Méthodes de volumes finis pour les écoulements en milieux poreux

F. Boyer

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
CNRS / Université Paul Cézanne

Ecole d'été Milieux Poreux
LEM2I
Tipaza, 13-18 Juin 2010

Plan général du cours

- Introduction : modèles / problématiques.
- Les bases des volumes finis en 1D.
- Le schéma volumes finis à 2 points en 2D non structuré.
- Les outils d'analyse pour ce schéma.
- DDFV 2D dans le cadre linéaire.
- DDFV 2D dans le cas non-linéaire.
- Revues des autres types de schémas volumes finis en 2D
- Benchmark 2D.
- Approches DDFV en 3D.

Plan

1. **Introduction**
   - Ecoulements complexes en milieux poreux
   - Autres modèles
   - Cahier des charges

2. **Schéma Volumes Finis 1D**
   - Notations. Construction
   - Analyse du schéma. Approche DF
   - Analyse du schéma. Approche VF
   - Implémentation en Scilab
   - Extensions

Plan

8. Schémas DDFV en 3D
   - Reconstruction de gradient en 3D
   - L'approche de Coudière-Pierre et Andreianov & al.
   - Le schéma de Hermeline
   - L'approche Coudière-Hubert
   - Implémentation
   - Résultats théoriques
   - Résultats numériques

Ecoulement d'un fluide incompressible en milieu poreux

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \text{conservation de la masse,}$$

$$v = -\varphi(x, \nabla p), \quad \text{loi constitutive pour la vitesse de filtration.}$$

Exemples d'écoulements de Darcy …

Ecoulement d'un fluide incompressible en milieu poreux

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v = 0, &\quad \text{conservation de la masse,} \\ v = -\varphi(x, \nabla p), &\quad \text{loi constitutive pour la vitesse de filtration.} \end{aligned}$$

Loi de Darcy

$$v = -K(x)\nabla p,$$

le tenseur $K(x)$ est la perméabilité.

Exemples d'écoulements de Darcy ...

Ecoulement d'un fluide incompressible en milieu poreux

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \text{conservation de la masse,}$$

$$v = -\varphi(x, \nabla p), \quad \text{loi constitutive pour la vitesse de filtration.}$$

Régimes non linéaires

Dans certains cas, on doit considérer des effets non linéaires :

- Loi de Darcy-Forchheimer : En cas de forts gradients de pression

$$-\nabla p = \frac{1}{k} v + \beta |v| v, \iff v = \frac{-2k\nabla p}{1 + \sqrt{1 + 4\beta k^2 |\nabla p|}}.$$

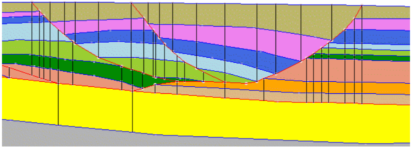
- Loi de puissance : Effets non-newtoniens

$$|v|^{n-1} v = -k\nabla p, \iff v = -|k\nabla p|^{\frac{1}{n}-1}(k\nabla p).$$

Dans tous les cas, la loi $\nabla p \mapsto v = -\varphi(x, \nabla p)$ est monotone

Hétérogénéités, Discontinuités, Anisotropie

Exemple de structure souterraine



Chaque couleur représente un milieu poreux différent :

$$-\mathrm{div}\,(\varphi(x, \nabla p)) = f.$$

- $\varphi(x, \cdot)$ peut être linéaire pour certains matériaux.
- $\varphi(x, \cdot)$ peut être non linéaire pour d'autres.
- Certains matériaux sont très perméables, d'autres très imperméables.
- Fortes anisotropies dues à des directions privilégiées dans la structure des pores.

Conditions de transmission

- La pression est continue aux interfaces.
- Le flux de masse $\varphi(x, \nabla p) \cdot \boldsymbol{\nu}$ est continu aux interfaces.

Ecoulements multiphasiques en milieu poreux

- Couplage non-linéaire d'une équation de Darcy avec un problème hyperbolique.
- En pratique on résout successivement via un schéma en temps :
  1) Un problème de Darcy dont la perméabilité est une fonction de la saturation.
  $$-\mathrm{div}\,(K(u)\nabla p) = f,$$
  2) Un problème hyperbolique non linéaire qui fait intervenir la vitesse de Darcy $v = -K(u)\nabla p$ calculée précédemment.
  $$\partial_t(\theta u) + \mathrm{div}\,(f(u)v) = 0.$$
- La première étape relève du problème étudié ici.
- On a besoin d'une bonne approximation des flux $(v \cdot \boldsymbol{\nu})$ dans la seconde étape.

Autres modèles en milieu poreux

Ecoulements multiphasiques en milieu poreux

- Couplage non-linéaire d'une équation de Darcy avec un problème hyperbolique.
- En pratique on résout successivement via un schéma en temps :
  1) Un problème de Darcy dont la perméabilité est une fonction de la saturation.
  $$-\mathrm{div}\,(K(u)\nabla p) = f,$$
  2) Un problème hyperbolique non linéaire qui fait intervenir la vitesse de Darcy $v = -K(u)\nabla p$ calculée précédemment.
  $$\partial_t(\theta u) + \mathrm{div}\,(f(u)v) = 0.$$
- La première étape relève du problème étudié ici.
- On a besoin d'une bonne approximation des flux $(v \cdot \boldsymbol{\nu})$ dans la seconde étape.

Convection-Diffusion d'un polluant

$$\partial_t(\theta c) + \mathrm{div}\,(cv) - \mathrm{div}\,(D(c,v)\nabla c) = 0,$$

où $D(c,v)$ est un tenseur de diffusion/dispersion et v la vitesse de Darcy.

1. Introduction
   - Ecoulements complexes en milieux poreux
   - Autres modèles
   - Cahier des charges

2. Schéma Volumes Finis 1D
   - Notations. Construction
   - Analyse du schéma. Approche DF
   - Analyse du schéma. Approche VF
   - Implémentation en Scilab
   - Extensions

Elasticité

$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = f, \\ \qquad \sigma = 2\mu(x)D(u) + \lambda(x)(\operatorname{div} u)\mathrm{Id} \end{cases}$$

Modèle en électrocardiologie

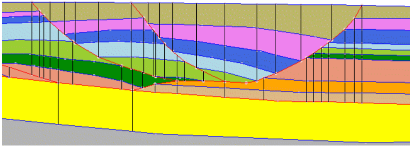
(Coudière–Pierre–Turpault ’09)

$$\begin{cases} u = u_i - u_e, \\ C(\partial_t u + f(u)) = -\operatorname{div}(G_e \nabla u_e), \quad \text{dans le coeur,} \\ \operatorname{div}((G_i + G_e)\nabla u_e) = -\operatorname{div}(G_i \nabla u), \quad \text{dans le coeur,} \\ \operatorname{div}(G_T \nabla u_T) = 0, \quad \text{dans le thorax,} \\ (G_i \nabla u_e)\cdot \boldsymbol{\nu} = -(G_i \nabla u)\cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \text{à l'interface coeur/thorax,} \\ (G_e \nabla u_e)\cdot \boldsymbol{\nu} = -(G_T \nabla u_T)\cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \text{à l'interface coeur/thorax.} \end{cases}$$

Maxwell, Stokes, ...

Plan

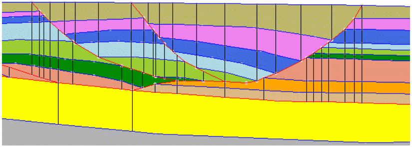
1. Introduction
   - Ecoulements complexes en milieux poreux
   - Autres modèles
   - Cahier des charges
2. Schéma Volumes Finis 1D
   - Notations. Construction
   - Analyse du schéma. Approche DF
   - Analyse du schéma. Approche VF
   - Implémentation en Scilab
   - Extensions



Propriétés attendues des schémas

- Conservation locale de la masse et consistance des flux.
- Préservation des propriétés qualitatives des EDP (existence, unicité, monotonie, etc ...).
- Préservation des bornes physiques de la solution.
- Bonne précision, même sur des maillages grossiers et avec de fortes anisotropies et hétérogénéités.
- Implémentation “facile” et coût de calcul “raisonnable”.

Géométrie du domaine. Maillages



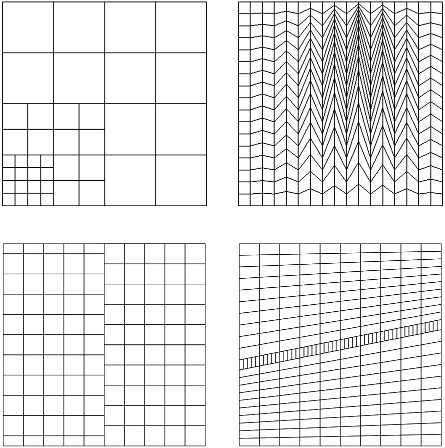
Propriétés attendues des schémas

- Conservation locale de la masse et consistance des flux.
- Préservation des propriétés qualitatives des EDP (existence, unicité, monotonie, etc ...).
- Préservation des bornes physiques de la solution.
- Bonne précision, même sur des maillages grossiers et avec de fortes anisotropies et hétérogénéités.
- Implémentation “facile” et coût de calcul “raisonnable”.

Contraintes faibles sur les maillages

- Maillages non conformes : grilles adaptées (ou pas !) à la géométrie du problème.
- Raffinement local.
- Cellules très déformées.
- Résultats honorables sur des maillages grossiers.

Exemples académiques de maillages



Plan

1. Introduction
   - Ecoulements complexes en milieux poreux
   - Autres modèles
   - Cahier des charges

2. Schéma Volumes Finis 1D
   - Notations. Construction
   - Analyse du schéma. Approche DF
   - Analyse du schéma. Approche VF
   - Implémentation en Scilab
   - Extensions

Notations

Le problème continu

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

- f est une fonction intégrable (disons continue ...).
- k une fonction bornée, $\inf k > 0$.
- Dans un premier temps, on considérera k régulière.

Notations

Le problème continu

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

- f est une fonction intégrable (disons continue ...).
- k une fonction bornée, $\inf k > 0$.
- Dans un premier temps, on considérera k régulière.

Un maillage volumes finis $\mathcal{T}$ de $]0,1[$

- **Volumes de contrôle :** Des intervalles ouverts $(\mathcal{K}_i)_{1\leq i\leq N}$ qui recouvrent $]0,1[$

$$\mathcal{K}_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[,$$

$$0=x_{1/2}<x_{3/2}<\ldots<x_{i-1/2}<x_{i+1/2}<\ldots<x_{N-1/2}<x_{N+1/2}=1.$$

- **Centres :** Une famille de points $x_i \in \mathcal{K}_i$, $i = 1, ..., N$.
- **Bord :** Par commodité on pose aussi $x_0 = 0$ et $x_{N+1} = 1$.
- On note $h_i = |\mathcal{K}_i| = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$ la mesure de $\mathcal{K}_i$.
- On note $h_{i+1/2} = x_{i+1} - x_i$ la distance entre les centres de deux voisins.

Philosophie VF cells-centered

Un schéma VF cells-centered :

- met en jeu une seule inconnue u_i par volume de contrôle, *censée* approchée la valeur de la solution au centre x_i.
- consiste à écrire un bilan de flux sur chaque volume de contrôle.

Calcul pour une solution régulière

$$\int_{\mathcal{K}_i} \partial_x(-k\partial_x u)\,dx = \int_{\mathcal{K}_i} f(x)\,dx, \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Philosophie VF cells-centered

Un schéma VF cells-centered :

- met en jeu une seule inconnue u_i par volume de contrôle, *censée* approchée la valeur de la solution au centre x_i.
- consiste à écrire un bilan de flux sur chaque volume de contrôle.

Calcul pour une solution régulière

$$\Big[-(k\partial_x u)(x_{i+1/2})\Big] - \Big[-(k\partial_x u)(x_{i-1/2})\Big] = \int_{\mathcal{K}_i} f(x)\,dx, \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Philosophie VF cells-centered

Un schéma VF cells-centered :

- met en jeu une seule inconnue u_i par volume de contrôle, *censée* approchée la valeur de la solution au centre x_i.
- consiste à écrire un bilan de flux sur chaque volume de contrôle.

Calcul pour une solution régulière

$$\Big[-(k\partial_x u)(x_{i+1/2})\Big] - \Big[-(k\partial_x u)(x_{i-1/2})\Big] = \int_{\mathcal{K}_i} f(x)\,dx, \quad \forall i = 1, ..., N.$$

Approximation du flux

$$-(k\partial_x u)(x_{i+1/2}) \boxed{\approx} - k(x_{i+1/2})\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}.$$

PHILOSOPHIE VF CELLS-CENTERED

Un schéma VF cells-centered :

- met en jeu une seule inconnue u_i par volume de contrôle, *censée* approchée la valeur de la solution au centre x_i.
- consiste à écrire un bilan de flux sur chaque volume de contrôle.

CALCUL POUR UNE SOLUTION RÉGULIÈRE

$$\left[-k(x_{i+1/2})\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h_{i+1/2}}\right] - \left[-k(x_{i-1/2})\frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h_{i-1/2}}\right]$$

$$\boxed{\approx} \int_{\mathcal{K}_i} f(x)\,dx = h_i f_i,$$

où f_i est la moyenne de f sur $\mathcal{K}_i$.

Le schéma VF - version 1

On cherche $u^{\mathcal{T}} = (u_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ vérifiant

$$-k_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}} + k_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_{i-1/2}} = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1,\ldots,N\},$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$ (**CL de Dirichlet homogène**).

Le schéma VF - version 1

On cherche $u^{\mathcal{T}} = (u_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ vérifiant

$$-k_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}} + k_{i-1/2}\frac{u_i-u_{i-1}}{h_{i-1/2}} = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1,\dots,N\},$$

avec $u_0 = u_{N+1} = 0$ (**CL de Dirichlet homogène**).

Le schéma VF - version 2

On cherche $u^{\mathcal{T}} = (u_i)_{1\leq i\leq N} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ vérifiant

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1,\dots,N\},$$

avec

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) = -k_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}}, \quad i = 1,\dots,N-1,$$

$$F_{1/2}(u^{\mathcal{T}}) = -k_{1/2}\frac{u_1}{h_{1/2}}, \quad F_{N+1/2}(u^{\mathcal{T}}) = k_{N+1/2}\frac{u_N}{h_{N+1/2}}.$$

Plan

Le schéma se met sous la forme matricielle $Au^{\mathcal{T}} = B$ avec

$$u^{\mathcal{T}} = (u_i)_{1\leq i\leq N}, \quad B = (h_i f_i)_{1\leq i\leq N},$$

et A **tridiagonale** donnée par

$$a_{i,i} = \frac{k_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{k_{i-1/2}}{h_{i-1/2}}, \quad a_{i,i+1} = -\frac{k_{i+1/2}}{h_{i+1/2}}, \quad a_{i,i-1} = -\frac{k_{i-1/2}}{h_{i-1/2}}.$$

Le schéma se met sous la forme matricielle $Au^{\mathcal{T}} = B$ avec

$$u^{\mathcal{T}} = (u_i)_{1\leq i\leq N}, \quad B = (h_i f_i)_{1\leq i\leq N},$$

et A **tridiagonale** donnée par

$$a_{i,i} = \frac{k_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{k_{i-1/2}}{h_{i-1/2}}, \quad a_{i,i+1} = -\frac{k_{i+1/2}}{h_{i+1/2}}, \quad a_{i,i-1} = -\frac{k_{i-1/2}}{h_{i-1/2}}.$$

- A est toujours **symétrique définie positive** :

$$\begin{aligned}
(Au^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}) &= \sum_{i=1}^{N} (F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}))v_i \\
&= -F_{1/2}(u^{\mathcal{T}})v_1 + F_{N+1/2}(u^{\mathcal{T}})v_N + \sum_{i=1}^{N-1} F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}})(v_i - v_{i+1}) \\
&= -\sum_{i=0}^{N} F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}})(v_{i+1} - v_i) = \sum_{i=0}^{N} k_{i+1/2}\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}(v_{i+1} - v_i) \\
&= \sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2}k_{i+1/2}\left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}\right)\left(\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1/2}}\right)
\end{aligned}$$

Le schéma se met sous la forme matricielle $Au^{\mathcal{T}} = B$ avec

$$u^{\mathcal{T}} = (u_i)_{1\leq i\leq N}, \quad B = (h_i f_i)_{1\leq i\leq N},$$

et A **tridiagonale** donnée par

$$a_{i,i} = \frac{k_{i+1/2}}{h_{i+1/2}} + \frac{k_{i-1/2}}{h_{i-1/2}}, \quad a_{i,i+1} = -\frac{k_{i+1/2}}{h_{i+1/2}}, \quad a_{i,i-1} = -\frac{k_{i-1/2}}{h_{i-1/2}}.$$

Formulation "variationnelle" du schéma VF

Trouver $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que

$$\forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \; \underbrace{\sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} k_{i+1/2} \left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}}\right)\left(\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1/2}}\right)}_{\substack{\text{somme sur les interfaces} \\ \approx\int_0^1 k\partial_x u \partial_x v dx}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} h_i f_i v_i}_{\substack{\text{somme sur les volumes} \\ \approx\int_0^1 f v dx}}.$$

- La mise en oeuvre des schémas VF se fait **par interfaces/arêtes**.
- La forme variationnelle est très utile dans l'analyse.

