unique solution régulière de (T) est*

$$\rho(t,x) = \rho_0(X(0,t,x)).$$

Objectif :

Donner un sens aux solutions de (T) pour des données peu régulières.

Objectif :

Donner un sens aux solutions de (T) pour des données peu régulières.

Définition $(1 \leq p \leq +\infty)$

$\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $v \in L^1(]0,T[,(L^{p'}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ *et* $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ *sur* $\partial\Omega$.

On dit que $\rho \in L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))$ *est solution faible de* (T) *si*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho \left(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi\right) dt\, dx + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0)\, dx = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0,T[\times\overline{\Omega})$.

Rq : Si v est régulier et ρ est solution classique de (T) alors c'est une solution faible

Objectif :

Donner un sens aux solutions de (T) pour des données peu régulières.

Définition $(1 \leq p \leq +\infty)$

$\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $v \in L^1(]0,T[,(L^{p'}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$ *et* $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ *sur* $\partial\Omega$.

On dit que $\rho \in L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))$ *est solution faible de* (T) *si*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho\left(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi\right) dt\, dx + \int_\Omega \rho_0 \varphi(0)\, dx = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0,T[\times\overline{\Omega})$.

- Existence de solutions : *plus simple*.
- Unicité des solutions : *plus difficile*.
- Propriétés qualitatives (régularité, positivité) : *plus difficile*.
- Lien avec l'équation caractéristique : *moins clair*.

Cas d'un champ de vecteurs régulier

Si v est lipschitzien, on a vu qu'on peut définir le flot X.

Proposition

Pour tout $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, la fonction

$$\rho(t,x) = \rho_0(X(0,t,x)),$$

est l'unique solution faible de (T) *pour la donnée initiale ρ_0.*

Cas d'un champ de vecteurs régulier

Si v est lipschitzien, on a vu qu'on peut définir le flot X.

Proposition

Pour tout $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, la fonction

$$\rho(t,x) = \rho_0(X(0,t,x)),$$

est l'unique solution faible de (T) *pour la donnée initiale ρ_0.*

- **Existence :**

Par régularisation de ρ_0 et convergences faibles.

Si v est lipschitzien, on a vu qu'on peut définir le flot X.

Proposition

Pour tout $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, la fonction

$$\rho(t,x) = \rho_0(X(0,t,x)),$$

est l'unique solution faible de (T) *pour la donnée initiale ρ_0.*

- **Unicité :**

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^1(]0,T[\times\Omega)$ on construit φ solution de

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi = \psi, \\ \varphi(T) = 0, \end{cases} \Longrightarrow \varphi(t,x) = -\int_t^T \psi(s, X(s,t,x))\, ds,$$

que l'on prend comme fonction test $\Rightarrow \displaystyle\int_0^T \int_\Omega (\rho_1 - \rho_2)\psi \, dt\, dx = 0.$

Supposons seulement $v \in L^1(]0,T[,(L^{p'}(\Omega))^d)$.

Théorème

Pour tout $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, il existe au moins une solution faible dans $L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))$ de l'équation de transport.

On procède en approchant v par des champs de vecteurs réguliers $(v_n)_n$ et en montrant que la suite de solutions $(\rho_n)_n$ associée converge.

Supposons seulement $v \in L^1(]0,T[,(L^{p'}(\Omega))^d)$.

THÉORÈME

Pour tout $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, il existe au moins une solution faible dans $L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))$ de l'équation de transport.

THÉORÈME

La fonction $\rho = 0$ est **la seule solution positive** *de* (T) *pour la donnée initiale $\rho_0 = 0$.*

Il suffit de prendre $\varphi(t,x) = T - t$ comme fonction test :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_\Omega \rho(\underbrace{\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi}_{=-1})\,dt\,dx + \int_\Omega \underbrace{\rho_0}_{=0} \varphi(0)\,dx \\ &= -\int_0^T \int_\Omega \rho\,dt\,dx. \end{aligned}$$

Supposons seulement $v \in L^1(]0,T[,(L^{p'}(\Omega))^d)$.

Théorème

Pour tout $\rho_0 \in L^p(\Omega)$, il existe au moins une solution faible dans $L^\infty(]0,T[,L^p(\Omega))$ de l'équation de transport.

Théorème

La fonction $\rho = 0$ est **la seule solution positive** *de* (T) *pour la donnée initiale $\rho_0 = 0$.*

Stratégie :

Si on sait montrer (**propriété de renormalisation**) que

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \partial_t(\rho^2) + v \cdot \nabla(\rho^2) = 0, \\ (\rho^2)(0) = \rho_0^2, \end{cases}$$

alors on obtient l'unicité de la solution faible pour toute donnée initiale.

Contre-exemple à l'unicité

Une mauvaise nouvelle — **Depauw (CRAS 2003)**

On peut construire explicitement :

- un champ de vecteurs $v \in (L^1(]0,T[\times\Omega))^d$ à divergence nulle.
- une solution faible $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ **non nulle** de (T) pour la **donnée initiale nulle**.

De plus, $v \in L^1_{loc}(]0,T],(BV(\Omega))^d)$ mais $v \notin L^1(]0,T[,(BV(\Omega))^d)$.

Contre-exemple à l'unicité

Une mauvaise nouvelle **Depauw (CRAS 2003)**

On peut construire explicitement :

- un champ de vecteurs $v \in (L^1(]0,T[\times\Omega))^d$ à divergence nulle.
- une solution faible $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ **non nulle** de (T) pour la **donnée initiale nulle**.

De plus, $v \in L^1_{loc}(]0,T],(BV(\Omega))^d)$ mais $v \notin L^1(]0,T[,(BV(\Omega))^d)$.

Remarque

Cette solution vérifie $\rho(t,x) \in \{-1,1\}$ presque partout

$$\Rightarrow \rho^2 \equiv 1,$$

on a donc

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\rho + v\cdot\nabla\rho = 0, \\ \rho(0) = 0, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \partial_t(\rho^2) + v\cdot\nabla(\rho^2) = 0, \\ (\rho^2)(0) = 1. \end{array}\right.$$

La propriété de renormalisation n'est pas vérifiée

Eléments bibliographiques

- Unicité des solutions faibles dans le cadre Sobolev.
  Liens avec l'éq. caractéristique.

  DiPerna-Lions (Invent., 1989), Desjardins (DIE, 1997)

Eléments bibliographiques

- Unicité des solutions faibles dans le cadre Sobolev.
  Liens avec l'éq. caractéristique.

  DiPerna-Lions (Invent., 1989), Desjardins (DIE, 1997)

- Cadre BV à divergence L^1.

  Bouchut (ARMA, 2001), Colombini-Lerner (Duke, 2002)

  Le Bris-Lions (Ann. di Mat., 2003), Ambrosio (Invent., 2004)

Eléments bibliographiques

- Unicité des solutions faibles dans le cadre Sobolev.
  Liens avec l'éq. caractéristique.
  DiPerna-Lions (Invent., 1989), Desjardins (DIE, 1997)

- Cadre BV à divergence L^1.
  Bouchut (ARMA, 2001), Colombini-Lerner (Duke, 2002)
  Le Bris-Lions (Ann. di Mat., 2003), Ambrosio (Invent., 2004)

- Cadre Hamiltonien **autonome**.
  Restreint à $d = 2$, $v \in L^2$ + condition d'orientation du champ.
  Bouchut-Desvillettes (DIE, 2001), Hauray (Ann. IHP, 2003)
  Colombini-Crippa-Rauch (CPDE, 2006)

Eléments bibliographiques

- Unicité des solutions faibles dans le cadre Sobolev.
  Liens avec l'éq. caractéristique.

  DiPerna-Lions (Invent., 1989), Desjardins (DIE, 1997)

- Cadre BV à divergence L^1.

  Bouchut (ARMA, 2001), Colombini-Lerner (Duke, 2002)
  Le Bris-Lions (Ann. di Mat., 2003), Ambrosio (Invent., 2004)

- Cadre Hamiltonien **autonome**.
  Restreint à $d = 2$, $v \in L^2$ + condition d'orientation du champ.

  Bouchut-Desvillettes (DIE, 2001), Hauray (Ann. IHP, 2003)
  Colombini-Crippa-Rauch (CPDE, 2006)

- Cadre v discontinu + OSLC : $(\nabla v) + (\nabla v)^t \leq \alpha(t) \in L^1(]0, T[)$
  Utilisation du flot au sens de Filippov.