Soit $u^{\mathcal{T}}$ solution de

$$Au^{\mathcal{T}} = (h_i f_i)_{1\leq i\leq N}.$$

Théorème (Principe du maximum discret)

$$\Big(f_i \geq 0, \forall i\Big) \Longrightarrow \Big(u_i \geq 0, \forall i\Big).$$

Preuve du principe du maximum 1D

Soit $u^{\mathcal{T}}$ solution de

$$Au^{\mathcal{T}} = (h_i f_i)_{1\leq i\leq N}.$$

Théorème (Principe du maximum discret)

$$\Big(f_i \geq 0, \forall i\Big) \Longrightarrow \Big(u_i \geq 0, \forall i\Big).$$

▸ Preuve du principe du maximum 1D

Théorème (Stabilité L^∞)

Il existe $C > 0$ ne dépendant que de k telle que

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_\infty \leq C\|f\|_\infty.$$

▸ Preuve de la stabilité L^∞ 1D

Lemme (Inégalité de Poincaré discrète)

Pour tout $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on a

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{N} h_i |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u^{\mathcal{T}}\|_\infty \leq \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} \left|\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{norme } H^1 \text{ discrète}}.$$

Preuve : Somme télescopique + Cauchy-Schwarz

Lemme (Inégalité de Poincaré discrète)

Pour tout $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on a

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{N} h_i |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|u^{\mathcal{T}}\|_\infty \leq \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} \left|\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{\textit{norme } H^1 \textit{ discrète}}.$$

Preuve : Somme télescopique + Cauchy-Schwarz

Théorème (Stabilité L^2)

Si $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^N$ est solution de $Au^{\mathcal{T}} = (h_i f_i)_{1\leq i\leq N}$, on a l'estimation

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \frac{\|f\|_2}{\inf k}.$$

En réalité, on a beaucoup mieux : une borne H^1 discrète.

On se place dans le cas $k \equiv 1$, i.e. $-\partial_x^2 u = f$.
On considère un maillage uniforme et on prend $x_i = \frac{x_{i-1/2}+x_{i+1/2}}{2}$.

- A l'intérieur du domaine :

$$VF \Leftrightarrow DF \Leftrightarrow \frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f_i,$$

  les schémas sont identiques (modulo le second membre).

On se place dans le cas $k \equiv 1$, i.e. $-\partial_x^2 u = f$.
On considère un maillage uniforme et on prend $x_i = \frac{x_{i-1/2}+x_{i+1/2}}{2}$.

- A l'intérieur du domaine :

$$VF \Leftrightarrow DF \Leftrightarrow \frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = f_i,$$

  les schémas sont identiques (modulo le second membre).

- Sur le bord :

$$VF \Leftrightarrow \frac{u_2 - u_1}{h} - \frac{u_1 - 0}{h/2} = h f_1.$$

$$DF \Leftrightarrow \frac{\frac{u_2-u_1}{h} - \frac{u_1-0}{h/2}}{3h/4} = f_1.$$

  Les deux schémas ne sont pas identiques !

Le schéma VF s'écrit (à l'intérieur du domaine)

$$-\frac{\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}} - \frac{u_i-u_{i-1}}{h_{i-1/2}}}{h_i} = f_i.$$

Le schéma est-il consistant au sens usuel ?

Le schéma VF s'écrit (à l'intérieur du domaine)

$$-\frac{\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}} - \frac{u_i-u_{i-1}}{h_{i-1/2}}}{h_i} = f_i.$$

LE SCHÉMA EST-IL CONSISTANT AU SENS USUEL ? Soit $u \in \mathcal{C}^2$

$$\partial_x^2 u(x_i) - \frac{\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h_{i+1/2}} - \frac{u(x_i)-u(x_{i-1})}{h_{i-1/2}}}{h_i}$$
$$= \underbrace{\left(1 - \frac{h_{i-1/2}+h_{i+1/2}}{2h_i}\right)}_{=r_i} \partial_x^2 u(x_i) + O(h)$$

Exemple : $h_{2i} = h$, $h_{2i+1} = h/2$, $x_i = (x_{i+1/2} + x_{i-1/2})/2$, il vient

$$\boxed{r_{2i} = 1/4, \quad r_{2i+1} = -1/2.}$$

Le schéma VF n'est pas consistant au sens des DF

... et pourtant le schéma est L^∞ stable ...

... et il converge !

Le schéma VF s'écrit (à l'intérieur du domaine)

$$-\frac{\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}} - \frac{u_i-u_{i-1}}{h_{i-1/2}}}{h_i} = f_i.$$

Une nouvelle propriété de consistance

Soit $u \in \mathcal{C}^3$. On pose

$$\bar{u}_i = u(x_i) + \frac{h_i^2}{8}\partial_x^2 u(x_i) = u(x_i) + O(h^2).$$

$$\partial_x^2 u(x_i) - \frac{\frac{\bar{u}_{i+1}-\bar{u}_i}{h_{i+1/2}} - \frac{\bar{u}_i-\bar{u}_{i-1}}{h_{i-1/2}}}{h_i} = O(h)!!$$

$\Rightarrow$ Ceci démontre (de façon pas très naturelle) la convergence à l'ordre 1 du schéma en norme infinie.

$$\boxed{\sup_i |u(x_i) - u_i| \leq \sup_i |u(x_i) - \bar{u}_i| + \sup_i |\bar{u}_i - u_i| \leq Ch.}$$

Plan

1. Introduction
   - Ecoulements complexes en milieux poreux
   - Autres modèles
   - Cahier des charges

2. Schéma Volumes Finis 1D
   - Notations. Construction
   - Analyse du schéma. Approche DF
   - Analyse du schéma. Approche VF
   - Implémentation en Scilab
   - Extensions

- La notion de **flux** est centrale en Volumes finis et elle a disparu de l'analyse précédente.
- La notion de consistance au sens des DF n'est pas adaptée pour les VF.
- La preuve de convergence précédente n'est pas naturelle (et ne se généralise pas bien !).

$\rightsquigarrow$ Nécessité de développer d'autres techniques de preuves.

Consistance des flux

Rappel du schéma :

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) = -k_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \quad 0 = 1, \dots, N.$$

Consistance des flux

Rappel du schéma :

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\},$$

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) = -k_{i+1/2}\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \quad 0 = 1, \ldots, N.$$

La solution exacte vérifie :

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) - \overline{F}_{i-1/2}(u) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, N\},$$

avec le **flux exact** défini par

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) = -k_{i+1/2}(\partial_x u)(x_{i+1/2}).$$

Rappel du schéma :

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) = -k_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}}, \quad 0 = 1, \dots, N.$$

La solution exacte vérifie :

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) - \overline{F}_{i-1/2}(u) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\},$$

avec le **flux exact** défini par

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) = -k_{i+1/2} (\partial_x u)(x_{i+1/2}).$$

Projection de la solution exacte sur $\mathcal{T}$:

$$\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u = (u(x_i))_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

L'erreur de consistance sur les flux

$$R_{i+1/2}(u) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\left(-k_{i+1/2} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}} \right)}_{= F_{i+1/2}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u)} - \underbrace{\left(- k_{i+1/2} (\partial_x u)(x_{i+1/2}) \right)}_{= \overline{F}_{i+1/2}(u)}.$$

Estimation d'erreur VF

On définit l'erreur $e^{\mathcal{T}} = u^{\mathcal{T}} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u$.

Rappel

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{1}$$

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) - \overline{F}_{i-1/2}(u) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{2}$$

$$R_{i+1/2}(u) = F_{i+1/2}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{i+1/2}(u), \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}. \tag{3}$$

Estimation d'erreur VF

On définit l'erreur $e^{\mathcal{T}} = u^{\mathcal{T}} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u$.

Rappel

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{1}$$

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) - \overline{F}_{i-1/2}(u) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{2}$$

$$R_{i+1/2}(u) = F_{i+1/2}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{i+1/2}(u), \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}. \tag{3}$$

Le calcul VF

- On soustrait (1) et (2), en utilisant (3)

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) = -R_{i+1/2}(u) + R_{i-1/2}(u).$$

On définit l'erreur $e^{\mathcal{T}} = u^{\mathcal{T}} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u$.

Rappel

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{1}$$

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) - \overline{F}_{i-1/2}(u) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{2}$$

$$R_{i+1/2}(u) = F_{i+1/2}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{i+1/2}(u), \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}. \tag{3}$$

Le calcul VF

- On soustrait (1) et (2), en utilisant (3)

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) = -R_{i+1/2}(u) + R_{i-1/2}(u).$$

- On multiplie les équations par e_i et on somme

$$\sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} k_{i+1/2} \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} \right)^2 = -\sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} R_{i+1/2}(u) \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} \right).$$

On définit l'erreur $e^{\mathcal{T}} = u^{\mathcal{T}} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u$.

Rappel

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{1}$$

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) - \overline{F}_{i-1/2}(u) = h_i f_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \tag{2}$$

$$R_{i+1/2}(u) = F_{i+1/2}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{i+1/2}(u), \quad \forall i \in \{0, \dots, N\}. \tag{3}$$

Le calcul VF

- On soustrait (1) et (2), en utilisant (3)

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}} - \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) = -R_{i+1/2}(u) + R_{i-1/2}(u).$$

- On multiplie les équations par e_i et on somme

$$\sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} k_{i+1/2} \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} \right)^2 = - \sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} R_{i+1/2}(u) \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} \right).$$

- On utilise Cauchy-Schwarz

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_\infty \le \left(\sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} \left(\frac{e_{i+1} - e_i}{h_{i+1/2}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{C} \left(\sum_{i=0}^{N} h_{i+1/2} |R_{i+1/2}(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il reste à estimer les $R_{i+1/2}(u)$

Si la solution u est $\mathcal{C}^2$, la formule de Taylor donne

$$\begin{aligned}\left|R_{i+1/2}(u)\right| &= \left|\left(-k_{i+1/2}\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h_{i+1/2}}\right) - \left(-k_{i+1/2}(\partial_x u)(x_{i+1/2})\right)\right|.\\ &\leq \|k\|_\infty \|\partial_x^2 u\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}).\end{aligned}$$

Il vient

$$\boxed{\sup_i |u_i - u(x_i)| = \|e^{\mathcal{T}}\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|\partial_x^2 u\|_\infty h}$$

Il reste à estimer les $R_{i+1/2}(u)$

Si la solution u est $\mathcal{C}^2$, la formule de Taylor donne

$$\begin{aligned}\left|R_{i+1/2}(u)\right| &= \left|\left(-k_{i+1/2}\frac{u(x_{i+1})-u(x_i)}{h_{i+1/2}}\right) - \left(-k_{i+1/2}(\partial_x u)(x_{i+1/2})\right)\right|.\\ &\leq \|k\|_\infty \|\partial_x^2 u\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}).\end{aligned}$$

Il vient

$$\boxed{\sup_i |u_i - u(x_i)| = \|e^{\mathcal{T}}\|_\infty \leq \|k\|_\infty \|\partial_x^2 u\|_\infty h}$$

Remarques :

- Si on a $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$, alors le schéma est d'ordre 2 (sauf au bord !).
  En général, **cela n'est pas vrai**, on a plutôt
  $$x_i = \frac{x_{i-1/2} + x_{i+1/2}}{2}.$$
- Si d'aventure, il exite **UNE** interface telle que $R_{i_0+1}(u) = O(1)$, alors le schéma est seulement d'ordre $1/2$.

Plan

Code en Scilab à vocation pédagogique **(B. - Krell)** :

`http://www.cmi.univ-mrs.fr/~fboyer/publications/VF_scilab.tar.gz`

On se place dans le sous-répertoire : `1D`

- 3 librairies de fonctions :
  - `donnees1D.sci`

    Différents jeux de données
  - `maillages1D.sci`

    Création de maillages, calculs de normes discrètes
  - `schemas1D.sci`

    Fonctions d'assemblage des schémas
- 2 programmes principaux :
  - `VF1D.sce`

    Calcul et tracé des solutions approchées/exactes
  - `courbes_erreur1D.sce`

    Tracé de courbes d'erreurs

Jeux de données

- Un jeu de données `donnees` est une **structure** qui contient
  - `donnees.nom` : le nom du cas test.
  - `donnees.source` : le terme source (une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
  - `donnees.bordD` : les données au bord (une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
  - `donnees.uexacte` : la solution exacte (une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
  - `donnees.coeff_k` : le coeff de diffusion (une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
- Certains contiennent d'autres informations...

Jeux de données

- Un jeu de données `donnees` est une **structure** qui contient
  - `donnees.nom` : le nom du cas test.
  - `donnees.source` : le terme source (une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
  - `donnees.bordD` : les données au bord (une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
  - `donnees.uexacte` : la solution exacte (une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
  - `donnees.coeff_k` : le coeff de diffusion (une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).
- Certains contiennent d'autres informations...
- Liste de jeux de données : `cas_test=list(...,...,...)`
  Pour tout entier `i` convenable `cas_test(i)` est un jeu de données.
- Pour rajouter un jeu de données :

```
cas_test($+1)=struct("nom",xxxx,...
                     "uexacte",xxxx,...
                     "bordD",xxxx,...
                     "source",xxxx,...
                     "coeff_k",xxxx);
```

Maillages :

- Forme générique des fonctions de création

```
function [maillage] = maillage_xxxx(N);
```

Avec : `xxxx` $\in$ {`uniforme` , `alterne` , `aleatoire` , `stretch`}

Maillages :

- Forme générique des fonctions de création

```
function [maillage] = maillage_xxxx(N);
```

Avec : `xxxx` $\in$ {`uniforme` , `alterne` , `aleatoire` , `stretch`}

- Chacune renvoie une structure `maillage` contenant
  - `maillage.nom` : le nom du maillage.
  - `maillage.nb_vol` : le nombre de volumes de contrôle.
  - `maillage.centres` : coordonnées des centres

$$\texttt{maillage.centres(i)} = x_i, \quad 1 \leq i \leq \texttt{maillage.nb\_vol}$$

  - `maillage.sommets` : coordonnées des sommets

$$\texttt{maillage.sommets(i)} = x_{i-1/2}, \quad 1 \leq i \leq \texttt{maillage.nb\_vol+1}$$

  - `maillage.mes` : mesures des volumes de contrôles

$$\texttt{maillage.mes(i)} = h_i, \quad 1 \leq i \leq \texttt{maillage.nb\_vol}$$

  - `maillage.dist` : distances entre centres voisins

$$\texttt{maillage.dist(i)} = h_{i-1/2}, \quad 1 \leq i \leq \texttt{maillage.nb\_vol+1}$$

Exemples d'utilisation

On suppose `donnees` et `maillage` connus

- Evaluation du terme source au centre des mailles

```
source_centres=feval(maillage.centres,donnees.source);
```

Exemples d'utilisation

On suppose `donnees` et `maillage` connus

- Evaluation du terme source au centre des mailles
```
source_centres=feval(maillage.centres,donnees.source);
```
- Evaluation du coefficient de diffusion aux interfaces
```
ck=feval(maillage.sommets,donnees.coeff_k);
```

Exemples d'utilisation

On suppose `donnees` et `maillage` connus

- Evaluation du terme source au centre des mailles

```
source_centres=feval(maillage.centres,donnees.source);
```

- Evaluation du coefficient de diffusion aux interfaces

```
ck=feval(maillage.sommets,donnees.coeff_k);
```

- Evaluation de la solution exacte au centre des mailles, si elle est fournie

```
if (isfield(donnees,'uexacte')) then
   solexacte=feval(maillage.centres,donnees.uexacte);
end;
```

Fonctions d'assemblage des schémas

- Syntaxe générale : `[A,b]=vf_xxxx(m,donnees)`
  - Entrée : `m` est un maillage et `donnees` un jeu de données.
  - Sortie : `A` est la matrice du système et `b` le second membre.
- Sont codées pour l'instant :
  - `xxxx=laplacien_dirh` :

$$-u'' = f, \text{ avec } u(0) = u(1) = 0.$$

  - `xxxx=laplacien_dirnh` :

$$-u'' = f, \text{ avec } \begin{cases} u(0) = \texttt{bordD(0)} \\ u(1) = \texttt{bordD(1)} \end{cases}$$

  - `xxxx=diffusion_dirnh` :

$$-\partial_x(k(x)\partial_x u) = f, \text{ avec } \begin{cases} u(0) = \texttt{bordD(0)} \\ u(1) = \texttt{bordD(1)} \end{cases}$$

  - `xxxx=diffusion_neunh` :

$$-\partial_x(k(x)\partial_x u) = f, \text{ avec } \begin{cases} -k(0)u'(0) = \texttt{bordN(0)} \\ k(1)u'(1) = \texttt{bordN(1)} \end{cases}$$

Structure du programme `VF1D.sce`

- Chargement des libraires de fonctions.
- Interrogation utilisateur :
    - Choix du cas test
    - Choix du problème à résoudre et de variantes du schémas.
    - Choix du maillage
    - Choix du nombre de volumes de contrôle
- Assemblage du schéma
- Résolution du système linéaire (par UMFPACK si `Scilab>=5.2`)
- Tracé de la solution approchée (et exacte si disponible) et évaluation de l'erreur.

Structure du programme `courbes_erreur1D.sce`

- Chargement des libraires de fonctions.
- Interrogation utilisateur :
  - Choix du cas test
  - Choix du problème à résoudre et de variantes du schémas.
  - Choix du maillage
  - Choix du nombre de volumes de contrôle du maillage grossier.
  - Choix de l'incrément du nombre de volumes de contrôle d'un maillage à l'autre.
  - Choix du nombre de volumes de contrôle maximal souhaité.
- Pour chaque taille de maillage :
  - Assemblage du schéma
  - Résolution du système linéaire (par UMFPACK si `Scilab>=5.2`)
  - Evaluation et stockage de l'erreur dans différentes normes.
- Tracé des courbes d'erreur en fonction du pas du maillage en échelle logarithmique.

Résolution du Laplacien Dirichlet homogène

Extrait de la fonction `[A,b]=vf_laplacien_dirh(m,donnees)`

Implémentation "différences finies"

```
for i=2:m.nb_vol-1
  A(i,i)   =   1/m.dist(i) + 1/m.dist(i+1);
  A(i,i-1) = - 1/m.dist(i);
  A(i,i+1) = - 1/m.dist(i+1);
end

A(1,1) =   1/m.dist(1) + 1/m.dist(2);
A(1,2) = - 1/m.dist(2);
A(m.nb_vol,m.nb_vol) = 1/m.dist(m.nb_vol+1) ...
                     + 1/m.dist(m.nb_vol);
A(m.nb_vol,m.nb_vol-1)= - 1/m.dist(m.nb_vol);

b=feval(m.centres,donnees.source).*m.mes;
```

$\Rightarrow$ Assemblage direct de la matrice.

Résolution du Laplacien Dirichlet homogène

Extrait de la fonction `[A,b]=vf_laplacien_dirh(m,donnees)`

Implémentation "volumes finis"

```
for i=2:m.nb_vol
  tau = 1/m.dist(i);

  A(i-1,i-1) = A(i-1,i-1) + tau;
  A(i,i)     = A(i,i)     + tau;
  A(i-1,i)   = A(i-1,i)   - tau;
  A(i,i-1)   = A(i,i-1)   - tau;
end

A(1,1) = A(1,1) + 1/m.dist(1);
A(m.nb_vol,m.nb_vol) =  A(m.nb_vol,m.nb_vol)
                      + 1/m.dist(1+m.nb_vol);

b=feval(m.centres,donnees.source).*m.mes;
```

$\Rightarrow$ Assemblage par parcours des interfaces/arêtes.

Remarque : le second membre peut aussi être construit par arêtes !

Résolution du pb de diffusion avec donnée au bord

Extrait de la fonction `[A,b]=vf_diffusion_dirnh(m,donnees)`

Implémentation "volumes finis"

```
ck=calcul_coeff_k_interf(m,donnees);

for i=2:m.nb_vol
  tau = ck(i)/m.dist(i);

  A(i-1,i-1) = A(i-1,i-1) + tau;
  A(i,i)     = A(i,i)     + tau;
  A(i-1,i)   = A(i-1,i)   - tau;
  A(i,i-1)   = A(i,i-1)   - tau;
end

A(1,1) = A(1,1) + ck(1)/m.dist(1);
A(m.nb_vol,m.nb_vol) = A(m.nb_vol,m.nb_vol) + ck(1)/m.dist(1+m.nb_vol);

b=feval(m.centres,donnees.source).*m.mes;
b(1) = b(1) + ck(1)/m.dist(1)*dir_g;
b(m.nb_vol) = b(m.nb_vol) + ck(m.nb_vol+1)/m.dist(m.nb_vol+1)*dir_d;
```

Plan

On ne suppose plus la fonction k régulière.
Hypothèse : k constante sur chaque volume de contrôle.

Coefficients discontinus

On ne suppose plus la fonction k régulière.

Hypothèse : k constante sur chaque volume de contrôle.

Les problèmes à résoudre

- Le coefficient $k_{i+1/2} = k(x_{i+1/2})$ n'est pas bien défini.
- La solution u ne peut pas être $\mathcal{C}^2$! Si f est $\mathcal{C}^0$, on a seulement
$$k(\partial_x u) \in \mathcal{C}^1.$$
- C'est donc le flux total qui est bien défini en tout point
$$\text{Flux total exact : } \quad \overline{F}_{i+1/2}(u) = -\Big(k(\partial_x u)\Big)(x_{i+1/2}).$$

On ne suppose plus la fonction k régulière.
Hypothèse : k constante sur chaque volume de contrôle.

Les problèmes à résoudre

- Le coefficient $k_{i+1/2} = k(x_{i+1/2})$ n'est pas bien défini.
- La solution u ne peut pas être $\mathcal{C}^2$! Si f est $\mathcal{C}^0$, on a seulement
$$k(\partial_x u) \in \mathcal{C}^1.$$
- C'est donc le flux total qui est bien défini en tout point
$$\text{Flux total exact :} \quad \overline{F}_{i+1/2}(u) = -\Big(k(\partial_x u)\Big)(x_{i+1/2}).$$

Définition du flux numérique

On va toujours l'écrire sous la forme suivante
$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) = -k_{i+1/2}\frac{u_{i+1}-u_i}{h_{i+1/2}},$$
mais comment choisir $k_{i+1/2}$?

$$k_{i+1/2} = k_i? \quad k_{i+1/2} = k_{i+1}? \quad k_{i+1/2} = (k_i + k_{i+1})/2?$$

Dans le volume de contrôle κ_i

- k est constante $= k_i$ donc $u \in \mathcal{C}^2$ dans κ_i.

$$\Rightarrow \quad (k\partial_x u)(x_{i+1/2}^-) \approx k_i \frac{u(x_{i+1/2}) - u(x_i)}{x_{i+1/2} - x_i}.$$

Dans le volume de contrôle κ_{i+1}

- k est constante $= k_{i+1}$ donc $u \in \mathcal{C}^2$ dans κ_{i+1}.

$$\Rightarrow \quad (k\partial_x u)(x_{i+1/2}^+) \approx k_{i+1} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i+1/2})}{x_{i+1} - x_{i+1/2}}.$$

Dans le volume de contrôle κ_i

- k est constante $= k_i$ donc $u \in \mathcal{C}^2$ dans κ_i.

$$\Rightarrow \quad (k\partial_x u)(x^-_{i+1/2}) \approx k_i \frac{u(x_{i+1/2}) - u(x_i)}{x_{i+1/2} - x_i}.$$

Dans le volume de contrôle κ_{i+1}

- k est constante $= k_{i+1}$ donc $u \in \mathcal{C}^2$ dans κ_{i+1}.

$$\Rightarrow \quad (k\partial_x u)(x^+_{i+1/2}) \approx k_{i+1} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i+1/2})}{x_{i+1} - x_{i+1/2}}.$$

On écrit la continuité du flux total

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) = -(k\partial_x u)(x^+_{i+1/2}) = -(k\partial_x u)(x^-_{i+1/2}).$$

Dans le volume de contrôle κ_i

- k est constante $= k_i$ donc $u \in \mathcal{C}^2$ dans κ_i.

$$\Rightarrow \quad (k\partial_x u)(x^-_{i+1/2}) \approx k_i \frac{u(x_{i+1/2}) - u(x_i)}{x_{i+1/2} - x_i}.$$

Dans le volume de contrôle κ_{i+1}

- k est constante $= k_{i+1}$ donc $u \in \mathcal{C}^2$ dans κ_{i+1}.

$$\Rightarrow \quad (k\partial_x u)(x^+_{i+1/2}) \approx k_{i+1} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i+1/2})}{x_{i+1} - x_{i+1/2}}.$$

On écrit la continuité du flux total

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) = -(k\partial_x u)(x^+_{i+1/2}) = -(k\partial_x u)(x^-_{i+1/2}).$$

On essaie d'éliminer la valeur à l'interface

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) = -\frac{\frac{x_{i+1}-x_{i+1/2}}{k_{i+1}}(k\partial_x u)(x^+_{i+1/2}) + \frac{x_{i+1/2}-x_i}{k_i}(k\partial_x u)(x^-_{i+1/2})}{\frac{x_{i+1}-x_{i+1/2}}{k_{i+1}} + \frac{x_{i+1/2}-x_i}{k_i}}$$

Dans le volume de contrôle κ_i

- k est constante $= k_i$ donc $u \in \mathcal{C}^2$ dans κ_i.

$$\Rightarrow \quad (k\partial_x u)(x^-_{i+1/2}) \approx k_i \frac{u(x_{i+1/2}) - u(x_i)}{x_{i+1/2} - x_i}.$$

Dans le volume de contrôle κ_{i+1}

- k est constante $= k_{i+1}$ donc $u \in \mathcal{C}^2$ dans κ_{i+1}.

$$\Rightarrow \quad (k\partial_x u)(x^+_{i+1/2}) \approx k_{i+1} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i+1/2})}{x_{i+1} - x_{i+1/2}}.$$

On écrit la continuité du flux total

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) = -(k\partial_x u)(x^+_{i+1/2}) = -(k\partial_x u)(x^-_{i+1/2}).$$

On essaie d'éliminer la valeur à l'interface

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) \approx -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{\frac{x_{i+1} - x_{i+1/2}}{k_{i+1}} + \frac{x_{i+1/2} - x_i}{k_i}}$$

Dans le volume de contrôle κ_i

- k est constante $= k_i$ donc $u \in \mathcal{C}^2$ dans κ_i.

$$\Rightarrow \quad (k\partial_x u)(x_{i+1/2}^-) \approx k_i \frac{u(x_{i+1/2}) - u(x_i)}{x_{i+1/2} - x_i}.$$

Dans le volume de contrôle κ_{i+1}

- k est constante $= k_{i+1}$ donc $u \in \mathcal{C}^2$ dans κ_{i+1}.

$$\Rightarrow \quad (k\partial_x u)(x_{i+1/2}^+) \approx k_{i+1} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i+1/2})}{x_{i+1} - x_{i+1/2}}.$$

On écrit la continuité du flux total

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) = -(k\partial_x u)(x_{i+1/2}^+) = -(k\partial_x u)(x_{i+1/2}^-).$$

On essaie d'éliminer la valeur à l'interface

$$\overline{F}_{i+1/2}(u) \approx -\underbrace{\frac{h_{i+1/2}}{\frac{x_{i+1}-x_{i+1/2}}{k_{i+1}} + \frac{x_{i+1/2}-x_i}{k_i}}}_{\overset{\text{def}}{=} k_{i+1/2}, \text{ moy. harmonique}} \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1/2}}$$

Le schéma VF s'écrit donc : trouver $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_i f_i, \quad \forall 1 \leq i \leq N,$$

avec

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) = -k_{i+1/2} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1/2}},$$

$$\boxed{k_{i+1/2} = \frac{h_{i+1/2} k_i k_{i+1}}{(x_{i+1} - x_{i+1/2}) k_i + (x_{i+1/2} - x_i) k_{i+1}}.}$$

Résultats théoriques

- Existence et unicité de la solution du schéma.
- Stabilité L^∞ et L^2.
- Convergence H^1 à l'ordre 1 pour toute donnée $f \in L^2(\Omega)$.
- On observe de l'ordre 2 en norme L^∞

Tout autre choix de $k_{i+1/2}$ dégrade la convergence du schéma.

Terme source Dirac : saut de flux

$$-\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x) + \delta_a, \quad \text{dans }]0,1[,$$

Terme source Dirac : saut de flux

$$-\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x) + \delta_a, \quad \text{dans }]0,1[,$$

Ecriture equivalente :

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & \text{dans }]0,a[, \\ -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & \text{dans }]a,1[, \\ \quad \Big[-k\partial_x u \Big](a^+) - \Big[-k\partial_x u \Big](a^-) = 1, \end{cases}$$

$$-\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x) + \delta_a, \quad \text{dans }]0,1[,$$

Ecriture equivalente :

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & \text{dans }]0,a[, \\ -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & \text{dans }]a,1[, \\ \quad \Big[-k\partial_x u\Big](a^+) - \Big[-k\partial_x u\Big](a^-) = 1, \end{cases}$$

Schema : Méthode similaire à ce qui précède
Soit i tel que $a \in [x_i, x_{i+1}]$, on écrit

$$F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i-1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_i f_i + \frac{x_{i+1} - a}{h_{i+1/2}}.$$

$$F_{i+3/2}(u^{\mathcal{T}}) - F_{i+1/2}(u^{\mathcal{T}}) = h_{i+1} f_{i+1} + \frac{a - x_i}{h_{i+1/2}}.$$

La définition des flux et les autres équations sont inchangées.

1. Prise en compte d'un terme de Dirac dans le problème.
    - La méthode proposée dans le transparent précédent est mise en oeuvre si `donnees.dirac` est défini.
    - On peut vérifier que, si on prend mal en compte le terme de Dirac, la convergence se dégrade.
2. Problème de diffusion à coefficient discontinu :
    - Programmation des différents choix du flux à l'interface :
        - Si `donnee.methode='exacte'` :
        $$k_{i+1/2} = k(x_{i+1/2}).$$
        - Si `donnee.methode='arithmetique'` :
        $$k_{i+1/2} = \frac{k(x_i) + k(x_{i+1})}{2}.$$
        - Si `donnee.methode='harmonique'` :
        $$k_{i+1/2} = \frac{h_{i+1/2} k(x_i) k(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i+1/2}) k(x_i) + (x_{i+1/2} - x_i) k(x_{i+1})}.$$
    - Comparaison des ordres de convergence observés.

3 Schéma VF de base pour Laplace 2D
- Notations. Construction
- Analyse du schéma VF4
- Implémentation
- Extensions de VF4

4 Méthode DDFV en 2D - cas linéaire
- Les limitations de VF4
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV

5 Méthode DDFV en 2D - cas non linéaire
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- m-DDFV dans le cas non-linéaire
- Construction et analyse s'un solveur

La notion de maillage orthogonal admissible

(Eymard, Gallouët, Herbin, '00→ '09)

Définition (pas la plus générale)

- Ω un ouvert borné polygonal connexe de $\mathbb{R}^d$.
- Un maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$ est constitué de :
  - une famille finie de sous-domaines compacts, polyhédraux, convexes, non vides de Ω notés κ et appelés **volumes de contrôle** vérifiant
    - Si $\kappa \neq \mathcal{L}$, on a $\mathring{\kappa} \cap \mathring{\mathcal{L}} = \emptyset$.
    - $\overline{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{T}} \kappa$.