  Poupaud-Rascle (CPDE, 1997)
  Bouchut-James (Nonlinear Anal., 1998)
  Bouchut-James-Mancini (Ann. SNS Pisa, 2005)

Théorème (DiPerna-Lions, 1989)

$\rho_0 \in L^p(\Omega)$, $v \in L^1(]0,T[, (W^{1,p'}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$, $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ *sur* $\partial\Omega$.

1. **Toute solution faible** $\rho \in L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$ *pour la donnée* ρ_0 *est une solution renormalisée, i.e. :*

$$''\forall \beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})'', \quad \beta(\rho) \text{ est solution faible pour la D.I. } \beta(\rho_0).$$

2. *Une telle solution faible est donc unique et de plus elle vérifie*

$$\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^q(\Omega)), \text{ pour tout } q \text{ fini tel que } q \leq p.$$

Il s'agit de justifier **sur les solutions faibles** les calculs formels

$$\partial_t \beta(\rho) + v \cdot \nabla \beta(\rho) = \beta'(\rho)(\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho) = 0,$$

$$\beta(\rho)_{t=0} = \beta(\rho_{t=0}).$$

A partir de maintenant on suppose $p = +\infty$

Soit un noyau $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(0,1))$, $\eta \geq 0$, $\int_B \eta = 1$, $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\eta(x/\varepsilon)$.

On introduit un opérateur de convolution en espace défini par

$$f \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f(x)\eta_\varepsilon\Big(y - x - 2\varepsilon\boldsymbol{n}(y)\Big)\,dx.$$

Principe de la démonstration 1/4

A PARTIR DE MAINTENANT ON SUPPOSE $p = +\infty$

Soit un noyau $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(0,1))$, $\eta \geq 0$, $\int_B \eta = 1$, $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\eta(x/\varepsilon)$.

On introduit un opérateur de convolution en espace défini par

$$f \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f(x)\eta_\varepsilon\Big(y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{n}(y)\Big)\,dx.$$

$$\begin{cases} (\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho) & = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \rho(0) & = \rho_0 \quad . \end{cases}$$

A PARTIR DE MAINTENANT ON SUPPOSE $p = +\infty$

Soit un noyau $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(0,1))$, $\eta \geq 0$, $\int_B \eta = 1$, $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\eta(x/\varepsilon)$.

On introduit un opérateur de convolution en espace défini par

$$f \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f(x)\eta_\varepsilon\Big(y - x - 2\varepsilon \boldsymbol{n}(y)\Big)\, dx.$$

$$\begin{cases} (\partial_t \rho + v \cdot \nabla\rho) \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon = 0 \,\text{dans}\; \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad \rho(0) \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon = \rho_0 \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon. \end{cases}$$

A partir de maintenant on suppose $p = +\infty$

Soit un noyau $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(0,1))$, $\eta \geq 0$, $\int_B \eta = 1$, $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\eta(x/\varepsilon)$.

On introduit un opérateur de convolution en espace défini par

$$f \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega f(x)\eta_\varepsilon\Big(y - x - 2\varepsilon\boldsymbol{n}(y)\Big)\,dx.$$

$$\begin{cases} (\partial_t\rho + v\cdot\nabla\rho) \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \rho(0) \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon = \rho_0 \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon. \end{cases}$$

On pose $\rho_0^\varepsilon = \rho_0 \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon$ et $\rho_\varepsilon(t) = \rho(t) \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon$.

$$\begin{cases} \partial_t\rho_\varepsilon + v\cdot\nabla\rho_\varepsilon = \underbrace{\Big[(v\cdot\nabla), (\eta_\varepsilon \star_{\boldsymbol{n}} \cdot)\Big]\rho}_{=R_\varepsilon} \text{ dans } \Omega, \\ \rho_\varepsilon(0) = \rho_0^\varepsilon. \end{cases}$$

Principe de la démonstration 2/4

Ingrédient essentiel : Etude du reste $R_\varepsilon = \Big[(v \cdot \nabla), (\eta_\varepsilon \star_{\boldsymbol{n}} \cdot) \Big] \rho$.

Lemme (de Friedrichs / Estimation du commutateur)

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *et* $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d, \ \operatorname{div} v = 0$.

- *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega)$.
- *La famille* $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ *tend vers* 0 *dans* L^1 *fort quand* ε *tend vers* 0.

Ingrédient essentiel : Etude du reste $R_\varepsilon = \Big[(v\cdot\nabla), (\eta_\varepsilon \star_{\boldsymbol{n}} \cdot)\Big]\rho.$

Lemme (de Friedrichs / Estimation du commutateur)

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *et* $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d,\ \mathrm{div}\, v = 0.$

- *Pour tout* $\varepsilon > 0,\ R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega).$
- *La famille* $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ *tend vers* 0 *dans* L^1 *fort quand* ε *tend vers* 0.

Preuve : Sans le terme qui contient la normale $\boldsymbol{n}$ dans $\cdot \star_{\boldsymbol{n}} \cdot$

$$R_\varepsilon(t,y) = \int_B \rho(t,y-\varepsilon z)\left[\frac{v\big(t,y\big) - v\big(t,y-\varepsilon z\big)\big)}{\varepsilon}\right]\cdot\nabla\eta(z)\,dz$$

Principe de la démonstration 2/4

Ingrédient essentiel : Etude du reste $R_\varepsilon = \Big[(v\cdot\nabla), (\eta_\varepsilon \star_{\boldsymbol{n}} \cdot)\Big]\rho$.

Lemme (de Friedrichs / Estimation du commutateur)

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *et* $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d$, $\operatorname{div} v = 0$.

- *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega)$.
- *La famille* $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ *tend vers* 0 *dans* L^1 *fort quand* ε *tend vers* 0.

Preuve : Sans le terme qui contient la normale $\boldsymbol{n}$ dans $\cdot \star_{\boldsymbol{n}} \cdot$

$$R_\varepsilon(t,y) = \int_B \rho(t,y-\varepsilon z)\left[\frac{v(t,y) - v(t,y-\varepsilon z))}{\varepsilon}\right]\cdot\nabla\eta(z)\,dz$$

$\Longrightarrow \|R_\varepsilon\|_{L^1} \leq C\|\rho\|_{L^\infty(L^p)}\|\nabla v\|_{L^1(L^{p'})}\|\nabla\eta\|_{L^\infty}$, **ind. de** ε.

Ingrédient essentiel : Etude du reste $R_\varepsilon = \Big[(v\cdot\nabla), (\eta_\varepsilon \star_{\boldsymbol{n}} \cdot)\Big]\rho$.

Lemme (de Friedrichs / Estimation du commutateur)

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *et* $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$.

- *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega)$.
- *La famille* $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ *tend vers* 0 *dans* L^1 *fort quand* ε *tend vers* 0.

Preuve : Sans le terme qui contient la normale $\boldsymbol{n}$ dans $\cdot \star_{\boldsymbol{n}} \cdot$

$$R_\varepsilon(t,y) = \int_B \underbrace{\rho(t,y-\varepsilon z)}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\rho(t,y)} \underbrace{\left[\frac{v(t,y)-v(t,y-\varepsilon z)}{\varepsilon}\right]}_{\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\nabla v(t,y).z} \cdot\nabla\eta(z)\,dz$$

Ingrédient essentiel : Etude du reste $R_\varepsilon = \Big[(v\cdot\nabla), (\eta_\varepsilon \star_{\boldsymbol{n}} \cdot)\Big]\rho.$

Lemme (de Friedrichs / Estimation du commutateur)

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ et $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d, \ \operatorname{div} v = 0.$

- *Pour tout $\varepsilon > 0$, $R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega)$.*
- *La famille $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ tend vers 0 dans L^1 fort quand ε tend vers 0.*

Preuve : Sans le terme qui contient la normale $\boldsymbol{n}$ dans $\cdot \star_{\boldsymbol{n}} \cdot$

$$R_\varepsilon(t,y) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \rho(t,y)\int_B \Big(\nabla v(t,y).z\Big)\cdot\nabla\eta(z)\,dz$$

Principe de la démonstration 2/4

Ingrédient essentiel : Etude du reste $R_\varepsilon = \Big[(v\cdot\nabla), (\eta_\varepsilon \star_{\boldsymbol{n}} \cdot)\Big]\,\rho.$

Lemme (de Friedrichs / Estimation du commutateur)

Si $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *et* $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d, \ \operatorname{div} v = 0.$

- *Pour tout* $\varepsilon > 0$, $R_\varepsilon \in L^1(]0,T[\times\Omega)$.
- *La famille* $(R_\varepsilon)_\varepsilon$ *tend vers* 0 *dans* L^1 *fort quand* ε *tend vers* 0.