La notion de maillage orthogonal admissible

(Eymard, Gallouët, Herbin, '00→ '09)

Définition (pas la plus générale)

- Ω un ouvert borné polygonal connexe de $\mathbb{R}^d$.
- Un maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$ est constitué de :
  - une famille finie de sous-domaines compacts, polyhédraux, convexes, non vides de Ω notés $\mathcal{K}$ et appelés **volumes de contrôle** vérifiant
    - Si $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$, on a $\overset{\circ}{\mathcal{K}} \cap \overset{\circ}{\mathcal{L}} = \emptyset$.
    - $\overline{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \mathcal{K}$.
  - une famille de points $(x_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}}$ tels que
    - Pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$, $x_{\mathcal{K}} \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}$.
    - Pour tout $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{T}$, $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$, si $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ est de dimension $d-1$, alors c'est une face de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{L}$, notée $\mathcal{K}|\mathcal{L}$ et qui de plus, vérifie la **condition d'orthogonalité**
$$[x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}] \perp \mathcal{K}|\mathcal{L}. \qquad (4)$$

(Eymard, Gallouët, Herbin, '00→ '09)

Définition (pas la plus générale)

- Ω un ouvert borné polygonal connexe de $\mathbb{R}^d$.
- Un maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$ est constitué de :
  - une famille finie de sous-domaines compacts, polyhédraux, convexes, non vides de Ω notés $\mathcal{K}$ et appelés **volumes de contrôle** vérifiant
    - Si $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$, on a $\mathring{\mathcal{K}} \cap \mathring{\mathcal{L}} = \emptyset$.
    - $\overline{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \mathcal{K}$.
  - une famille de points $(x_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}}$ tels que
    - Pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$, $x_{\mathcal{K}} \in \mathring{\mathcal{K}}$.
    - Pour tout $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{T}$, $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$, si $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ est de dimension $d-1$, alors c'est une face de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{L}$, notée $\mathcal{K}|\mathcal{L}$ et qui de plus, vérifie la **condition d'orthogonalité**

$$[x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}] \perp \mathcal{K}|\mathcal{L}. \tag{4}$$

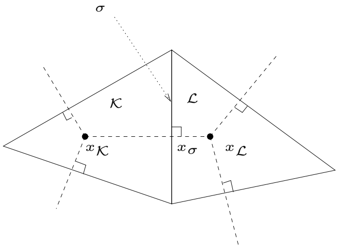
Notations

- Pas du maillage : $\mathrm{size}(\mathcal{T})$
- Ensembles d'arêtes : $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{ext}$, $\mathcal{E}_{int}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$
- Normales : $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}}$, $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}$, $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$
- Volumes. Mesures : $|\mathcal{K}|$, $|\sigma|$
- Distances : $d_{\mathcal{K}\sigma}$, $d_{\mathcal{L}\sigma}$, $d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$, d_{σ}

On considère le problème suivant

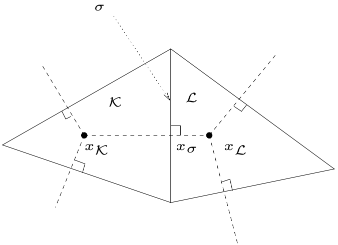
$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

sur un maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$ (ici formé de triangles)



BILAN SUR UN VOLUME DE CONTRÔLE $\mathcal{K}$

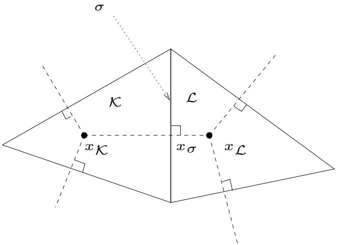
$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{K}} f = \int_{\mathcal{K}} -\Delta u = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{-\int_\sigma \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}}$$



$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

Conservativité locale pour le problème initial

$$\overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -\overline{F}_{\mathcal{L},\sigma}, \quad \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}.$$



$$|\mathcal{K}|f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

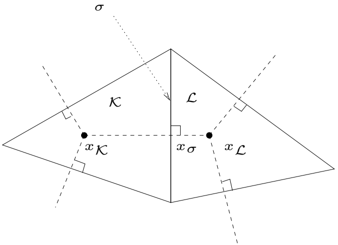
Conservativité locale pour le problème initial

$$\overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -\overline{F}_{\mathcal{L},\sigma}, \quad \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}.$$

Inconnues aux centres

On souhaite obtenir $u_{\mathcal{K}} \sim u(x_{\mathcal{K}})$

Notation : $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.



$$|\mathcal{K}| f_\mathcal{K} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

Conservativité locale pour le problème initial

$$\overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -\overline{F}_{\mathcal{L},\sigma}, \quad \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}.$$

Inconnues aux centres

On souhaite obtenir $u_\mathcal{K} \sim u(x_\mathcal{K})$

Notation : $u^\mathcal{T} = (u_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$.

Flux numériques

BUT : définir $u^\mathcal{T} \mapsto F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T})$ qui approche le flux réel $\overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}$

Schéma numérique

Trouver $u^\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$ tel que $|\mathcal{K}| f_\mathcal{K} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T})$ pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.

Cas d'une arête intérieure

$\sigma \in \mathcal{E}_{int}$, $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$.

$$x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

$$\text{si } x \in \sigma, \qquad (\nabla u(x)) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} + O(\text{size}(\mathcal{T}))$$

$$\Longrightarrow \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -|\sigma| \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} + O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

On pose donc

$$\boxed{F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}.}$$

Cas d'une arête intérieure

$\sigma \in \mathcal{E}_{int}$, $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$.

$$x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

$$\text{si } x \in \sigma, \qquad (\nabla u(x)) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} + O(\text{size}(\mathcal{T}))$$

$$\Longrightarrow \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -|\sigma| \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} + O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

On pose donc

$$\boxed{F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}.}$$

Remarque : On a la conservativité du schéma $F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -F_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}})$

Notation :

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -F_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}).$$

CAS D'UNE ARÊTE EXTÉRIEURE $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$.

$$x_\sigma - x_\mathcal{K} = d_{\mathcal{K}\sigma} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}.$$

$$(\nabla u(x)) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \sim \frac{u(x_\sigma) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\sigma}} = \frac{0 - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\sigma}} \Leftarrow \text{condition au bord}$$

$$\Longrightarrow \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -|\sigma| \frac{-u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\sigma}} + O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

On pose donc

$$\boxed{F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = -|\sigma| \frac{-u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}.}$$

Le schéma

On cherche $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que

$$\begin{cases} \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}, \;\; \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{-u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \;\; \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}. \end{cases} \tag{VF4}$$

Le schéma

On cherche $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que

$$\begin{cases} \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}, \quad \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{-u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}. \end{cases} \tag{VF4}$$

Remarques

- Il s'agit d'un système linéaire de N équations à N inconnues (N=nb de volumes de contrôle dans $\mathcal{T}$).
- Pourquoi TPFA ? **Two Point Flux Approximation**
- Pourquoi VF4 ? Stencil de 4 points en 2D sur maillages triangles.
- Sur maillage 2D cartésien uniforme : c'est le schéma à 5 points standard.

Le schéma

On cherche $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que

$$\begin{cases} \forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}, \quad \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{-u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}. \end{cases} \tag{VF4}$$

Notations - Approximation constante par morceaux

- On notera $f^{\mathcal{T}} = (f_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.
- On associe à toute famille $v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, une fonction

$$v^{\mathcal{T}}(x) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} v_{\mathcal{K}} \mathbf{1}_{\mathcal{K}}(x).$$

- On a alors

$$\|v^{\mathcal{T}}\|_{L^\infty} = \sup_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} |v_{\mathcal{K}}|, \quad \|v^{\mathcal{T}}\|_{L^2} = \left(\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} |\mathcal{K}| |v_{\mathcal{K}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Plan

3 **Schéma VF de base pour Laplace 2D**
- Notations. Construction
- Analyse du schéma VF4
- Implémentation
- Extensions de VF4

4 Méthode DDFV en 2D - cas linéaire
- Les limitations de VF4
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- Implémentation
- Le schéma m-DDFV

5 Méthode DDFV en 2D - cas non linéaire
- Construction du schéma
- Analyse du schéma
- m-DDFV dans le cas non-linéaire
- Construction et analyse s'un solveur

Notations

- Pour tout couple $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ de volumes de contrôle voisins on note
$$D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}.$$
- Pour toute arête intérieure $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ on note $D_\sigma(u^{\mathcal{T}}) = D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})$, où l'on a choisi une *orientation* $\mathcal{K} \to \mathcal{L}$ une bonne fois pour toutes.
- Pour tout arête extérieure $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ on note $D_\sigma(u^{\mathcal{T}}) = \frac{-u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}$.

Lemme (Intégration par parties discrète)

Soit $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ *une* **éventuelle** *solution de* (VF4), *alors pour tout* $v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$

$$\underbrace{\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| D_\sigma(u^{\mathcal{T}}) D_\sigma(v^{\mathcal{T}})}_{\stackrel{\text{def}}{=} [u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}]_{1,\mathcal{T}}} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} |\mathcal{K}| v_{\mathcal{K}} f_{\mathcal{K}} = (v^{\mathcal{T}}, f^{\mathcal{T}})_{L^2}.$$

$\rightsquigarrow$ **La conservativité locale est essentielle ici**

Lemme (Intégration par parties discrète)

Soit $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ *une* **éventuelle** *solution de* (VF4), *alors pour tout* $v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$

$$\underbrace{\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| D_\sigma(u^{\mathcal{T}}) D_\sigma(v^{\mathcal{T}})}_{\stackrel{\text{def}}{=} [u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}]_{1,\mathcal{T}}} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} |\mathcal{K}| v_{\mathcal{K}} f_{\mathcal{K}} = (v^{\mathcal{T}}, f^{\mathcal{T}})_{L^2}.$$

$\leadsto$ **La conservativité locale est essentielle ici**

Proposition

La forme bilinéaire

$$(u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \mapsto [u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}]_{1,\mathcal{T}},$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ *appelé* **produit scalaire H_0^1 discret**. *La norme associée est appelée* **norme H_0^1 discrète** *et notée* $\| \cdot \|_{1,\mathcal{T}}$.

Théorème

Pour toute donnée $f \in L^2(\Omega)$, le schéma (VF4) *admet une unique solution $u^{\mathcal{T}}$ et on a*

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}\|f^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}\|f\|_{L^2}.$$

THÉORÈME

Pour toute donnée $f \in L^2(\Omega)$, le schéma (VF4) *admet une unique solution $u^{\mathcal{T}}$ et on a*

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}\|f^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}\|f\|_{L^2}.$$

Pour obtenir une estimation H_0^1 discrète exploitable, on utilise le

THÉORÈME (INÉGALITÉ DE POINCARÉ DISCRÈTE)

Pour tout maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$, on a

$$\forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \quad \|v^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|v^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}.$$

▸ Preuve de l'inégalité de Poincaré

Matrice du système

- Elle est symétrique définie positive (Cf. l'intégation par parties discrète).
- C'est une M-matrice $\Rightarrow$ principe du maximum discret vérifié

$$f^{\mathcal{T}} \geq 0 \Longrightarrow u^{\mathcal{T}} \geq 0.$$

En effet, la ligne κ de la matrice s'écrit

$$\sum_{\mathcal{L} \in V_{\mathcal{K}}} \underbrace{\tau_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}_{\geq 0}(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}.$$

Matrice du système

- Elle est symétrique définie positive (Cf. l'intégation par parties discrète).
- C'est une M-matrice $\Rightarrow$ principe du maximum discret vérifié

$$f^{\mathcal{T}} \geq 0 \Longrightarrow u^{\mathcal{T}} \geq 0.$$

En effet, la ligne κ de la matrice s'écrit

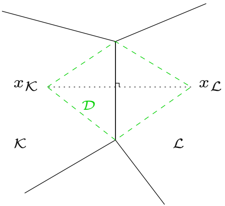
$$\sum_{\mathcal{L} \in V_{\mathcal{K}}} \underbrace{\tau_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}_{\geq 0} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) = |\kappa| f_{\mathcal{K}}.$$

Implémentation du schéma

- Parcours du maillage par arêtes et non par volumes de contrôle.
- Informations géométriques utilisées : $|\sigma|$, $d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$, $|\kappa|$.
- La seule méthode de quadrature utilisée (éventuellement) est pour le terme source.
- Estimation de l'erreur de quadrature $f^{\mathcal{T}} \mapsto u^{\mathcal{T}}$, $g^{\mathcal{T}} \mapsto v^{\mathcal{T}}$

$$\|u^{\mathcal{T}} - v^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq C_{\Omega} \|u^{\mathcal{T}} - v^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C_{\Omega}^2 \|f^{\mathcal{T}} - g^{\mathcal{T}}\|_{L^2}.$$

Cellule diamant



Gradient discret

Pour tout $v^\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$, on définit ($d$ = dimension)

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \quad \nabla_\mathcal{D}^\mathcal{T} v^\mathcal{T} = \begin{cases} d\dfrac{u_\mathcal{L} - u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = dD_\sigma(u^\mathcal{T})\boldsymbol{\nu}, & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \\ d\dfrac{0 - u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} = dD_\sigma(u^\mathcal{T})\boldsymbol{\nu}, & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \end{cases}$$

$$\nabla^\mathcal{T} v^\mathcal{T} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \mathbf{1}_\mathcal{D} \nabla_\mathcal{D}^\mathcal{T} v^\mathcal{T} \in (L^2(\Omega))^2.$$

Lien avec la norme H_0^1 discrète

$$\|v^\mathcal{T}\|_{1,\mathcal{T}}^2 = \frac{1}{d}\|\nabla^\mathcal{T} v^\mathcal{T}\|_{L^2}^2.$$

Théorème (Compacité faible)

Soit $(\mathcal{T}_n)_n$ *une suite de maillages orthogonaux admissibles avec* $\mathrm{size}(\mathcal{T}_n) \to 0$ *et* $(u^{\mathcal{T}_n})_n$ *une famille de fonctions discrètes définies sur chacun des maillages telle que*

$$\sup_n \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} < +\infty.$$

Alors :

- *Il existe une fonction* $u \in L^2(\Omega)$*, et une sous-suite* $(u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}})_n$ *qui converge* **fortement** *vers* u *dans* $L^2(\Omega)$*.*

Théorème (Compacité faible)

Soit $(\mathcal{T}_n)_n$ une suite de maillages orthogonaux admissibles avec $\mathrm{size}(\mathcal{T}_n) \to 0$ *et* $(u^{\mathcal{T}_n})_n$ *une famille de fonctions discrètes définies sur chacun des maillages telle que*

$$\sup_n \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} < +\infty.$$

Alors :

- *Il existe une fonction $u \in L^2(\Omega)$, et une sous-suite $(u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}})_n$ qui converge* **fortement** *vers u dans $L^2(\Omega)$.*

De plus,

- *La fonction u est dans $H^1_0(\Omega)$.*
- *La suite des gradients discrets $(\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}})_n$ converge* **faiblement** *vers ∇u dans $(L^2(\Omega))^d$.*

Preuve du Théorème de compacité

Théorème (Convergence du schéma VF4)

Soit $f \in L^2(\Omega)$ *et* $u \in H_0^1(\Omega)$, *l'unique solution du problème continu.*

Soit $(\mathcal{T}_n)_n$ *une famille de maillages orthogonaux admissibles avec* $\mathrm{size}(\mathcal{T}_n) \to 0$.

Pour tout n, *on note* $u^{\mathcal{T}_n} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_n}$ *l'unique solution du schéma sur le maillage* $\mathcal{T}_n$ *pour la donnée* f.

Théorème (Convergence du schéma VF4)

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H_0^1(\Omega)$, l'unique solution du problème continu.

Soit $(\mathcal{T}_n)_n$ une famille de maillages orthogonaux admissibles avec $\text{size}(\mathcal{T}_n) \to 0$.

Pour tout n, on note $u^{\mathcal{T}_n} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_n}$ l'unique solution du schéma sur le maillage $\mathcal{T}_n$ pour la donnée f.
On a :

- *La suite $(u^{\mathcal{T}_n})_n$ converge* **fortement** *vers u dans $L^2(\Omega)$.*
- *La suite $(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})_n$ converge* **faiblement** *vers ∇u dans $(L^2(\Omega))^d$.*

De plus, si $d \geq 2$, la convergence **forte** *des gradients n'a lieu que si $f = u = 0$.*

Preuve de la convergence de VF4

Préalables

- Convergence du schéma : pas d'hypothèse de régularité sur u.
- Pour les estimations d'erreur on va supposer que $u \in H^2(\Omega)$.