Preuve : Sans le terme qui contient la normale $\boldsymbol{n}$ dans $\cdot\star_{\boldsymbol{n}}\cdot$

$$
\begin{aligned}
R_\varepsilon(t,y) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} & \rho(t,y)\int_B \Big(\nabla v(t,y).z\Big)\cdot\nabla\eta(z)\,dz\\
&= -\,\rho(t,y)\int_B \operatorname{div}_z\Big(\nabla v(t,y).z\Big)\eta(z)\,dz\\
&= -\,\rho(t,y)\operatorname{Tr}(\nabla v(t,y))\int_B \eta(z)\,dz\\
&= -\,\rho(t,y)\operatorname{div} v(t,y) = 0.
\end{aligned}
$$

- Pour tout $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ solution faible :
  La fonction régularisée $\rho_\varepsilon = \rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \ \text{ dans } L^1(]0,T[\times\Omega), \\ \rho_\varepsilon(0) = \rho_0^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \rho_0 \ \text{ dans } L^p(\Omega), \forall p < +\infty. \end{cases}$$

- Pour tout $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ solution faible :
  La fonction régularisée $\rho_\varepsilon = \rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \ \text{ dans } L^1(]0,T[\times\Omega), \\ \rho_\varepsilon(0) = \rho_0^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \rho_0 \ \text{ dans } L^p(\Omega), \forall p < +\infty. \end{cases}$$

- ρ_ε est régulière $\Rightarrow$ on peut multiplier par $\beta'(\rho_\varepsilon)$

$$\begin{cases} \partial_t \beta(\rho_\varepsilon) + v \cdot \nabla \beta(\rho_\varepsilon) = R_\varepsilon \underbrace{\beta'(\rho_\varepsilon)}_{\leq \|\beta'\|_\infty} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \ \text{ dans } L^1(]0,T[\times\Omega), \\ \beta(\rho_\varepsilon)(0) = \beta(\rho_0^\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \beta(\rho_0) \ \text{ dans } L^p(\Omega). \end{cases}$$

- Pour tout $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ solution faible :
  La fonction régularisée $\rho_\varepsilon = \rho \star_{\boldsymbol{n}} \eta_\varepsilon$ vérifie

$$\begin{cases} \partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \ \text{ dans } L^1(]0,T[\times\Omega), \\ \rho_\varepsilon(0) = \rho_0^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \rho_0 \ \text{ dans } L^p(\Omega), \forall p < +\infty. \end{cases}$$

- ρ_ε est régulière $\Rightarrow$ on peut multiplier par $\beta'(\rho_\varepsilon)$

$$\begin{cases} \partial_t \beta(\rho_\varepsilon) + v \cdot \nabla \beta(\rho_\varepsilon) = R_\varepsilon \underbrace{\beta'(\rho_\varepsilon)}_{\leq \|\beta'\|_\infty} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \ \text{ dans } L^1(]0,T[\times\Omega), \\ \beta(\rho_\varepsilon)(0) = \beta(\rho_0^\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \beta(\rho_0) \ \text{ dans } L^p(\Omega). \end{cases}$$

- Or, $\rho_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \rho$ dans L^1, donc $\beta(\rho_\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \beta(\rho)$ dans L^1.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \partial_t \beta(\rho) + v \cdot \nabla \beta(\rho) = 0, \\ \beta(\rho)(0) = \beta(\rho_0). \end{cases}$$

Régularité en temps : Montrons que $\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

$$\partial_t(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) + v \cdot \nabla(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) = R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}.$$

Régularité en temps : Montrons que $\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

$$\partial_t \beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) + v \cdot \nabla \beta(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}) = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2})\beta'(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}).$$

Principe de la démonstration 4/4

Régularité en temps : Montrons que $\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

$$\partial_t |\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}| + v \cdot \nabla |\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}| = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) \mathrm{sgn}(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}).$$

Régularité en temps : Montrons que $\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

$$\partial_t|\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}| + v \cdot \nabla|\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}| = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2})\mathrm{sgn}(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}).$$

On utilise le fait que $\operatorname{div} v = 0$ et $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur le bord :

$$\frac{d}{dt}\|\rho_{\varepsilon_1}(t) - \rho_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|R_{\varepsilon_1}(t) - R_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Régularité en temps : Montrons que $\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

$$\partial_t |\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}| + v \cdot \nabla |\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}| = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2})\mathrm{sgn}(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}).$$

On utilise le fait que $\operatorname{div} v = 0$ et $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur le bord :

$$\frac{d}{dt} \|\rho_{\varepsilon_1}(t) - \rho_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|R_{\varepsilon_1}(t) - R_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\rho_{\varepsilon_1}(t) - \rho_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1} \leq \|\rho_0^{\varepsilon_1} - \rho_0^{\varepsilon_2}\|_{L^1} + \|R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}\|_{L^1}.$$

Régularité en temps : Montrons que $\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

$$\partial_t|\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}| + v \cdot \nabla|\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}| = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2})\mathrm{sgn}(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}).$$

On utilise le fait que $\mathrm{div}\, v = 0$ et $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur le bord :

$$\frac{d}{dt}\|\rho_{\varepsilon_1}(t) - \rho_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|R_{\varepsilon_1}(t) - R_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\rho_{\varepsilon_1}(t) - \rho_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1} \leq \|\rho_0^{\varepsilon_1} - \rho_0^{\varepsilon_2}\|_{L^1} + \|R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}\|_{L^1}.$$

$$\Longrightarrow (\rho_\varepsilon)_\varepsilon \text{ est de Cauchy dans } \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega)).$$

Régularité en temps : Montrons que $\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega))$.

$$\partial_t |\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}| + v \cdot \nabla |\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}| = (R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}) \mathrm{sgn}(\rho_{\varepsilon_1} - \rho_{\varepsilon_2}).$$

On utilise le fait que $\operatorname{div} v = 0$ et $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur le bord :

$$\frac{d}{dt} \|\rho_{\varepsilon_1}(t) - \rho_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|R_{\varepsilon_1}(t) - R_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\sup_{t \in [0,T]} \|\rho_{\varepsilon_1}(t) - \rho_{\varepsilon_2}(t)\|_{L^1} \leq \|\rho_0^{\varepsilon_1} - \rho_0^{\varepsilon_2}\|_{L^1} + \|R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}\|_{L^1}.$$

$$\Longrightarrow (\rho_\varepsilon)_\varepsilon \text{ est de Cauchy dans } \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega)).$$

Comme $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers ρ dans $L^1(]0,T[\times\Omega)$ on a bien

$$\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^1(\Omega)).$$

Propriétés qualitatives

- Principe de comparaison :

$$\rho_1^0 \leq \rho_2^0 \implies \rho_1 \leq \rho_2.$$

Propriétés qualitatives

- **Principe de comparaison :**

$$\rho_1^0 \le \rho_2^0 \implies \rho_1 \le \rho_2.$$

- **Principe de produit :**

$$\left.\begin{array}{l} \partial_t \rho_1 + v \cdot \nabla \rho_1 = 0 \\ \rho_1(0) = \rho_0^1 \\ \\ \partial_t \rho_2 + v \cdot \nabla \rho_2 = 0 \\ \rho_2(0) = \rho_0^2 \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{l} \partial_t(\rho_1\rho_2) + v \cdot \nabla(\rho_1\rho_2) = 0 \\ (\rho_1\rho_2)(0) = \rho_0^1\rho_0^2 \end{array}\right.$$

Théorème

On se donne $\rho_0, \rho_0^n \in L^\infty(\Omega)$, $v, v_n \in L^1(]0,T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v_n = \operatorname{div} v = 0$, $v \cdot \boldsymbol{n} = v_n \cdot \boldsymbol{n} = 0$ *sur* $\partial\Omega$.

Soiten :

- ρ *l'unique sol. faible bornée pour les données* (v, ρ_0).
- ρ_n *l'unique sol. faible bornée pour les données* (v_n, ρ_0^n).

Théorème

On se donne $\rho_0, \rho_0^n \in L^\infty(\Omega)$, $v, v_n \in L^1(]0,T[, (W^{1,1}(\Omega))^d)$,
$\operatorname{div} v_n = \operatorname{div} v = 0$, $v \cdot \boldsymbol{n} = v_n \cdot \boldsymbol{n} = 0$ *sur* $\partial\Omega$.

Soiten :

- ρ *l'unique sol. faible bornée pour les données* (v, ρ_0).
- ρ_n *l'unique sol. faible bornée pour les données* (v_n, ρ_0^n).

$$\textit{Si} \left\{ \begin{array}{l} \sup_n \|\rho_0^n\|_{L^\infty} < +\infty, \\ v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v, \ \textit{dans } L^1(]0,T[\times\Omega), \\ \rho_0^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho_0, \ \textit{dans } L^1(\Omega), \end{array} \right.$$

$$\textit{alors} \left\{ \begin{array}{l} \rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho, \ \textit{dans } L^p(]0,T[\times\Omega), \ \forall p < +\infty \\ \forall t \in [0,T], \rho_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(t), \ \textit{dans } L^p(\Omega), \ \forall p < +\infty. \end{array} \right.$$

1. $\sup_n \|\rho_0^n\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \Longrightarrow \sup_n \|\rho_n\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)} < +\infty,$

$$\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho, \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible-}*,$$

$$\rho_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho v, \quad \text{dans } \mathcal{M}(]0,T[\times\Omega) \text{ faible-}*.$$

1. $\sup_n \|\rho_0^n\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \Longrightarrow \sup_n \|\rho_n\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)} < +\infty$,

$$\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho, \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible-}*,$$

$$\rho_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho v, \quad \text{dans } \mathcal{M}(]0,T[\times\Omega) \text{ faible-}*.$$

2. $\forall n,\ v_n \in L^1(]0,T[,(W^{1,1})^d)$
$\Rightarrow \rho_n$ vérifie la propriété de renormalisation

$$\Rightarrow \rho_n^2 \ \text{ est solution faible pour les données } (v_n, (\rho_0^n)^2).$$

1. $\sup_n \|\rho_0^n\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \Longrightarrow \sup_n \|\rho_n\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)} < +\infty,$

$$\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho, \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible-}*,$$

$$\rho_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho v, \quad \text{dans } \mathcal{M}(]0,T[\times\Omega) \text{ faible-}*.$$

2. $\forall n,\ v_n \in L^1(]0,T[,(W^{1,1})^d)$
$\Rightarrow \rho_n$ vérifie la propriété de renormalisation

$$\Rightarrow \rho_n^2 \quad \text{est solution faible pour les données } (v_n, (\rho_0^n)^2).$$

3. Comme $(\rho_0^n)^2$ converge vers ρ_0^2, on en déduit que

$$\rho_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} R, \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible-}*,$$

$$\rho_n^2 v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Rv, \quad \text{dans } \mathcal{M}(]0,T[\times\Omega) \text{ faible-}*.$$

où R est la solution faible pour les données (v, ρ_0^2).

1. $\sup_n \|\rho_0^n\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \Longrightarrow \sup_n \|\rho_n\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)} < +\infty$,
$$\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho, \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible-}*,$$
$$\rho_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho v, \quad \text{dans } \mathcal{M}(]0,T[\times\Omega) \text{ faible-}*.$$
2. $\forall n,\ v_n \in L^1(]0,T[,(W^{1,1})^d)$
$\Rightarrow \rho_n$ vérifie la propriété de renormalisation
$$\Rightarrow \rho_n^2 \quad \text{est solution faible pour les données } (v_n,(\rho_0^n)^2).$$
3. Comme $(\rho_0^n)^2$ converge vers ρ_0^2, on en déduit que
$$\rho_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} R, \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible-}*,$$
$$\rho_n^2 v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Rv, \quad \text{dans } \mathcal{M}(]0,T[\times\Omega) \text{ faible-}*.$$
où R est la solution faible pour les données (v,ρ_0^2).
4. Comme $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1})^d)$
$\Rightarrow \rho$ vérifie la propriété de renormalisation $\Rightarrow R = \rho^2$.

1. $\sup_n \|\rho_0^n\|_{L^\infty(\Omega)} < +\infty \Longrightarrow \sup_n \|\rho_n\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)} < +\infty$,
$$\rho_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho, \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible-}*,$$
$$\rho_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho v, \quad \text{dans } \mathcal{M}(]0,T[\times\Omega) \text{ faible-}*.$$
2. $\forall n,\ v_n \in L^1(]0,T[,(W^{1,1})^d)$
$\Rightarrow \rho_n$ vérifie la propriété de renormalisation
$$\Rightarrow \rho_n^2 \ \text{ est solution faible pour les données } (v_n, (\rho_0^n)^2).$$
3. Comme $(\rho_0^n)^2$ converge vers ρ_0^2, on en déduit que
$$\rho_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} R, \quad \text{dans } L^\infty \text{ faible-}*,$$
$$\rho_n^2 v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Rv, \quad \text{dans } \mathcal{M}(]0,T[\times\Omega) \text{ faible-}*.$$
où R est la solution faible pour les données (v, ρ_0^2).
4. Comme $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1})^d)$
$\Rightarrow \rho$ vérifie la propriété de renormalisation $\Rightarrow R = \rho^2$.
5. convergence faible + convergence des normes $\Rightarrow$ convergence forte.

Objectif :

Utiliser les résultats sur l'EDP pour étudier l'équation caractéristique

Objectif :

Utiliser les résultats sur l'EDP pour étudier l'équation caractéristique

Définition (Flot lagrangien régulier)

Soit $v \in (L^\infty(]0,T[\times\Omega))^d$. *Une application* $\Phi^0 : [0,T] \times \Omega \mapsto \Omega$ *est appellée* *flot lagrangien régulier* *pour* v *issu de* 0 *si*

1. *Pour presque tout* $t \in]0,T[$, *on a*
$$\left|\left\{x \in \Omega,\ \Phi^0(t,x) \in A\right\}\right| = 0, \quad \textit{pour tout borélien } A \textit{ de mes. nulle.}$$

OBJECTIF :

Utiliser les résultats sur l'EDP pour étudier l'équation caractéristique

DÉFINITION (FLOT LAGRANGIEN RÉGULIER)

Soit $v \in (L^\infty(]0,T[\times\Omega))^d$. *Une application* $\Phi^0 : [0,T] \times \Omega \mapsto \Omega$ *est appellée* *flot lagrangien régulier* *pour* v *issu de* 0 *si*

1. *Pour presque tout* $t \in]0,T[$, *on a*
$$\left| \left\{ x \in \Omega,\ \Phi^0(t,x) \in A \right\} \right| = 0, \quad \textit{pour tout borélien } A \textit{ de mes. nulle.}$$

2. *Le problème de Cauchy suivant*
$$\begin{cases} \partial_t \Phi^0(t,x) = \underbrace{v(t,\Phi^0(t,x))}_{\textit{bien défini p.p. !}}, \\ \Phi^0(0,x) = x, \end{cases}$$
est vérifié au sens des distributions sur $]0,T[\times\Omega$.

Proposition (Trajectoires pour presque tout x)

Soit Φ^0 un flot lagrangien régulier issu de 0 pour un champ de vecteurs v.
Pour presque tout $x \in \Omega$, $\exists!\ \Phi^0_x : [0,T] \mapsto \Omega$ lipschitzienne tq

- $\Phi^0(t,x) = \Phi^0_x(t)$, *pour presque tout* $t \in [0,T]$.
- $\Phi^0_x(0) = x$ *et* $(\Phi^0_x)'(t) = v(t, \Phi^0_x(t))$ *pour presque tout* $t \in [0,T]$.

PROPOSITION (TRAJECTOIRES POUR PRESQUE TOUT x)

Soit Φ^0 un flot lagrangien régulier issu de 0 pour un champ de vecteurs v.
Pour presque tout $x \in \Omega$, $\exists!\ \Phi^0_x : [0,T] \mapsto \Omega$ lipschitzienne tq

- $\Phi^0(t,x) = \Phi^0_x(t)$, *pour presque tout $t \in [0,T]$.*
- $\Phi^0_x(0) = x$ *et* $(\Phi^0_x)'(t) = v(t, \Phi^0_x(t))$ *pour presque tout $t \in [0,T]$.*

THÉORÈME

Soit $v \in L^1(]0,T[,(W^{1,1}(\Omega))^d) \cap L^\infty$, $\operatorname{div} v = 0$ et $v \cdot \boldsymbol{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.
Il existe un unique flot lagrangien régulier Φ^0 issu de 0 pour v.