Préalables

- Convergence du schéma : pas d'hypothèse de régularité sur u.
- Pour les estimations d'erreur on va supposer que $u \in H^2(\Omega)$.

Principe de l'analyse

- On souhaite comparer $u^{\mathcal{T}}$ avec la projection $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u = (u(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}}$ de la solution exacte sur le maillage. On définit l'erreur

$$e^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u - u^{\mathcal{T}}.$$

Préalables

- Convergence du schéma : pas d'hypothèse de régularité sur u.
- Pour les estimations d'erreur on va supposer que $u \in H^2(\Omega)$.

Principe de l'analyse

- On souhaite comparer $u^{\mathcal{T}}$ avec la projection $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u = (u(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}}$ de la solution exacte sur le maillage. On définit l'erreur

$$e^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u - u^{\mathcal{T}}.$$

- On compare le flux numérique calculé sur $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u$ avec le flux exact

$$|\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

Il vient (pour $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$)

$$R_{\mathcal{K},\sigma}(u) = \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx.$$

$$|\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- On soustrait le bilan de flux exact

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u),$$

et le schéma numérique

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}).$$

On obtient

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(e^{\mathcal{T}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u). \qquad (\star)$$

$$|\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- On obtient

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(e^{\mathcal{T}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u). \qquad (\star)$$

$$|\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- On obtient

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(e^{\mathcal{T}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u). \qquad (\star)$$

- On multiplie $(\star)$ par $e_{\mathcal{K}}$ et on somme sur $\mathcal{K}$.
- L'erreur de consistance est conservative $R_{\mathcal{K},\sigma}(u) = -R_{\mathcal{L},\sigma}(u)$ donc on trouve

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 = [e^{\mathcal{T}}, e^{\mathcal{T}}]_{1,\mathcal{T}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| D_\sigma(e^{\mathcal{T}})^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| R_\sigma(u) D_\sigma(e^{\mathcal{T}}).$$

- Par Cauchy-Schwarz on trouve

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| |R_\sigma(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| |R_\sigma(u)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème (Estimation d'erreur - Version 1)

Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, il existe C ne dépendant que de Ω telle que

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C\mathrm{size}(\mathcal{T})\|D^2u\|_{L^\infty},$$

$$\|u - u^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq C\mathrm{size}(\mathcal{T})\|D^2u\|_{L^\infty}.$$

Estimation de l'erreur de consistance

$$\text{Si } u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \quad |R_\sigma(u)| \leq C\|D^2u\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}).$$

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| |R_\sigma(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème (Estimation d'erreur - Version 2)

Si $u \in H^2(\Omega)$, il existe C ne dépendant que de Ω et $\mathrm{reg}(\mathcal{T})$ telle que

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \mathrm{diam}(\Omega) \|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C \mathrm{size}(\mathcal{T}) \|D^2 u\|_{L^2},$$

$$\|u - u^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq C \mathrm{size}(\mathcal{T}) \|D^2 u\|_{L^2}.$$

Estimation de l'erreur de consistance

Si $u \in H^2(\Omega)$, $\quad |R_\sigma(u)| \leq C \mathrm{size}(\mathcal{T}) \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} |D^2 u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$ Preuve

où C ne dépend que la constante de régularité du maillage

$$\mathrm{reg}(\mathcal{T}) = \sup_{\sigma \in \mathcal{E}} \left(\frac{|\sigma|}{d_{\mathcal{K}\sigma}} + \frac{|\sigma|}{d_{\mathcal{L}\sigma}} \right).$$

- Bien qu'on ait (pour des familles régulières de maillages)

$$\|\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u - u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} 0,$$

on a **jamais** (sauf si $u = f = 0$)

$$\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} \nabla u.$$

- Bien qu'on ait (pour des familles régulières de maillages)

$$\|\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u - u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} 0,$$

on a **jamais** (sauf si $u = f = 0$)

$$\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} \nabla u.$$

- En pratique on observe un phénomène de super-convergence

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \sim C\text{size}(\mathcal{T})^2,$$

comme pour les schémas éléments finis (Aubin–Nitschze).

$\rightsquigarrow$ C'est encore un problème ouvert dans le cas général.

(Omnès, '10)

Plan

3. Schéma VF de base pour Laplace 2D
   - Notations. Construction
   - Analyse du schéma VF4
   - Implémentation
   - Extensions de VF4
4. Méthode DDFV en 2D - cas linéaire
   - Les limitations de VF4
   - Construction du schéma
   - Analyse du schéma
   - Implémentation
   - Le schéma m-DDFV
5. Méthode DDFV en 2D - cas non linéaire
   - Construction du schéma
   - Analyse du schéma
   - m-DDFV dans le cas non-linéaire
   - Construction et analyse s'un solveur

`http://www.cmi.univ-mrs.fr/~fboyer/publications/VF_scilab.tar.gz`

On se place dans le sous-répertoire : `2D`

- 3 librairies de fonctions :
  - `donnees2D.sci`

    Différents jeux de données
  - `maillages2D.sci`

    Définition des maillages disponibles, chargement et manipulation. Calculs de normes discrètes. Routines de tracé des fonctions discrètes.
  - `schemas2D.sci`

    Fonctions d'assemblage des schémas
- 2 programmes principaux :
  - `VF2D.sce`

    Calcul et tracé des solutions approchées/exactes
  - `courbes_erreur2D.sce`

    Tracé de courbes d'erreurs

Les maillages 2D :

- Stockés dans 3 fichiers (s) :
  - `xxxx_sommets`
  - `xxxx_centres`
  - `xxxx_aretes`
- Sont chargés dans Scilab par la commande

```
[maillage]=lecture_maillage(xxxx);
```

- La variable `maillage` ainsi obtenue est une structure qui contient
  - `maillage.nom` : un nom qui décrit le maillage
  - `maillage.nb_vol` : nombre de volumes de contrôle
  - `maillage.nb_som` : nombre de sommets
  - `maillage.nb_are` : nombre d'arêtes
  - `maillage.sommets` : une matrice de taille `nb_som x 2`
  - `maillage.centres` : une matrice de taille `nb_vol x 2`
  - `maillage.aretes` : une matrice de taille `nb_are x 17`

- Sommets : coordonnées du sommet numéro `i`

  `maillage.sommets(i,_X)`, `maillage.sommets(i,_Y)`

- Centres : coordonnées du centre du volume `j`

  `maillage.centres(j,_X)`, `maillage.centres(j,_Y)`

- Arêtes : Pour l'arête numéro `k`
  - Numéros des deux sommets

    `maillage.aretes(k,_DEB)`, `maillage.aretes(k,_FIN)`

  - Numéros des deux volumes $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$

    `maillage.aretes(k,_K)`, `maillage.aretes(k,_L)`

  - Mesure de l'arête $|\sigma|$ et distance $d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$

    `maillage.aretes(k,_MES)`, `maillage.aretes(k,_DKL)`

  - Mesures des quarts de diamant

    `maillage.aretes(k,_MES_K_DEB)`, ...

  - Label (`>=0` à l'interieur, `=-1` bord Dirichlet, `<-1` bord Neumann)

    `maillage.aretes(k,_LABEL)`.

Les jeux de données :

Structure générale similaire au cas 1D

- Liste de jeux de données : `cas_test=list(...,...,...)`
- Chaque variable de cette liste est une structure `donnees`
  - `donnees.nom`
  - `donnees.source`
  - `donnees.bordD`
  - `donnees.bordN`
  - `donnees.coeff_k`
  - `donnees.uexacte`
  - `donnees.maillages` : donne (éventuellement) une liste de noms de maillages spécifiquement utilisables pour ce cas test.
  - + d'autres paramètres éventuellement utiles pour le calcul.

Fonctions d'assemblage des schémas

- Syntaxe générale : `[A,b]=const_schema_xxxx(m,donnees)`
  - Entrée : `m` est un maillage et `donnees` un jeu de données.
  - Sortie : `A` est la matrice du système et `b` le second membre.
- **Trois schémas codés :**
  - `xxxx=VF4`
  - `xxxx=DDFV`
  - `xxxx=DDFV_mat`

Structure du programme `VF2D.sce`

- Chargement des libraires de fonctions.
- Interrogation utilisateur :
  - Choix du cas test
  - Choix du maillage (la liste des maillages proposée peut dépendre du cas test)
  - S'il s'agit d'une famille de maillages : choix du niveau de raffinement.
  - Choix du schéma à utiliser (VF4 ou DDFV).
- Lecture du maillage
- Assemblage du schéma
- Résolution du système linéaire (par UMFPACK)
- Tracé de la solution approchée (et exacte si disponible) et évaluation de l'erreur.
- Eventuellement : tracé de la fonction de courant.

Structure du programme `courbes_erreur2D.sce`

- Chargement des libraires de fonctions.
- Interrogation utilisateur :
  - Choix du cas test
  - Choix d'une **famille** de maillages
  - Choix des niveaux de raffinement min et max souhaités
  - Choix du schéma à utiliser (VF4 ou DDFV).
- Pour chaque maillage choisi :
  - Lecture du maillage
  - Assemblage du schéma
  - Résolution du système linéaire (par UMFPACK)
  - Evaluation et stockage de l'erreur.
- Tracé des courbes d'erreur en fonction du pas du maillage en échelle logarithmique.

Implémentation avec des boucles

extrait de `[A,b]=const_schema_VF4_boucles(m,donnees)`

```
for i=1:m.nb_are

  centre(_X) = ( m.sommets(m.aretes(i,_DEB),_X)   ...
             + m.sommets(m.aretes(i,_FIN),_X))/2;
  centre(_Y) = (m.sommets(m.aretes(i,_DEB),_Y)    ...
             + m.sommets(m.aretes(i,_FIN),_Y))/2;

  coeff_diff = donnees.coeff_k(centre(_X),centre(_Y));

  tauKL = coeff_diff*m.aretes(i,_MES)/m.aretes(i,_DKL);

  A(m.aretes(i,_K),m.aretes(i,_K)) = A(m.aretes(i,_K),m.aretes(i,_K)) ...
                                    + tauKL;

  if (m.aretes(i,_L)>0) then
    A(m.aretes(i,_K),m.aretes(i,_L)) = - tauKL;
    A(m.aretes(i,_L),m.aretes(i,_L)) = A(m.aretes(i,_L),m.aretes(i,_L)) ...
                                     + tauKL;
    A(m.aretes(i,_L),m.aretes(i,_K)) = - tauKL;
  end;
```

Problème isotrope hétérogène

On veut résoudre

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(k(x)\nabla u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

avec $k \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $\inf_\Omega k > 0$.

VF4 dans le cadre isotrope hétérogène

Problème isotrope hétérogène

On veut résoudre

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(k(x)\nabla u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

avec $k \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $\inf_\Omega k > 0$.

Schéma VF4

- Structure générale inchangée

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad |\mathcal{K}| f_\mathcal{K} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}),$$

  il faut bien sûr changer la définition des flux :

$$F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = |\sigma| k_\sigma \frac{u_\mathcal{L} - u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}.$$

- QUESTION : Que prendre pour k_σ ?

Théorème

Si on construit les k_σ de telle sorte que

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} k_\sigma \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} k, \quad \textit{dans } L^2(\Omega),$$

alors le schéma converge.

Théorème

Si on construit les k_σ de telle sorte que

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} k_\sigma \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} k, \quad \textit{dans } L^2(\Omega),$$

alors le schéma converge.

- OK (sans autre hypothèse) si on prend
$$k_\sigma = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_{\mathcal{D}} k(x)\,dx.$$
- Si le maillage est tel que k est Lip. sur chaque diamant
$$k_\sigma = \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\,dx, \quad \text{ou} \quad k_\sigma = k(x_{\mathcal{D}}), x_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}.$$
- Si le maillage est tel que k est Lip. sur chaque volume de contrôle
$$k_\sigma = \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}k_{\mathcal{K}} + d_{\mathcal{L}\sigma}k_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}, \text{avec } k_{\mathcal{K}} = \frac{1}{|\mathcal{K}|}\int_{\mathcal{K}} k(x)\,dx, \text{ ou } k_{\mathcal{K}} = k(x_{\mathcal{K}}).$$

Le cas régulier

Proposition

Si k est Lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$ et que u est H^2 sur chaque diamant, alors on a convergence à l'ordre 1 comme pour le problème de Laplace.

Estimation coeff reg VF4

Le cas régulier par morceaux

- Si k est seulement Lipschitzienne sur chaque volume de contrôle, on perd la convergence à l'ordre 1.
- On peut retrouver cette convergence optimale en choisissant

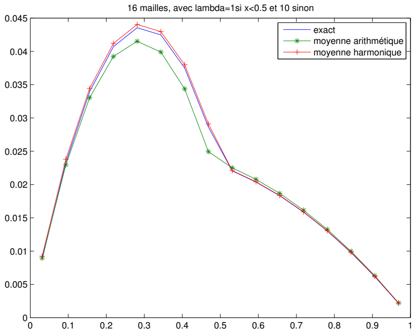
$$k_\sigma = \frac{d_{\mathcal{KL}}}{\dfrac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_{\mathcal{K}}} + \dfrac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_{\mathcal{L}}}}.$$

Exemple 1D

- k_σ = moy. arithmétique

  ordre $\frac{1}{2}$
- k_σ = moy. harmonique

  ordre 1



D'où vient cette formule de moyenne harmonique ?

- La solution u est continue (au sens des traces sur les arêtes).
- Le gradient de u **n'est pas** continu.
- Mais, le flux total $k(x)\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ est continu (faiblement) aux arêtes.

D'où vient cette formule de moyenne harmonique ?

- La solution u est continue (au sens des traces sur les arêtes).
- Le gradient de u **n'est pas** continu.
- Mais, le flux total $k(x)\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ est continu (faiblement) aux arêtes.
- On introduit une inconnue artificielle sur l'arête u_σ.
- On définit les flux venant de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{L}$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{K}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \quad F_{\mathcal{L},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{L}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}.$$

D'OÙ VIENT CETTE FORMULE DE MOYENNE HARMONIQUE ?

- La solution u est continue (au sens des traces sur les arêtes).
- Le gradient de u **n'est pas** continu.
- Mais, le flux total $k(x)\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ est continu (faiblement) aux arêtes.
- On introduit une inconnue artificielle sur l'arête u_σ.
- On définit les flux venant de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{L}$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{K}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \quad F_{\mathcal{L},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{L}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}.$$

- On demande la conservativité locale

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = -F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

D'OÙ VIENT CETTE FORMULE DE MOYENNE HARMONIQUE ?

- La solution u est continue (au sens des traces sur les arêtes).
- Le gradient de u **n'est pas** continu.
- Mais, le flux total $k(x)\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ est continu (faiblement) aux arêtes.
- On introduit une inconnue artificielle sur l'arête u_σ.
- On définit les flux venant de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{L}$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{K}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \quad F_{\mathcal{L},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{L}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}.$$

- On demande la conservativité locale

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = -F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On en déduit la valeur de u_σ puis le flux numérique

$$\Longrightarrow u_\sigma = \frac{\frac{k_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}} u_{\mathcal{K}} + \frac{k_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}} u_{\mathcal{L}}}{\frac{k_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}} + \frac{k_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}},$$

$$\Longrightarrow F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = |\sigma| \left(\frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_{\mathcal{K}}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_{\mathcal{L}}}} \right) \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}$$

Estimation consistance

- **Sauts de flux imposés :**
  Si $f = \rho(x)\delta_\Gamma$ où Γ est une courbe polygonale et si le maillage suit cette courbe (sinon il faut adapter).

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}} \\ \sigma \subset \Gamma}} |\sigma| \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{d_{\mathcal{K}\sigma} + d_{\mathcal{L}\sigma}} \rho(x_\sigma).$$

- **Sauts de flux imposés :**
  Si $f = \rho(x)\delta_\Gamma$ où Γ est une courbe polygonale et si le maillage suit cette courbe (sinon il faut adapter).

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}} \\ \sigma \subset \Gamma}} |\sigma| \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{d_{\mathcal{K}\sigma} + d_{\mathcal{L}\sigma}} \rho(x_\sigma).$$

- **Sauts d'inconnue imposés :**
  On définit

$$F_{\mathcal{K},\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} |\sigma| \frac{u_{\mathcal{K},\sigma} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}},$$

$$F_{\mathcal{L},\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} |\sigma| \frac{u_{\mathcal{L},\sigma} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}.$$

  On impose

$$u_{\mathcal{L},\sigma} - u_{\mathcal{K},\sigma} = S_\sigma \leftarrow \text{donnée du saut de } u$$

$$F_{\mathcal{L},\sigma} + F_{\mathcal{K},\sigma} = 0 \leftarrow \text{continuité du flux.}$$

  De ces deux égalités, on tire les formules donnant $u_{\mathcal{K},\sigma}$ et $u_{\mathcal{L},\sigma}$ en fonction de $u_{\mathcal{K}}, u_{\mathcal{L}}$ et de S_σ, on en déduit les flux numériques.