De plus, $\Phi^0 \in \mathcal{C}^0([0,T],(L^p(\Omega))^d)$ pour tout $p < +\infty$.

REMARQUE : On peut définir de façon similaire un flot Φ^s issu de tout instant $s \in [0,T]$.

1. On approche v par des champs réguliers v_n pour lesquels le flot Φ_n^0 est bien défini par Cauchy-Lipschitz.

1. On approche v par des champs réguliers v_n pour lesquels le flot Φ_n^0 est bien défini par Cauchy-Lipschitz.
2. On remarque que ce flot vérifie $\Phi_n^0(s,x) = \Gamma_n^s(0,x)$ avec

$$\begin{cases} \partial_t \Gamma_n^s + (\nabla \Gamma_n^s).v_n = 0 \\ \Gamma_n^s(s,x) = x. \end{cases} \tag{TR}$$

1. On approche v par des champs réguliers v_n pour lesquels le flot Φ_n^0 est bien défini par Cauchy-Lipschitz.
2. On remarque que ce flot vérifie $\Phi_n^0(s,x) = \Gamma_n^s(0,x)$ avec

$$\begin{cases} \partial_t \Gamma_n^s + (\nabla \Gamma_n^s).v_n = 0 \\ \Gamma_n^s(s,x) = x. \end{cases} \tag{TR}$$

3. Théorème de stabilité des sol. faibles du transport $\Longrightarrow$

$$\forall s \in [0,T], \quad \Phi_n^0(s,\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi^0(s,\cdot), \quad \text{dans } L^1 \ \textbf{fort}$$

1. On approche v par des champs réguliers v_n pour lesquels le flot Φ_n^0 est bien défini par Cauchy-Lipschitz.
2. On remarque que ce flot vérifie $\Phi_n^0(s,x) = \Gamma_n^s(0,x)$ avec

$$\begin{cases} \partial_t \Gamma_n^s + (\nabla \Gamma_n^s).v_n = 0 \\ \Gamma_n^s(s,x) = x. \end{cases} \tag{TR}$$

3. Théorème de stabilité des sol. faibles du transport $\Longrightarrow$

$$\forall s \in [0,T], \quad \Phi_n^0(s,\cdot) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi^0(s,\cdot), \quad \text{dans } L^1 \ \textbf{fort}$$

4. On passe à la limite dans le terme non-linéaire de

$$\partial_t \Phi_n^0(t,x) = v_n(t, \Phi_n^0(t,x)).$$

1. Propriété de semi-groupe :

$$\Phi^{t_2}(t_3, \Phi^{t_1}(t_2, x)) = \Phi^{t_1}(t_3, x), \quad \forall t_1, t_2, t_3, \text{ et presque tout } x \in \Omega.$$

1. PROPRIÉTÉ DE SEMI-GROUPE :

$$\Phi^{t_2}(t_3, \Phi^{t_1}(t_2, x)) = \Phi^{t_1}(t_3, x), \quad \forall t_1, t_2, t_3, \text{ et presque tout } x \in \Omega.$$

2. SOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT :
L'unique solution ρ de (T) pour la donnée $\rho_0 \in L^\infty$ vérifie

$$\rho(t, \Phi^0(t, x)) = \rho_0(x), \quad \forall t, \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

1. PROPRIÉTÉ DE SEMI-GROUPE :

$$\Phi^{t_2}(t_3, \Phi^{t_1}(t_2, x)) = \Phi^{t_1}(t_3, x), \quad \forall t_1, t_2, t_3, \text{ et presque tout } x \in \Omega.$$

2. SOLUTION DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT :
L'unique solution ρ de (T) pour la donnée $\rho_0 \in L^\infty$ vérifie

$$\rho(t, \Phi^0(t, x)) = \rho_0(x), \quad \forall t, \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

3. STABILITÉ : $v_n, v \in L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d) \cap L^\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \sup_n \|v_n\|_{L^\infty} < +\infty \\ v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v \text{ dans } L^1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \Phi_n^0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi^0 \text{ dans } L^1.$$

1. **Propriété de semi-groupe :**

$$\Phi^{t_2}(t_3, \Phi^{t_1}(t_2, x)) = \Phi^{t_1}(t_3, x), \quad \forall t_1, t_2, t_3, \text{ et presque tout } x \in \Omega.$$

2. **Solution de l'équation de transport :**
L'unique solution ρ de (T) pour la donnée $\rho_0 \in L^\infty$ vérifie

$$\rho(t, \Phi^0(t, x)) = \rho_0(x), \quad \forall t, \text{ pour presque tout } x \in \Omega.$$

3. **Stabilité :** $v_n, v \in L^1(]0, T[, (W^{1,1}(\Omega))^d) \cap L^\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \sup_n \|v_n\|_{L^\infty} < +\infty \\ v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} v \text{ dans } L^1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \Phi_n^0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi^0 \text{ dans } L^1.$$

4. **Régularité du flot :**
(Ambrosio-Lecumberry-Maniglia, Rend. Sem. Mat. Padova 2005)
(Crippa-De Lellis, preprints 2005/2006)
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A de mesure $\le \varepsilon$ tel que

$$\Phi^0 \text{ est lipschtizienne sur }]0, T[\times \Omega \setminus A.$$

On suppose $v \in L^1(]0,T[,(BV(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$.

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon.$$

On suppose $v \in L^1(]0,T[,(BV(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$.

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon.$$

Décomposition de la différentielle de v

$$D_x v = \underbrace{\nabla v}_{\in L^1} dx + D_x^s v = \nabla v \, dx + \underbrace{M(t,x)}_{\text{matrice } |M|=1} |D_x^s v|.$$

On suppose $v \in L^1(]0,T[, (BV(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$.

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon.$$

Décomposition de la différentielle de v

$$D_x v = \underbrace{\nabla v}_{\in L^1} dx + D_x^s v = \nabla v \, dx + \underbrace{M(t,x)}_{\text{matrice } |M|=1} |D_x^s v|.$$

$\sup_\varepsilon \|R_\varepsilon\|_{\mathcal{M}} < +\infty \Rightarrow$ si σ est v.a. faible-$*$ de $|R_\varepsilon|$ on vérifie que

$$\sigma \leq \|\rho\|_{L^\infty} \Lambda(M,\eta) |D_x^s v|, \quad \text{où} \;\; \Lambda(M,\eta) = \int_B |\nabla \eta(z).M.z| \, dz.$$

On suppose $v \in L^1(]0,T[,(BV(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$.

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon.$$

Décomposition de la différentielle de v

$$D_x v = \underbrace{\nabla v}_{\in L^1} dx + D_x^s v = \nabla v \, dx + \underbrace{M(t,x)}_{\text{matrice } |M| = 1} |D_x^s v|.$$

$\sup_\varepsilon \|R_\varepsilon\|_{\mathcal{M}} < +\infty \Rightarrow$ si σ est v.a. faible-$*$ de $|R_\varepsilon|$ on vérifie que

$$\sigma \leq \|\rho\|_{L^\infty} \Lambda(M,\eta) |D_x^s v|, \quad \text{où } \Lambda(M,\eta) = \int_B |\nabla \eta(z).M.z| \, dz.$$

$$|\partial_t \beta(\rho_\varepsilon) + v \cdot \nabla \beta(\rho_\varepsilon)| \leq \|R_\varepsilon\|_{\mathcal{M}} \|\beta'(\rho_\varepsilon)\|_\infty$$

On suppose $v \in L^1(]0,T[,(BV(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$.

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon.$$

Décomposition de la différentielle de v

$$D_x v = \underbrace{\nabla v}_{\in L^1} dx + D_x^s v = \nabla v \, dx + \underbrace{M(t,x)}_{\text{matrice } |M|=1} |D_x^s v|.$$

$\sup_\varepsilon \|R_\varepsilon\|_{\mathcal{M}} < +\infty \Rightarrow$ si σ est v.a. faible-$*$ de $|R_\varepsilon|$ on vérifie que

$$\sigma \leq \|\rho\|_{L^\infty} \Lambda(M,\eta) |D_x^s v|, \quad \text{où} \;\; \Lambda(M,\eta) = \int_B |\nabla \eta(z).M.z| \, dz.$$

$$|\partial_t \beta(\rho) + v \cdot \nabla \beta(\rho)| \leq C \qquad \Lambda(M,\eta) \;\; |D_x^s v|$$

On suppose $v \in L^1(]0,T[,(BV(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$.