Contexte :

- Une matrice poreuse (2D) avec une perméabilité isotrope et constante (= 1 pour simplifier).
- Des fractures de petite épaisseur b dans le domaine dans laquelle la perméabilité k est inférieure à celle de la matrice.

Modèle :

- On “remplace” les fractures par des lignes de discontinuité en négligeant leur épaisseur.
- On rend compte de l'écoulement interne à la fracture par un modèle asymptotique :
  - **Hyp 1 :** L'écoulement est seulement transverse à la fracture :

$\Rightarrow$ en tout point le flux entrant transversalement dans la fracture est égal au flu

  - **Hyp 2 :** La pression est essentiellement linéaire dans la direction tranverse de la fracture.
- Sur les fractures, on écrit donc

$$\begin{cases} [\![\nabla u \cdot \boldsymbol{n}]\!] = 0, \\ \nabla u \cdot \boldsymbol{n} = -\dfrac{k}{b}[\![u]\!]. \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\![\nabla u \cdot \boldsymbol{n}]\!] = 0, \\ \nabla u \cdot \boldsymbol{n} = -k \dfrac{[\![u]\!]}{b}. \end{cases} \tag{S}$$

Rappel

$$F_{\mathcal{K},\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} |\sigma| \frac{u_{\mathcal{K},\sigma} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}},$$

$$F_{\mathcal{L},\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} |\sigma| \frac{u_{\mathcal{L},\sigma} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}.$$

Les conditions (S) se traduisent par

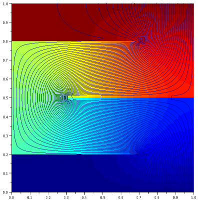
$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma} = -F_{\mathcal{L},\sigma} = -|\sigma| k \frac{u_{\mathcal{L},\sigma} - u_{\mathcal{K},\sigma}}{b}.$$

On peut alors éliminer $u_{\mathcal{K},\sigma}$ et $u_{\mathcal{L},\sigma}$ et obtenir

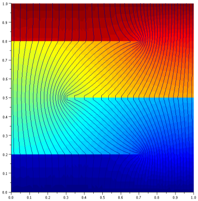
$$\boxed{F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = -|\sigma| \frac{\beta d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{1 + \beta d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}},$$

avec $\beta = \frac{k}{b}$.

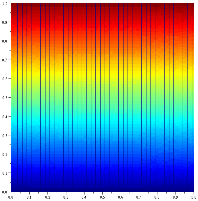
Résultats numériques



$\beta = 0$



$\beta = 1$



$\beta = +\infty$

Plan

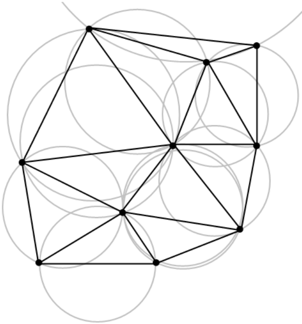
3. Schéma VF de base pour Laplace 2D
   - Notations. Construction
   - Analyse du schéma VF4
   - Implémentation
   - Extensions de VF4
4. Méthode DDFV en 2D - cas linéaire
   - Les limitations de VF4
   - Construction du schéma
   - Analyse du schéma
   - Implémentation
   - Le schéma m-DDFV
5. Méthode DDFV en 2D - cas non linéaire
   - Construction du schéma
   - Analyse du schéma
   - m-DDFV dans le cas non-linéaire
   - Construction et analyse s'un solveur

- Les maillages cartésiens : les volumes de contrôle sont des parallèlipipèdes rectangles et $x_{\mathcal{K}}$ est le centre de gravité.

- Les maillages cartésiens :
- Les maillages triangles conformes :

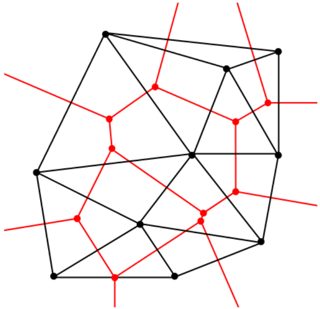
  On prend $x_{\mathcal{K}}$ =centre du cercle circonscrit ; **MAIS :**
  - $x_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$ n'est pas garanti (même $x_{\mathcal{K}} \in \Omega$ n'est pas certain).
  - On peut avoir $x_{\mathcal{K}} = x_{\mathcal{L}}$ pour $\mathcal{K} \neq \mathcal{L} \Rightarrow d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = 0$!
  - Généralisation possible au cas où

$$(x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} > 0 \quad \Leftrightarrow \text{Condition de Delaunay}$$



  - Pour presque toute famille de points dans le plan, il existe une unique triangulation de Delaunay correspondant.

- Construction duale :
  Diagramme de Voronoï d'un ensemble de points.



- Il existe des algorithmes assez efficaces de triangulation de Delaunay et de construction du diagramme de Voronoï.

Limitations de VF4

- Sur un maillage triangle non conforme : la condition d'orthogonalité est impossible à remplir.
- Sur un maillage quadrangle non cartésien : Idem

Limitations de VF4

- Sur un maillage triangle non conforme : la condition d'orthogonalité est impossible à remplir.
- Sur un maillage quadrangle non cartésien : Idem
- Dans le cas anisotrope homogène :

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f,$$

la condition devient la A-orthogonalité

$$x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} \,/\!\!/\, A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} \Longleftrightarrow A^{-1}(x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) \perp \sigma.$$

$\rightsquigarrow$ Le choix du maillage dépend du problème à résoudre.

Limitations de VF4

- Sur un maillage triangle non conforme : la condition d'orthogonalité est impossible à remplir.
- Sur un maillage quadrangle non cartésien : Idem
- Dans le cas anisotrope homogène :

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f,$$

la condition devient la A-orthogonalité

$$x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} \,/\!\!/\, A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} \iff A^{-1}(x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) \perp \sigma.$$

$\rightsquigarrow$ Le choix du maillage dépend du problème à résoudre.

- Dans le cas anisotrope hétérogène :

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f,$$

la condition va dépendre de x ...

- Sur un maillage triangle non conforme : la condition d'orthogonalité est impossible à remplir.
- Sur un maillage quadrangle non cartésien : Idem
- Dans le cas anisotrope homogène :

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f,$$

la condition devient la A-orthogonalité

$$x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} \mathbin{/\!/} A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Longleftrightarrow A^{-1}(x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) \perp \sigma.$$

$\rightsquigarrow$ Le choix du maillage dépend du problème à résoudre.

- Dans le cas anisotrope hétérogène :

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f,$$

la condition va dépendre de x ...

- Pour des problèmes non linéaires :

$$-\mathrm{div}(\varphi(\nabla u)) = f,$$

il est impossible d'approcher le flux par un schéma à deux points.

Limitations de VF4

Le gradient discret VF4 n'est pas bon

- Il n'approche correctement le gradient que dans une direction.
- La convergence du gradient est toujours en un sens faible.

Limitations de VF4

Le gradient discret VF4 n'est pas bon

- Il n'approche correctement le gradient que dans une direction.
- La convergence du gradient est toujours en un sens faible.

BILAN :
Il faut utiliser plus de 2 inconnues pour approcher les flux
$\approx$ approcher le gradient de la solution dans toutes les directions

- Schémas cell-centered : On utilise les inconnues sur les mailles voisines.
- Schémas primal/dual : On utilise de nouvelles inconnues aux sommets (maillage dual) $\Rightarrow$ DDFV
- Schémas mimétiques/hybrides/mixtes : On utilise des inconnues aux arêtes.

Contexte

- Problème elliptique scalaire de la forme

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f, \text{ dans } \Omega,$$

avec conditions de Dirichlet homogène sur le bord et $x \mapsto A(x) \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant une condition de coercivité usuelle.

Contexte

- Problème elliptique scalaire de la forme

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f, \text{ dans } \Omega,$$

  avec conditions de Dirichlet homogène sur le bord et $x \mapsto A(x) \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant une condition de coercivité usuelle.
- Maillages généraux :
  - Possible non conformité des volumes de contrôle.
  - Condition d'orthogonalité non satisfaite (et pas nécessairement pertinente !)

Contexte

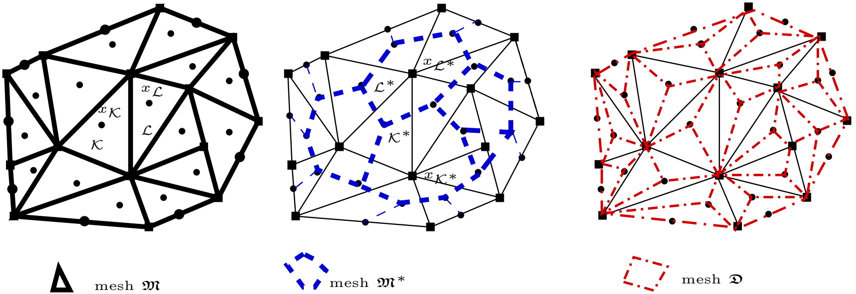
- Problème elliptique scalaire de la forme

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f, \text{ dans } \Omega,$$

  avec conditions de Dirichlet homogène sur le bord et $x \mapsto A(x) \in M_2(\mathbb{R})$ vérifiant une condition de coercivité usuelle.
- Maillages généraux :
  - Possible non conformité des volumes de contrôle.
  - Condition d'orthogonalité non satisfaite (et pas nécessairement pertinente !)
- Idées de base :
  - Mettre des inconnues aux centres **et aux sommets**.
  - Rajouter aussi des équations aux sommets.
- C'est donc plus cher que VF4 ($\approx$ 2 fois plus d'inconnues) mais bien plus robuste et efficace.

(Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05) (Andreianov-Boyer-Hubert '07)

Maillages



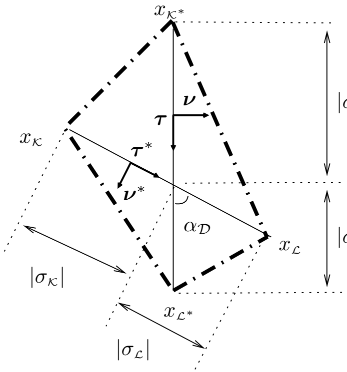
Maillage primal
$\rightsquigarrow (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}$

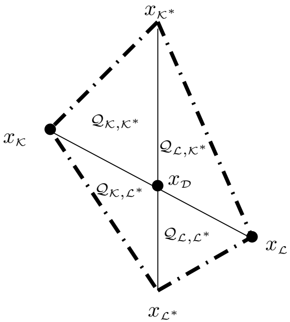
Maillage dual
$\rightsquigarrow (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*}$

Maillage diamant
$\rightsquigarrow$ gradient discret

Solution approchée : $$u^{\mathcal{T}} = \Big((u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}, (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*}\Big)$$

Quelques notations





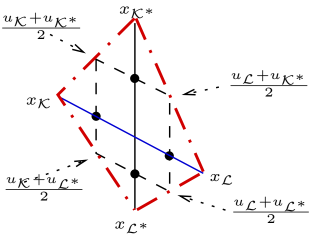
Régularité des maillages

$$\sin \alpha_{\mathcal{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\sin \alpha_{\mathcal{D}}|,$$

$$\operatorname{reg}(\mathcal{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \max\left(\frac{1}{\alpha_{\mathcal{T}}}, \max_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} \max_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \frac{\mathrm{d}_{\mathcal{D}}}{\sqrt{|\mathcal{Q}|}}, \max_{\substack{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}\\ \mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}}}} \frac{\mathrm{d}_{\mathcal{K}}}{\mathrm{d}_{\mathcal{D}}}, \max_{\substack{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*\\ \mathcal{D}\in\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}}} \frac{\mathrm{d}_{\mathcal{K}^*}}{\mathrm{d}_{\mathcal{D}}}\right).$$

GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}^* \right), \quad \forall \, \text{diamant } \mathcal{D}.$$



REMARQUE

$$|\sigma| = d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*},$$

$$|\sigma^*| = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

Définition équivalente $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \dfrac{1}{2|\mathcal{D}|} \left(|\sigma|(u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}})\boldsymbol{\nu} + |\sigma^*|(u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*})\boldsymbol{\nu}^* \right),$

Autre définition équivalente $\begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}^* \right), \quad \forall \,\text{diamant}\, \mathcal{D}.$$

Méthode DDFV

Formulation Volumes Finis :

$$a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}} \right) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M},$$

$$a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{\sigma^* \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}} |\sigma^*| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*} \right) = |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*}, \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*,$$

où

$$A_{\mathcal{D}} = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} A(x)\, dx, \text{perméabilité approchée sur le diamant}$$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}^* \right), \quad \forall \, \text{diamant } \mathcal{D}.$$

Méthode DDFV

Formulation Volumes Finis :

$$a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}} \right) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M},$$

$$a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\sigma^* \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}} |\sigma^*| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*} \right) = |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*}, \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*,$$

Proposition (Intégration par parties discrètes)

Pour tous $u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on a

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}) v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}}) v_{\mathcal{K}^*} = 2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \right).$$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}^* \right), \quad \forall \, \text{diamant } \mathcal{D}.$$

Méthode DDFV

Proposition (Intégration par parties discrètes)

Pour tous $u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on a

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}) v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}}) v_{\mathcal{K}^*} = 2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \right).$$

Formulation équivalente (Dualité Discrète) :
On cherche $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que $\forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$,

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \right) = \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*}.$$

Plan

Proposition (Intégration par parties discrètes)

Pour tous $u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on a

$$\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*} a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}})v_{\mathcal{K}^*} = 2\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(A_{\mathcal{D}}\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}\right).$$

L'application

$$a : u^{\mathcal{T}} \mapsto a(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} \Big((a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}))_{\mathcal{K}}, (a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}}))_{\mathcal{K}^*} \Big) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}},$$

est donc linéaire et coercive (si toutes les matrices $A_{\mathcal{D}}$ le sont) car

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}| |\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.

- La formule d'intégration par parties discrète avec $v^{\mathcal{T}} = u^{\mathcal{T}}$ donne

$$2 \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \right) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*}.$$

- D'où

$$\alpha \|u^{\mathcal{T}}\|^2_{1,\mathcal{T}} \leq \|f\|_{L^2} (\|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^2} + \|u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^2}).$$

Théorème (Inégalité de Poincaré ▸ Preuve)

Il existe une constante C dépendant de Ω et de $\mathrm{reg}(\mathcal{T})$ telle que

$$\forall u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \quad \|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^2} + \|u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^2} \leq C \|u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}.$$

Conclusion : La solution vérifie $\|u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C \|f\|_{L^2}$.

Théorème

Soit $\mathcal{T}_n$ une suite de maillages DDFV, telle que $\mathrm{size}(\mathcal{T}_n) \to 0$ *et* $\mathrm{reg}(\mathcal{T}_n)$ *est bornée.*
Alors, la solution $u^{\mathcal{T}_n}$ du schéma converge vers la solution exacte de la façon suivante

$$u^{\mathfrak{M}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$u^{\mathfrak{M}_n^*} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \nabla u \text{ dans } (L^2(\Omega))^2.$$

Remarque : On a convergence **forte** des gradients.

Preuve convergence

On suppose que A est régulière par rapport à x

- Equation de Laplace **(Domelevo - Omnès, 05)**
  $\Rightarrow$ Convergence à l'ordre 1 de la solution et du gradient + des résultats récents de super-convergence dans L^2 **(Omnes, 10)**
- Cas général : **(Andreianov - B. - Hubert, 07)**

Théorème

On suppose que $u \in H^2(\Omega)$ et $x \mapsto A(x)$ est Lipschitzienne alors il existe $C(\mathrm{reg}(\mathcal{T}))$ telle que on a

$$\|u - u^{\mathfrak{M}}\|_{L^2} + \|u - u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^2} + \|\nabla u - \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq C\,\mathrm{size}(\mathcal{T}).$$

Plan

Implémentation

- La matrice est construite en parcourant les arêtes (i.e. les diamants). Pour chacune de ces arêtes, on assemble 4×4 termes.
- Stencil :
  - Indépendant du tenseur de diffusion.
  - La ligne correspondant à une inconnue $u_{\mathcal{K}}$ a au plus $2N + 1$ coefficients non nuls où N est le nombre d'arêtes de κ.
- La matrice est symétrique définie positive.
- Dans le cas d'un maillage orthogonal admissible, le système se découple en deux schémas VF4.
- Possibilité de résoudre le schéma par décomposition de domaine sans recouvrement. **(B.-Hubert-Krell, '10)**

Plan

Le schéma m-DDFV

Objectifs

- Prendre en compte les discontinuités de coefficients dans le problème sans perdre la précision.
- Possibilité de faire fonctionner la méthode sur des problèmes non-linéaires.
- Les discontinuités peuvent avoir lieu à travers
  - Les arêtes primales.
  - Les arêtes duales.
  - Les deux ...
- On veut conserver le même stencil que pour DDFV.

Le schéma m-DDFV

Objectifs

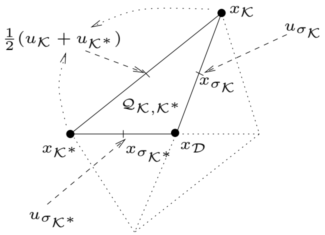
- Prendre en compte les discontinuités de coefficients dans le problème sans perdre la précision.
- Possibilité de faire fonctionner la méthode sur des problèmes non-linéaires.
- Les discontinuités peuvent avoir lieu à travers
  - Les arêtes primales.
  - Les arêtes duales.
  - Les deux ...
- On veut conserver le même stencil que pour DDFV.

Principe général

- On s'inspire du travail effectué pour VF4 :
  - On introduit des inconnues artificielles bien choisies sur les arêtes.
  - On demande une forme de conservativité locale des flux.
  - On élimine les inconnues intermédiaires et on obtient des flux numériques qui ne dépendent que des inconnues principales du problème.
- Il faut bien tenir compte de la géométrie particulière du schéma.

- $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}$ est constant sur chaque quart de diamant

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} 1_{\mathcal{Q}} \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}},$$



$$\nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}} = \frac{2}{\sin\alpha_{\mathcal{D}}}\left(\frac{u_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} - \frac{1}{2}(u_{\mathcal{K}} + u_{\mathcal{K}^*})}{|\sigma_{\mathcal{K}}|}\boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\sigma_{\mathcal{K}}} - \frac{1}{2}(u_{\mathcal{K}} + u_{\mathcal{K}^*})}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|}\boldsymbol{\nu}^*\right)$$

$$\rightsquigarrow \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}} = \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}},\ \forall_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{D}.$$

- $\delta^{\mathcal{D}} = {}^t(\delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{D}}, \delta_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}}, \delta_{\mathcal{K}^*}^{\mathcal{D}}, \delta_{\mathcal{L}^*}^{\mathcal{D}}) \in \mathbb{R}^4$ est à déterminer.
- $B_{\mathcal{Q}}$ est une matrice 2×4 qui ne dépend que de la géométrie.

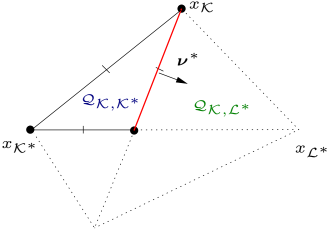
$$B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} = \frac{2}{\sin\alpha_{\mathcal{D}}}\left(\frac{\boldsymbol{\nu}^*}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|}, 0, \frac{\boldsymbol{\nu}}{|\sigma_{\mathcal{K}}|}, 0\right) = \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}|}\left(|\sigma_{\mathcal{K}}|\boldsymbol{\nu}^*, 0, |\sigma_{\mathcal{K}^*}|\boldsymbol{\nu}, 0\right).$$

On demande la conservativité des flux numériques

On note

$$A_{\mathcal{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{Q}|} \int_{\mathcal{Q}} A(x)\,dx.$$

On cherche à déterminer $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$ tel que



$$\left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) = \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}} \delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right)$$

On demande la conservativité des flux numériques

On note

$$A_{\mathcal{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} A(x)\,dx.$$

On cherche à déterminer $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{cases} \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) = \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) \\ \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) = \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) \\ \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) = \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) \\ \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) = \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|\,{}^t B_{\mathcal{Q}}.A_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}) = 0.$$

Dans le cas linéaire

$$\underbrace{\left(\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|\,{}^t B_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}} B_{\mathcal{Q}}\right)}_{\text{matrice SDP}} \delta^{\mathcal{D}} = \text{second membre linéaire en } \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}.$$

On demande la conservativité des flux numériques

On note
$$A_{\mathcal{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} A(x)\,dx.$$

On cherche à déterminer $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$ tel que
$$\begin{cases} \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) = \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) \\ \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) = \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) \\ \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) = \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) \\ \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) = \left(A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) \end{cases}$$

$$\iff \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|\,{}^t B_{\mathcal{Q}}.A_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}) = 0.$$

Proposition

Pour tout $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, et tout diamant $\mathcal{D}$, il existe un **unique** $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$ *assurant la conservativité des flux.*
Pour tout $\mathcal{D}$, l'application $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \mapsto \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})$ est linéaire.

Le schéma m-DDFV

On remplace dans le schéma DDFV, la perméabilité approchée

$$A_{\mathcal{D}}.\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_{\mathcal{D}} A(x)\,dx\right)\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}},$$

par

$$A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}.\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| A_{\mathcal{Q}}\big(\underbrace{\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})}_{=\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}}\big),$$

Le schéma m-DDFV

On remplace dans le schéma DDFV, la perméabilité approchée

$$A_{\mathcal{D}}.\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_{\mathcal{D}} A(x)\,dx\right)\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}},$$

par

$$A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}.\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| A_{\mathcal{Q}} \underbrace{(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}))}_{=\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}},$$

Formulation en dualité discrète sur les diamants

$$2\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}|\left(A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}.\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}\right) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}^*} dx, \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Le schéma m-DDFV

On remplace dans le schéma DDFV, la perméabilité approchée

$$A_{\mathcal{D}}.\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_{\mathcal{D}} A(x)\,dx\right)\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}},$$

par

$$A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}.\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| A_{\mathcal{Q}} \underbrace{\left(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})\right)}_{=\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}},$$

Formulation en dualité discrète sur les diamants

$$2\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}|\left(A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}.\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}\right) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}}\,dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}^*}\,dx, \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Formulation en dualité discrète sur les quarts de diamant

$$2\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}|\left(A_{\mathcal{Q}}.\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} v^{\mathcal{T}}\right) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}}\,dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}^*}\,dx, \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Si A est **constante par mailles primales**, on retrouve les schémas de **Hermeline (03)**. Le tenseur de diffusion équivalent obtenu est :

$$(A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}) = \frac{(|\sigma_{\mathcal{K}}|+|\sigma_{\mathcal{L}}|)(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})}{|\sigma_{\mathcal{L}}|(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})+|\sigma_{\mathcal{K}}|(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})},$$

$$\begin{aligned}(A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\nu}^*,\boldsymbol{\nu}^*) = {} & \frac{|\sigma_{\mathcal{L}}|(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}^*,\boldsymbol{\nu}^*)+|\sigma_{\mathcal{K}}|(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}^*,\boldsymbol{\nu}^*)}{|\sigma_{\mathcal{K}}|+|\sigma_{\mathcal{L}}|} \\ & - \frac{|\sigma_{\mathcal{K}}||\sigma_{\mathcal{L}}|}{|\sigma_{\mathcal{K}}|+|\sigma_{\mathcal{L}}|}\,\frac{((A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}^*)-(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}^*))^2}{|\sigma_{\mathcal{L}}|(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})+|\sigma_{\mathcal{K}}|(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})},\end{aligned}$$

$$(A_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}^*) = \frac{|\sigma_{\mathcal{L}}|(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}^*)(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})+|\sigma_{\mathcal{K}}|(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu}^*)(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})}{|\sigma_{\mathcal{L}}|(A_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})+|\sigma_{\mathcal{K}}|(A_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\nu})}.$$

Commentaires

- Les applications $\xi \mapsto \delta^{\mathcal{D}}(\xi)$ sont linéaires et leurs matrices sont calculées au tout début de la résolution (elles ne dépendent que du maillage et des $A_{\mathcal{Q}}$).
- On peut, par exemple, appliquer une méthode de pivot de Gauss pour résoudre simultanément tous les petits systèmes indépendants 4×4.
- La matrice globale du schéma m-DDFV est donc symétrique, définie positive, et a exactement le même stencil que celle du schéma DDFV classique. Cette variante est donc totalement indolore du point de vue des coûts de calcul.

Théorème

Le schéma m-DDFV possède une **unique** *solution* $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ *qui dépend continûment des données.*

Théorème

On suppose que $x \mapsto A(x)$ *est régulière par morceaux et que le maillage est compatible avec les discontinuités de* A.
Si u *est régulière sur chaque quart de diamant* $\mathcal{Q}$, *on a*

$$\|u - u^{\mathfrak{M}}\|_{L^2} + \|u - u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^2} + \|\nabla u - \nabla^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq C\, h.$$

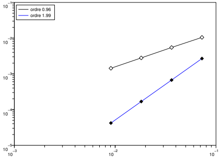
Eléments de preuve

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2} \text{ avec } \Omega_1 =]0, 0.5[\times]0, 1[\text{ et } \Omega_2 =]0.5, 1[\times]0, 1[$$

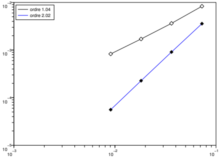
UN EXEMPLE LINÉAIRE :

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f, \ \text{ avec } A(x) = \mathrm{Id} \text{ dans } \Omega_1, \ A(x) = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega_2.$$

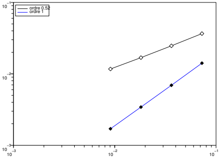
- schéma DDFV : ordre $\frac{1}{2}$
- schéma m-DDFV : ordre 1



L^∞



L^2



H^1

- Schéma DDFV pour

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\varphi(x, \nabla u(x))) = f(x), \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

  - Ω est un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^2$.
  - $u \mapsto -\mathrm{div}(\varphi(\cdot, \nabla u))$ est monotone coercif (de type Leray–Lions).

Exemples

- Contient la loi de Darcy

$$-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f, \quad \text{avec } A \text{ SDP},$$

- Loi de Darcy-Forchheimer

$$-\mathrm{div}\left(\frac{\alpha\nabla u}{1 + \sqrt{1 + \beta|\nabla u|}}\right) = f.$$

- Ecoulements non Newtoniens

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f.$$

Hypothèses sur φ

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\varphi(x, \nabla u(x))) = f(x), \quad \text{dans } \Omega, \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (\star)$$

- Soit $p \in]1, \infty[$, $p' = \frac{p}{p-1}$ et $f \in L^{p'}(\Omega)$. ▶ $p \geq 2$ pour simplifier.
- $\varphi : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une fonction de Caratheodory telle que :

$$(\varphi(x,\xi), \xi) \geq C_\varphi |\xi|^p - \frac{1}{C_\varphi}, \qquad (\mathcal{H}_1)$$

$$|\varphi(x,\xi)| \leq C_\varphi \left(|\xi|^{p-1} + 1\right). \qquad (\mathcal{H}_2)$$

$$\Big(\varphi(x,\xi) - \varphi(x,\eta), \xi - \eta\Big) \geq \frac{1}{C_\varphi} |\xi - \eta|^p. \qquad (\mathcal{H}_3)$$

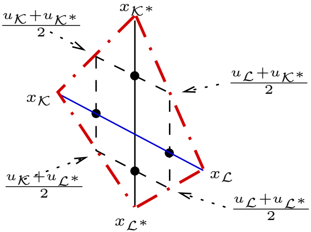
$$|\varphi(x,\xi) - \varphi(x,\eta)| \leq C_\varphi \left(1 + |\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2}\right) |\xi - \eta|. \qquad (\mathcal{H}_4)$$

Théorème

Sous ces hypothèses, le problème $(\star)$ admet une unique solution dans $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}^* \right), \quad \forall \,\text{diamant}\, \mathcal{D}.$$



Remarque

$$|\sigma| = d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*},$$

$$|\sigma^*| = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

Définition équivalente $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2|\mathcal{D}|}\Big(|\sigma|(u_{\mathcal{L}}-u_{\mathcal{K}})\boldsymbol{\nu}+|\sigma^*|(u_{\mathcal{L}^*}-u_{\mathcal{K}^*})\boldsymbol{\nu}^*\Big),$

Autre définition équivalente
$$\begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin\alpha_{\mathcal{D}}}\left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|}\boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|}\boldsymbol{\nu}^*\right), \quad \forall \, \text{diamant } \mathcal{D}.$$

Méthode DDFV

Formulation Volumes Finis :

$$a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \left(\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}}\right) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M},$$

$$a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} - \sum_{\sigma^*\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}} |\sigma^*| \left(\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*}\right) = |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*}, \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*,$$

où

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_{\mathcal{D}} \varphi(x,\xi)\, dx, \quad \text{flux de masse approché sur le diamant}$$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin\alpha_{\mathcal{D}}}\left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|}\boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|}\boldsymbol{\nu}^*\right), \quad \forall \text{ diamant } \mathcal{D}.$$

Méthode DDFV

Formulation Volumes Finis :

$$a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \left(\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}}\right) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M},$$

$$a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} -\sum_{\sigma^*\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}} |\sigma^*| \left(\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*}\right) = |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*}, \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*,$$

Proposition (Intégration par parties discrètes)

Pour tous $u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on a

$$\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*} a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}})v_{\mathcal{K}^*} = 2\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}\right).$$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin\alpha_{\mathcal{D}}}\left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|}\boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|}\boldsymbol{\nu}^*\right), \quad \forall \,\text{diamant}\, \mathcal{D}.$$

Méthode DDFV

Proposition (Intégration par parties discrètes)

Pour tous $u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on a

$$\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*} a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}})v_{\mathcal{K}^*} = 2\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}|\left(\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}}v^{\mathcal{T}}\right).$$

Formulation équivalente (Dualité Discrète) :
On cherche $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que $\forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$,

$$2\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}|\left(\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}}v^{\mathcal{T}}\right) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*}.$$

Plan

Proposition (Intégration par parties discrètes)

Pour tous $u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on a

$$\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*} a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}})v_{\mathcal{K}^*} = 2\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}\right).$$

On veut montrer la bijectivité de l'application

$$a : u^{\mathcal{T}} \mapsto a(u^{\mathcal{T}}) \stackrel{\text{def}}{=} \left((a_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}))_{\mathcal{K}}, (a_{\mathcal{K}^*}(u^{\mathcal{T}}))_{\mathcal{K}^*}\right) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

- **Monotonie :** φ monotone $\Rightarrow$ a est monotone.
- **Surjectivité :** φ coercive $\Rightarrow$ a est coercive car

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{1,p,\mathcal{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}||\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.

- La formule d'intégration par parties discrète avec $v^{\mathcal{T}} = u^{\mathcal{T}}$ donne

$$2\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}), \nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}\right) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} u_{\mathcal{K}^*}.$$

- Mais, par hypothèse sur φ

$$\forall \mathcal{D}\in\mathfrak{D},\quad \left(\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}), \nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}\right) \geq C_1 |\nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}|^p - C_2,$$

- D'où

$$2C_1 \|u^{\mathcal{T}}\|^p_{1,p,\mathcal{T}} \leq 2C_2|\Omega| + \|f\|_{L^{p'}} (\|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^p} + \|u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^p}).$$

Théorème (Inégalité de Poincaré)

Il existe une constante C dépendant de Ω, de p et de $\mathrm{reg}(\mathcal{T})$ telle que

$$\forall u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}},\quad \|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^p} + \|u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^p} \leq C\|u^{\mathcal{T}}\|_{1,p,\mathcal{T}}.$$

Conclusion : La solution vérifie $\|u^{\mathcal{T}}\|_{1,p,\mathcal{T}} \leq C\left(1 + \|f\|^{\frac{1}{p-1}}_{L^{p'}}\right)$.