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon.$$

Décomposition de la différentielle de v

$$D_x v = \underbrace{\nabla v}_{\in L^1} dx + D_x^s v = \nabla v\, dx + \underbrace{M(t,x)}_{\text{matrice } |M|=1} |D_x^s v|.$$

$\sup_\varepsilon \|R_\varepsilon\|_{\mathcal{M}} < +\infty \Rightarrow$ si σ est v.a. faible-$*$ de $|R_\varepsilon|$ on vérifie que

$$\sigma \leq \|\rho\|_{L^\infty} \Lambda(M,\eta) |D_x^s v|, \quad \text{où } \Lambda(M,\eta) = \int_B |\nabla \eta(z).M.z|\, dz.$$

$$|\partial_t \beta(\rho) + v \cdot \nabla \beta(\rho)| \leq C \inf_\eta \left(\Lambda(M,\eta)\right) |D_x^s v|$$

On suppose $v \in L^1(]0,T[,(BV(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$.

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon .$$

Décomposition de la différentielle de v

$$D_x v = \underbrace{\nabla v}_{\in L^1} dx + D_x^s v = \nabla v \, dx + \underbrace{M(t,x)}_{\text{matrice } |M|=1} |D_x^s v| .$$

$\sup_\varepsilon \|R_\varepsilon\|_{\mathcal{M}} < +\infty \Rightarrow$ si σ est v.a. faible-$*$ de $|R_\varepsilon|$ on vérifie que

$$\sigma \leq \|\rho\|_{L^\infty} \Lambda(M,\eta) |D_x^s v|, \quad \text{où } \Lambda(M,\eta) = \int_B |\nabla \eta(z).M.z| \, dz.$$

$$|\partial_t \beta(\rho) + v \cdot \nabla \beta(\rho)| \leq C \inf_\eta \left(\Lambda(M,\eta)\right) |D_x^s v|$$

Lemme d'Alberti : (Cf. aussi **Bouchut (2001)**) $\inf_\eta \Lambda(M,\eta) = |\mathrm{Tr} M|$.

On suppose $v \in L^1(]0,T[,(BV(\Omega))^d)$, $\operatorname{div} v = 0$.

$$\partial_t \rho_\varepsilon + v \cdot \nabla \rho_\varepsilon = R_\varepsilon.$$

Décomposition de la différentielle de v

$$D_x v = \underbrace{\nabla v}_{\in L^1} \, dx + D_x^s v = \nabla v \, dx + \underbrace{M(t,x)}_{\text{matrice } |M|=1} |D_x^s v|.$$

$\sup_\varepsilon \|R_\varepsilon\|_{\mathcal{M}} < +\infty \Rightarrow$ si σ est v.a. faible-$*$ de $|R_\varepsilon|$ on vérifie que

$$\sigma \leq \|\rho\|_{L^\infty} \Lambda(M,\eta) |D_x^s v|, \quad \text{où } \Lambda(M,\eta) = \int_B |\nabla \eta(z).M.z| \, dz.$$

$$|\partial_t \beta(\rho) + v \cdot \nabla \beta(\rho)| \leq C \inf_\eta \left(\Lambda(M,\eta)\right) |D_x^s v|$$

Lemme d'Alberti : (Cf. aussi **Bouchut (2001)**) $\inf_\eta \Lambda(M,\eta) = |\mathrm{Tr} M|$.

$$|\partial_t \beta(\rho) + v \cdot \nabla \beta(\rho)| \leq C |\mathrm{Tr} M| |D_x^s v| = C |\mathrm{Tr} D_x^s v| = 0.$$

Plan

Question : Que se passe-t'il si le champ v n'est pas tangent à $\partial\Omega$?

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = \operatorname{div}_{t,x}(\rho, \rho v) = 0$$

$\Rightarrow$ la trace **normale** de $(\rho, \rho v)$, est définie faiblement sur $\partial(]0,T[\times\Omega)$

Le problème des traces 1/2

Question : Que se passe-t'il si le champ v n'est pas tangent à $\partial\Omega$?

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = \operatorname{div}_{t,x}(\rho, \rho v) = 0$$

$\Rightarrow$ la trace **normale** de $(\rho, \rho v)$, est définie faiblement sur $\partial(]0,T[\times\Omega)$

Peut-on faire mieux ?

Bardos (Ann. ENS, 1970), **Cessenat (CRAS, 1984,1985)**
Mischler (CPDE, 2000), **B. (DIE, 2005)**

Notations : mesures sur $]0,T[\times\Gamma$

$$d\mu_v = (v\cdot \boldsymbol{n})\, d\sigma\, dt, \quad |d\mu_v| = |v\cdot\boldsymbol{n}|\, d\sigma\, dt,$$

$$d\mu_v = d\mu_v^+ - d\mu_v^-, \quad |d\mu_v| = d\mu_v^+ + d\mu_v^-.$$

Théorème (B. (2005))

On suppose que $(v \cdot \boldsymbol{n}) \in L^\alpha(]0,T[\times\Gamma)$, $\alpha > 1$.
Pour toute solution faible $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *du transport, il existe une unique trace* $\gamma\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|)$ *vérifiant*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_0^T \int_\Gamma (\gamma\rho)\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})\,dt\,d\sigma = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(]0,T[\times\overline{\Omega})$.

THÉORÈME (B. (2005))

On suppose que $(v \cdot \boldsymbol{n}) \in L^\alpha(]0,T[\times\Gamma)$, $\alpha > 1$.
Pour toute solution faible $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ *du transport, il existe une unique trace* $\gamma\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|)$ *vérifiant*

$$\int_0^T \int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v \cdot \nabla\varphi)\, dt\, dx + \int_0^T \int_\Gamma (\gamma\rho)\varphi(v \cdot \boldsymbol{n})\, dt\, d\sigma = 0,$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]0,T[\times\overline{\Omega})$.
De plus, on a

- *Régularité en temps :* $\rho \in \mathcal{C}^0([0,T], L^p(\Omega))$ *pour tout* $p < +\infty$.
- *Propriété de renormalisation :*

$$\gamma(\beta(\rho)) = \beta(\gamma\rho), \quad \forall \beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}).$$

Résolution du problème de Cauchy

Objectif : résoudre le problème

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \rho = \rho^e, \quad \text{là où } v \cdot \boldsymbol{n} < 0, \\ \rho(0) = \rho_0. \end{cases}$$

Résolution du problème de Cauchy

Objectif : résoudre le problème

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v\cdot\nabla\rho = 0, \\ \rho = \rho^e, \quad \text{là où } v\cdot \boldsymbol{n} < 0, \\ \rho(0) = \rho_0. \end{cases}$$

Théorème

Pour tout $\rho_0 \in L^\infty(\Omega)$ et tout $\rho^e \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^-)$, il existe $\rho \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$ et $\rho^s \in L^\infty(]0,T[\times\Gamma, d\mu_v^+)$ **uniques** *tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1([0,T[\times\overline{\Omega})$*

$$\int_0^T\int_\Omega \rho(\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi)\,dt\,dx + \int_\Omega \rho_0\varphi(0)\,dx \\ - \int_0^T\int_\Gamma \rho^s\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^+\,d\sigma\,dt + \int_0^T\int_\Gamma \rho^e\varphi(v\cdot\boldsymbol{n})^-\,d\sigma\,dt = 0.$$

+ Continuité en temps + Renormalisation.

Propriétés qualitatives

- Principe de comparaison :

$$\left.\begin{aligned} &\rho_0^1 \leq \rho_0^2, \quad \text{p.p.} \\ &\rho_1^e \leq \rho_2^e, \quad d\mu_v^-\text{-p.p.} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} &\rho_1 \leq \rho_2, \quad \text{p.p.} \\ &\rho_1^s \leq \rho_2^s, \quad d\mu_v^+\text{-p.p.} \end{aligned}\right.$$

- Principe de produit :

$$\left.\begin{aligned} &\partial_t \rho_1 + v \cdot \nabla \rho_1 = 0, \\ &\partial_t \rho_2 + v \cdot \nabla \rho_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} &\partial_t(\rho_1\rho_2) + v \cdot \nabla(\rho_1\rho_2) = 0 \\ &\gamma(\rho_1\rho_2) = (\gamma\rho_1)(\gamma\rho_2) \end{aligned}\right.$$

1. Formule de trace :

$$\gamma\rho(t,\sigma) = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{\eta}\int_0^\eta \rho(t,\sigma-\xi\boldsymbol{n}(\sigma))\,d\xi, \quad \text{dans } L^q(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|).$$

1. Formule de trace :

$$\gamma\rho(t,\sigma) = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{\eta}\int_0^\eta \rho(t,\sigma - \xi \boldsymbol{n}(\sigma))\, d\xi, \quad \text{dans } L^q(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|).$$

2. Traces des solutions $L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$: $p < +\infty$

$$\gamma\rho \notin L^p(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|)$$

Il faut définir le temps de parcours $\tau(t,x)$.
On montre alors (propagation à vitesse finie)

- $\tau(t,x) > 0$ presque partout.
- $\gamma\tau(t,\sigma) > 0$ $|d\mu_v|$-presque partout.

$$\gamma\rho \in L^p(]0,T[\times\Gamma, \gamma\tau|d\mu_v|).$$

1. **Formule de trace :**

$$\gamma\rho(t,\sigma) = \lim_{\eta\to 0} \frac{1}{\eta}\int_0^\eta \rho(t,\sigma - \xi\boldsymbol{n}(\sigma))\,d\xi, \quad \text{dans } L^q(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|).$$

2. **Traces des solutions $L^\infty(]0,T[, L^p(\Omega))$: $p < +\infty$**

$$\gamma\rho \notin L^p(]0,T[\times\Gamma, |d\mu_v|)$$

Il faut définir le temps de parcours $\tau(t,x)$.
On montre alors (propagation à vitesse finie)
- $\tau(t,x) > 0$ presque partout.
- $\gamma\tau(t,\sigma) > 0$ $|d\mu_v|$-presque partout.

$$\gamma\rho \in L^p(]0,T[\times\Gamma, \gamma\tau|d\mu_v|).$$

3. **CL non-linéaires pour un écoulement non-homogène**

(B.-Fabrie, DCDS-B 2007)

Existence de solutions au problème de NS avec des données au bord en entrée du domaine et la CL suivante en sortie

$$\boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} = \sigma_{\text{ref}}.\boldsymbol{n} - \frac{1}{2}\rho_b(v\cdot\boldsymbol{n})^-(v - v_{\text{ref}}),$$

Plan

Exemple : On prend $\Omega = \mathbb{R}^2$ pour simplifier.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \ \text{ à support compact,}$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \ \text{avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Exemple : On prend $\Omega = \mathbb{R}^2$ pour simplifier.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \ \text{ à support compact,}$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \ \text{avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Calcul explicite de la solution du transport :

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - \Phi(t), y), \ \text{avec } \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

Exemple : On prend $\Omega = \mathbb{R}^2$ pour simplifier.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \;\; \text{à support compact},$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \;\text{avec}\; \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Calcul explicite de la solution du transport :

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - \Phi(t), y), \;\text{avec}\; \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds.$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\rho(t,x,y) - \rho(t,x_0,y)|\,dt\,dy$$
$$= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x - \Phi(t), y) - \rho_0(x_0 - \Phi(t), y)|\,dt\,dy$$

Exemple : On prend $\Omega = \mathbb{R}^2$ pour simplifier.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ à support compact,}$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \text{ avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Calcul explicite de la solution du transport :

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - \Phi(t), y), \text{ avec } \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds.$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\rho(t,x,y) - \rho(t,x_0,y)|\,dt\,dy \\
&\qquad = \int_0^{\Phi(T)} \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x-\tau,y) - \rho_0(x_0-\tau,y)| \frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(\tau))}\,d\tau\,dy.
\end{aligned}$$

Exemple : On prend $\Omega = \mathbb{R}^2$ pour simplifier.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \text{ à support compact},$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \text{ avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Calcul explicite de la solution du transport :

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - \Phi(t), y), \text{ avec } \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds.$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\rho(t,x,y) - \rho(t,x_0,y)|\,dt\,dy \\ \leq \frac{1}{\inf \varphi} \int_0^{\Phi(T)} \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x-\tau,y) - \rho_0(x_0-\tau,y)|\,d\tau\,dy.$$

Exemple : On prend $\Omega = \mathbb{R}^2$ pour simplifier.

$$\rho_0 \in L^\infty(\Omega) \ \text{ à support compact},$$

$$v(t,x,y) = (\varphi(t), 0), \ \text{avec } \varphi \in L^1(]0,T[), \quad \inf \varphi > 0.$$

Calcul explicite de la solution du transport :

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - \Phi(t), y), \ \text{avec } \Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\rho(t,x,y) - \rho(t,x_0,y)|\, dt\, dy \leq \frac{1}{\inf \varphi} \int_0^{\Phi(T)} \int_{\mathbb{R}} |\rho_0(x-\tau,y) - \rho_0(x_0-\tau,y)|\, d\tau\, dy.$$

Continuité des translations dans $L^1 \Longrightarrow$

$$x \mapsto \rho(\cdot, x, \cdot) \in \mathcal{C}^0_x(\mathbb{R}, L^1_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})).$$

- Aucune continuité par rapport à y !
  On a seulement continuité dans la direction du champ v.

- Aucune continuité par rapport à y !
  On a seulement continuité dans la direction du champ v.
- Si φ s'annulle sur $]t_0, t_1[$ alors on a

$$\rho(t, x, y) = \rho_0(x - C, y), \quad \forall t \in]t_0, t_1[,$$

  et donc il n'y a sûrement pas continuité en x !

- Aucune continuité par rapport à y !
  On a seulement continuité dans la direction du champ v.
- Si φ s'annulle sur $]t_0, t_1[$ alors on a

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - C, y), \quad \forall t \in]t_0, t_1[,$$

  et donc il n'y a sûrement pas continuité en x !
- On peut quand même montrer par le calcul précédent que

$$\rho(t,x,y)\varphi(t) \in \mathcal{C}^0_x(\mathbb{R}, L^1_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})),$$

  autrement dit

$$x \mapsto \rho(\cdot,x,\cdot)(v(\cdot,x,\cdot)\cdot e_x) \in \mathcal{C}^0_x(\mathbb{R}, L^1_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})).$$

- Aucune continuité par rapport à y !
  On a seulement continuité dans la direction du champ v.
- Si φ s'annulle sur $]t_0, t_1[$ alors on a

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(x - C, y), \quad \forall t \in]t_0, t_1[,$$

  et donc il n'y a sûrement pas continuité en x !
- On peut quand même montrer par le calcul précédent que

$$\rho(t,x,y)\varphi(t) \in \mathcal{C}^0_x(\mathbb{R}, L^1_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})),$$

  autrement dit

$$x \mapsto \rho(\cdot,x,\cdot)(v(\cdot,x,\cdot)\cdot e_x) \in \mathcal{C}^0_x(\mathbb{R}, L^1_{t,y}(]0,T[\times\mathbb{R})).$$

- Aucune régularité nécessaire sur φ.

  $\Rightarrow$ Aucune régularité en temps nécessaire sur le champ v.

Tentative de preuve

Faisons un calcul formel en supposant $v_1(t,x,y) \geq \alpha > 0$.

L'équation

$$\partial_t \rho + v_1 \partial_x \rho + v_2 \partial_y \rho = 0.$$

s'écrit aussi

$$\partial_x(\rho v_1) + \partial_t \left(\frac{1}{v_1} (\rho v_1) \right) + \partial_y \left(\frac{v_2}{v_1} (\rho v_1) \right) = 0.$$

Tentative de preuve

Faisons un calcul formel en supposant $v_1(t,x,y) \geq \alpha > 0$.
L'équation

$$\partial_t \rho + v_1 \partial_x \rho + v_2 \partial_y \rho = 0.$$

s'écrit aussi

$$\partial_x(\rho v_1) + \partial_t \left(\frac{1}{v_1}(\rho v_1) \right) + \partial_y \left(\frac{v_2}{v_1}(\rho v_1) \right) = 0.$$

On prend x comme variable de temps

$$\partial_x R + w_0 \partial_t R + w_2 \partial_y R + cR = 0,$$

où

$$R = \rho v_1, \quad w_0 = \frac{1}{v_1}, \; w_2 = \frac{v_2}{v_1}, \; c = \partial_t w_0 + \partial_y w_2.$$

Tentative de preuve

Faisons un calcul formel en supposant $v_1(t,x,y) \geq \alpha > 0$.
L'équation

$$\partial_t \rho + v_1 \partial_x \rho + v_2 \partial_y \rho = 0.$$

s'écrit aussi

$$\partial_x(\rho v_1) + \partial_t \left(\frac{1}{v_1}(\rho v_1) \right) + \partial_y \left(\frac{v_2}{v_1}(\rho v_1) \right) = 0.$$

On prend x comme variable de temps

$$\partial_x R + w_0 \partial_t R + w_2 \partial_y R + cR = 0,$$

où

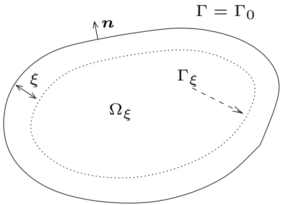
$$R = \rho v_1, \quad w_0 = \frac{1}{v_1}, \; w_2 = \frac{v_2}{v_1}, \; c = \partial_t w_0 + \partial_y w_2.$$

Peut-on utiliser une technique à la DiPerna - Lions ?
Pour cela, il faut par exemple $(w_0, w_2) \in L^1_x(]0,T[, (W^{1,1}_{t,y}(]0,T[\times \mathbb{R}))^d)$.

Cela nécessite de la régularité en temps sur v !

Soit $v \in L^2(]0,T[, (H^1(\Omega))^d)$ et ρ solution bornée de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0$. Pour $\xi \geq 0$ assez petit, ρ est solution dans Ω_ξ donc possède une trace

$$\gamma_\xi \rho \in L^\infty(]0,T[\times \Gamma_\xi, |d\mu_v|).$$



$$x \longleftrightarrow (\sigma = P_\Gamma(x), s = d(x,\Gamma)) \in \Gamma \times]0,\xi[,$$

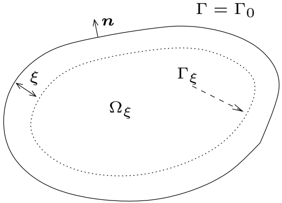
$$x = \sigma - s\boldsymbol{n}(\sigma).$$

Soit $v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d)$ et ρ solution bornée de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0$.
Pour $\xi \geq 0$ assez petit, ρ est solution dans Ω_ξ donc possède une trace

$$\gamma_\xi \rho \in L^\infty(]0,T[\times \Gamma_\xi, |d\mu_v|).$$

Théorème (B., (2005))

1. *On a* $\rho(t,\xi,\sigma)(v(t,\xi,\sigma)\cdot \boldsymbol{n}(\sigma)) = (\gamma_\xi \rho)(t,\sigma)(v(t,\xi,\sigma)\cdot \boldsymbol{n}(\sigma))$ *p.p.*



$$x \longleftrightarrow (\sigma = P_\Gamma(x), s = d(x,\Gamma)) \in \Gamma \times]0,\xi[,$$

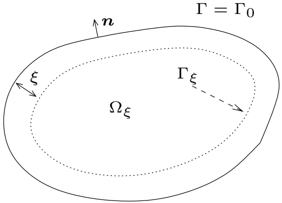
$$x = \sigma - s\boldsymbol{n}(\sigma).$$

Soit $v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d)$ et ρ solution bornée de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0$.
Pour $\xi \geq 0$ assez petit, ρ est solution dans Ω_ξ donc possède une trace

$$\gamma_\xi \rho \in L^\infty(]0,T[\times \Gamma_\xi, |d\mu_v|).$$

Théorème (B., (2005))

1. *On a* $\rho(t,\xi,\sigma)(v(t,\xi,\sigma)\cdot \boldsymbol{n}(\sigma)) = (\gamma_\xi \rho)(t,\sigma)(v(t,\xi,\sigma)\cdot \boldsymbol{n}(\sigma))$ *p.p.*
2. *L'application* $\xi \mapsto \gamma_\xi \rho\, (v(\cdot,\xi,\cdot)\cdot \boldsymbol{n}(\sigma)) \in L^p(]0,T[\times\Gamma)$ *est* $\mathcal{C}^0$.



$$x \longleftrightarrow (\sigma = P_\Gamma(x), s = d(x,\Gamma)) \in \Gamma\times]0,\xi[,$$

$$x = \sigma - s\boldsymbol{n}(\sigma).$$

Soit $v \in L^2(]0,T[,(H^1(\Omega))^d)$ et ρ solution bornée de $\partial_t \rho + v \cdot \nabla \rho = 0$. Pour $\xi \geq 0$ assez petit, ρ est solution dans Ω_ξ donc possède une trace

$$\gamma_\xi \rho \in L^\infty(]0,T[\times \Gamma_\xi, |d\mu_v|).$$

Théorème (B., (2005))

1. *On a* $\rho(t,\xi,\sigma)(v(t,\xi,\sigma)\cdot \boldsymbol{n}(\sigma)) = (\gamma_\xi \rho)(t,\sigma)(v(t,\xi,\sigma)\cdot \boldsymbol{n}(\sigma))$ *p.p.*
2. *L'application* $\xi \mapsto \gamma_\xi \rho\,(v(\cdot,\xi,\cdot)\cdot \boldsymbol{n}(\sigma)) \in L^p(]0,T[\times\Gamma)$ *est* $\mathcal{C}^0$.

Corollaire

Soit Σ *une hypersurface régulière,* $\mathbf{N}$ *sa normale. Si on a*

$$|v\cdot \mathbf{N}| \geq \alpha > 0, \ \ sur\ ]t_1,t_2[\times\Sigma\times[-\xi_0,\xi_0],$$

alors

$$\rho \in \mathcal{C}^0_\xi([-\xi_0,\xi_0], L^p_{t,\sigma}(]t_1,t_2[\times\Sigma)), \quad \forall p < +\infty.$$

Plan

Conclusions

Solutions renormalisées pour des champs Sobolev ou BV

- Existence et unicité des solutions faibles.
- Bonnes propriétés qualitatives.
- Stabilité / Compacité.
- Définition d'un flot lagrangien régulier pour l'éq. caractéristique.

Conclusions

Solutions renormalisées pour des champs Sobolev ou BV

- Existence et unicité des solutions faibles.
- Bonnes propriétés qualitatives.
- Stabilité / Compacité.
- Définition d'un flot lagrangien régulier pour l'éq. caractéristique.

Extensions/Applications :

- Théorèmes de trace et problème au bord.
- Continuité en espace des solutions faibles.
- Etude de problèmes couplés du type NS non-homogène.

Conclusions

Solutions renormalisées pour des champs Sobolev ou BV

- Existence et unicité des solutions faibles.
- Bonnes propriétés qualitatives.
- Stabilité / Compacité.
- Définition d'un flot lagrangien régulier pour l'éq. caractéristique.

Extensions/Applications :

- Théorèmes de trace et problème au bord.
- Continuité en espace des solutions faibles.
- Etude de problèmes couplés du type NS non-homogène.

Problèmes ouverts :

- Renormalisation pour les champs *presque incompressibles* :

$$\exists j \in L^\infty(]0,T[\times\Omega), \quad \inf j > 0, \quad \partial_t j + \operatorname{div}(jv) = 0.$$

- **Conjecture de Bressan** : **(Bressan, Rend. Sem. Padova 2003)**
  Soit $(v_n)_n$ une suite de champs de vecteurs réguliers telle que $\sup_n \|v_n\|_{L^\infty} + \|\nabla v_n\|_{L^1} < +\infty$ et dont les flots Φ_n^0 vérifient

$$0 < 1/C < \mathrm{Jac}(\Phi_n^0) < C.$$

  Alors, la suite $(\Phi_n^0)_n$ est précompacte dans L^1.

Ambrosio-Crippa, *Existence, uniqueness, stability and differentiability properties of the flow associated to weakly differentiable vector fields*

http://cvgmt.sns.it/papers/ambcri06/

DeLellis, *Notes on hyperbolic systems of conservation laws and transport equations*

http://cvgmt.sns.it/papers/del06/