Théorème

Soit $\mathcal{T}_n$ *une suite de maillages DDFV, telle que* $\mathrm{size}(\mathcal{T}_n) \to 0$ *et* $\mathrm{reg}(\mathcal{T}_n)$ *est bornée.*
Alors, la solution $u^{\mathcal{T}_n}$ *du schéma converge vers la solution exacte de la façon suivante*

$$u^{\mathfrak{M}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^p(\Omega),$$

$$u^{\mathfrak{M}^*_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^p(\Omega),$$

$$\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \nabla u \text{ dans } (L^p(\Omega))^2,$$

$$\sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \varphi_{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(\cdot, \nabla u) \text{ dans } (L^{p'}(\Omega))^2.$$

Outils similaires au cas linéaire + monotonie (astuce de Minty).
Remarque : On a convergence **forte** des gradients et des flux.

ON SUPPOSE QUE φ EST RÉGULIÈRE PAR RAPPORT À x

(Andreianov - B. - Hubert, 07)

THÉORÈME

On suppose que $u \in W^{2,p}(\Omega)$ *et*

$$\varphi \text{ est Lip. sur } \Omega\text{, avec } \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\xi)\right| \leq C_\varphi\left(1+|\xi|^{p-1}\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \; (\mathcal{H}_5)$$

alors il existe $C(\text{reg}(\mathcal{T}))$ *telle que on a*

$$\|u - u^{\mathfrak{M}}\|_{L^p} + \|u - u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^p} + \|\nabla u - \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}\|_{L^p} \leq C \, \text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{p-1}}.$$

Résultat analogue pour $1 < p < 2$.

Plan

Objectifs

- Prendre en compte les discontinuités de coefficients dans le problème sans perdre la précision.
- Possibilité de coupler deux problèmes avec des non-linéarités différentes (Darcy / Darcy–Forcheimer).
- Les discontinuités peuvent avoir lieu à travers
  - Les arêtes primales.
  - Les arêtes duales.
  - Les deux ...
- On veut conserver le même stencil que pour DDFV.

Objectifs

- Prendre en compte les discontinuités de coefficients dans le problème sans perdre la précision.
- Possibilité de coupler deux problèmes avec des non-linéarités différentes (Darcy / Darcy–Forcheimer).
- Les discontinuités peuvent avoir lieu à travers
  - Les arêtes primales.
  - Les arêtes duales.
  - Les deux ...
- On veut conserver le même stencil que pour DDFV.

Principe général

- On s'inspire du travail effectué pour VF4 :
  - On introduit des inconnues artificielles bien choisies sur les arêtes.
  - On demande une forme de conservativité locale des flux.
  - On élimine les inconnues intermédiaires et on obtient des flux numériques qui ne dépendent que des inconnues principales du problème.
- Il faut adapter à la diffusion non-linéaire.
- Il faut bien tenir compte de la géométrie particulière du schéma.

$$\Omega =]-1,1[,\ \varphi(x,\cdot) = \begin{cases} \varphi_-(\cdot), \text{si } x < 0, \\ \varphi_+(\cdot), \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$-\partial_x(\varphi(x,\partial_x u)) = f,\ \text{dans } \Omega \Longleftrightarrow \begin{cases} -\partial_x(\varphi_-(\partial_x u)) = f, & \text{sur }]-1,0[, \\ -\partial_x(\varphi_+(\partial_x u)) = f, & \text{sur }]0,1[, \\ u^+(0) = u^-(0), & \\ \varphi_+(\partial_x u^+(0)) = \varphi_-(\partial_x u^-(0)). & \end{cases}$$

$$\Omega =]-1,1[, \ \varphi(x,\cdot) = \begin{cases} \varphi_-(\cdot), \text{si } x < 0, \\ \varphi_+(\cdot), \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Soit $x_0 = -1 < \ldots < x_N = 0 < \ldots < x_{N+M} = 1$ une subdivision de $[-1,1]$. Le schéma VF en 1D s'écrit pour $i \in \{0, N+M-1\}$:

$$-F_{i+1} + F_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx. \tag{5}$$

avec

$$F_i = \varphi(x_i, \nabla_i u^{\mathcal{T}}), \quad \nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}, \quad \forall i \neq N, \tag{6}$$

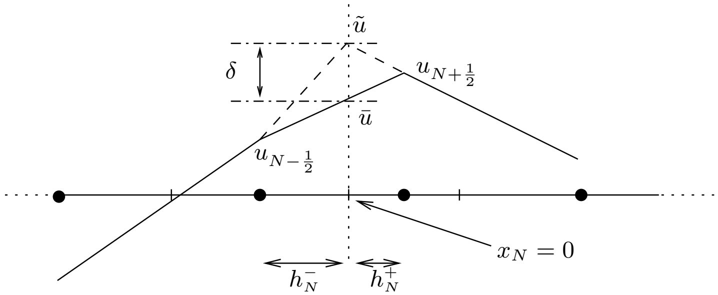
QUESTION : Comment définir le flux F_N ?

On cherche $\tilde{u}$ tel que pour

$$\nabla_N^+ u^{\mathcal{T}} = \frac{u_{N+\frac{1}{2}} - \tilde{u}}{h_N^+}, \quad \nabla_N^- u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{u} - u_{N-\frac{1}{2}}}{h_N^-},$$

on ait

$$\varphi_+(\nabla_N^+ u^{\mathcal{T}}) = \varphi_-(\nabla_N^- u^{\mathcal{T}}).$$

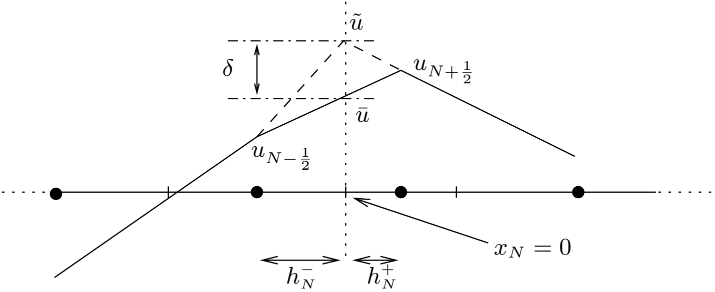


On cherche en fait $\tilde{u}$ sous la forme

$$\tilde{u} = \bar{u} + \delta, \quad \text{avec } \bar{u} = \frac{h_N^- u_{N+\frac{1}{2}} + h_N^+ u_{N-\frac{1}{2}}}{h_N^- + h_N^+}.$$

soit

$$\nabla_N^+ u^{\mathcal{T}} = \nabla_N u^{\mathcal{T}} - \frac{\delta}{h_N^+}, \quad \text{et } \nabla_N^- u^{\mathcal{T}} = \nabla_N u^{\mathcal{T}} + \frac{\delta}{h_N^-}.$$



THÉORÈME (CAS $p \geq 2$)

- *Pour tout $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^N$, il existe un unique δ tel que*

$$F_N \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_-\left(\nabla_N u^{\mathcal{T}} + \frac{\delta}{h_N^-}\right) = \varphi_+\left(\nabla_N u^{\mathcal{T}} - \frac{\delta}{h_N^+}\right),$$

  celui-ci est noté $\delta_N(\nabla_N u^{\mathcal{T}})$.
- *L'application $\nabla_N u^{\mathcal{T}} \mapsto \delta_N(\nabla_N u^{\mathcal{T}})$ est monotone.*
- *Le nouveau schéma VF admet une unique solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.*
- *Le flux F_N est consistant à l'ordre $h^{\frac{1}{p-1}}$.* Preuve

PREUVE DES TROIS PREMIERS POINTS : Monotonite, coercivité, ...

Pour deux flux de type p-laplacien

$$\varphi_-(\xi) = k_-|\xi + G_-|^{p-2}(\xi + G_-),$$
$$\varphi_+(\xi) = k_+|\xi + G_+|^{p-2}(\xi + G_+),$$

où $k_-, k_+ \in \mathbb{R}^+$ et $G_-, G_+ \in \mathbb{R}^2$. Tous calculs faits on trouve

$$F_N = \left(\frac{k_-^{\frac{1}{p-1}} k_+^{\frac{1}{p-1}} (h_N^- + h_N^+)}{h_N^+ k_-^{\frac{1}{p-1}} + h_N^- k_+^{\frac{1}{p-1}}} \right)^{p-1} \left| \nabla_N u^{\mathcal{T}} + \overline{G} \right|^{p-2} \left(\nabla_N u^{\mathcal{T}} + \overline{G} \right),$$

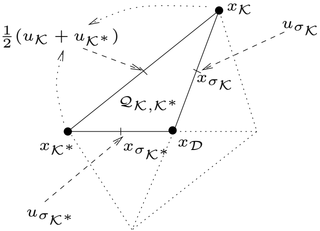
où $\overline{G}$ est la moyenne arithmétique pondérée de G_- et G_+ définie par

$$\overline{G} = \frac{h_N^- G_- + h_N^+ G_+}{h_N^- + h_N^+}.$$

Attention : les calculs ne sont en général pas explicites.

- $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}$ est constant sur chaque quart de diamant

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} 1_{\mathcal{Q}} \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}},$$



$$\nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}} = \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} - \frac{1}{2}(u_{\mathcal{K}} + u_{\mathcal{K}^*})}{|\sigma_{\mathcal{K}}|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u_{\sigma_{\mathcal{K}}} - \frac{1}{2}(u_{\mathcal{K}} + u_{\mathcal{K}^*})}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|} \boldsymbol{\nu}^* \right)$$

$$\rightsquigarrow \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}} = \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}, \ \forall_{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{D}.$$

- $\delta^{\mathcal{D}} = {}^t(\delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{D}}, \delta_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}}, \delta_{\mathcal{K}^*}^{\mathcal{D}}, \delta_{\mathcal{L}^*}^{\mathcal{D}}) \in \mathbb{R}^4$ est à déterminer.
- $B_{\mathcal{Q}}$ est une matrice 2×4 qui ne dépend que de la géométrie.

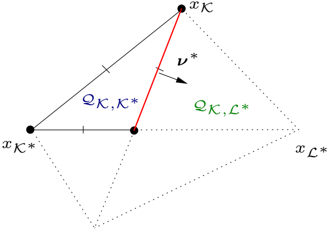
$$B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} = \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{\boldsymbol{\nu}^*}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|}, 0, \frac{\boldsymbol{\nu}}{|\sigma_{\mathcal{K}}|}, 0 \right) = \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}|} \left(|\sigma_{\mathcal{K}}| \boldsymbol{\nu}^*, 0, |\sigma_{\mathcal{K}^*}| \boldsymbol{\nu}, 0 \right).$$

On demande la conservativité des flux numériques

On note

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} \varphi(x,\xi)\,dx.$$

On cherche à déterminer $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$ tel que



$$\left(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) = \left(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right)$$

On demande la conservativité des flux numériques

On note

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} \varphi(x,\xi)\,dx.$$

On cherche à déterminer $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{cases} \Big(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\Big) = \Big(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\Big) \\ \Big(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\Big) = \Big(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\Big) \\ \Big(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\Big) = \Big(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\Big) \\ \Big(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\Big) = \Big(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\Big) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|\,{}^t B_{\mathcal{Q}}.\varphi_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}) = 0.$$

Dans le cas linéaire

$$\underbrace{\left(\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|\,{}^t B_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}} B_{\mathcal{Q}}\right)}_{\text{matrice SDP}} \delta^{\mathcal{D}} = \text{second membre linéaire en } \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}.$$

On demande la conservativité des flux numériques

On note

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi) = \frac{1}{|\mathcal{Q}|}\int_{\mathcal{Q}} \varphi(x,\xi)\,dx.$$

On cherche à déterminer $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{cases}
\left(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) = \left(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) \\
\left(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) = \left(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}^*\right) \\
\left(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) = \left(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) \\
\left(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right) = \left(\varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}\delta^{\mathcal{D}}), \boldsymbol{\nu}\right)
\end{cases}$$

$$\iff \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|\,{}^t B_{\mathcal{Q}}.\varphi_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}) = 0.$$

Proposition (Cas général)

Pour tout $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, et tout diamant $\mathcal{D}$, il existe un **unique** $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4$ *assurant la conservativité des flux.*

Pour tout $\mathcal{D}$, l'application $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \mapsto \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})$ est monotone.

Le schéma m-DDFV

On remplace dans le schéma DDFV, le flux approché

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})\, dx,$$

par

$$\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \varphi_{\mathcal{Q}}(\underbrace{\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})}_{= \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}}),$$

Le schéma m-DDFV

On remplace dans le schéma DDFV, le flux approché

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})\, dx,$$

par

$$\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \varphi_{\mathcal{Q}}\big(\underbrace{\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})}_{= \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}}\big),$$

Formulation en dualité discrète sur les diamants

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \right) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}^*} dx, \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Le schéma m-DDFV

On remplace dans le schéma DDFV, le flux approché

$$\varphi_{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \varphi(x, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})\, dx,$$

par

$$\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \varphi_{\mathcal{Q}}(\underbrace{\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})}_{=\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}}),$$

Formulation en dualité discrète sur les diamants

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(\varphi_{\mathcal{D}}^{\mathcal{N}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \right) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}^*} dx, \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Formulation en dualité discrète sur les quarts de diamant

$$2 \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}| \left(\varphi_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}), \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} v^{\mathcal{T}} \right) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}^*} dx, \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Commentaires

Le schéma obtenu s'écrit

$$\mathcal{F}\left(\left(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})\right)_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}}\right) = \text{termes sources},$$

avec <u>sur chaque diamant</u>

$$\delta^{\mathcal{D}}(\xi) = \mathcal{G}_{\xi}^{-1}(0) \qquad \longleftarrow \text{syst. de 4 éq à 4 inconnues.}$$

Le schéma obtenu s'écrit

$$\mathcal{F}\left(\left(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})\right)_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}}\right) = \text{termes sources},$$

avec sur chaque diamant

$$\delta^{\mathcal{D}}(\xi) = \mathcal{G}_{\xi}^{-1}(0) \qquad \longleftarrow \text{syst. de 4 éq à 4 inconnues.}$$

Cas linéaire

- Les applications $\xi \mapsto \delta^{\mathcal{D}}(\xi)$ sont linéaires et leurs matrices sont calculées au tout début de la résolution (elles ne dépendent que du maillage et de φ). On peut, par exemple, appliquer une méthode de pivot de Gauss pour résoudre simultanément tous les petits systèmes 4×4.
- La matrice globale du schéma m-DDFV est donc : linéaire, symétrique, défini positive, et a exactement le même stencil que celle du schéma DDFV classique. Cette variante est donc totalement indolore du point de vue des coûts de calcul.

Commentaires

Le schéma obtenu s'écrit

$$\mathcal{F}\left(\left(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})\right)_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}}\right) = \text{termes sources},$$

avec sur chaque diamant

$$\delta^{\mathcal{D}}(\xi) = \mathcal{G}_{\xi}^{-1}(0) \qquad \longleftarrow \text{syst. de 4 éq à 4 inconnues.}$$

Cas non-linéaire

- Le calcul exact des applications non-linéaires $\xi \mapsto \delta^{\mathcal{D}}(\xi)$ est impossible en général.
- La résolution du système global par une méthode de Newton est possible mais pas nécessairement aisée (le calcul de la Jacobienne du système n'est pas trivial ...).

Théorème

Le schéma m-DDFV possède une **unique** *solution $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ qui dépend continûment des données.*

Théorème (Cas $p \geq 2$)

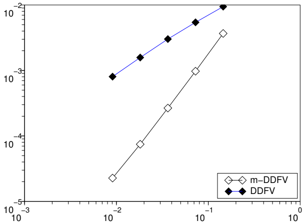
On suppose que φ est régulière par morceaux et que le maillage est compatible avec les discontinuités de φ.
Si u est régulière sur chaque quart de diamant $\mathcal{Q}$, on a

$$\|u - u^{\mathfrak{M}}\|_{L^p} + \|u - u^{\mathfrak{M}^*}\|_{L^p} + \|\nabla u - \nabla^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}\|_{L^p} \leq C\, h^{\frac{1}{p-1}}.$$

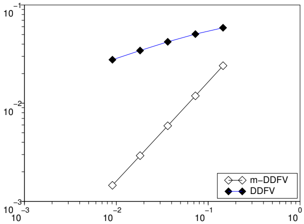
Dans le cas linéaire ($p = 2$) on retrouve la convergence à l'ordre 1 attendue.

$$
\begin{cases}
\text{Pour } x \in \Omega_1, \quad \varphi(x,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi, \\
\text{Pour } x \in \Omega_2, \quad \varphi(x,\xi) = (A\xi,\xi)^{\frac{p-2}{2}} A\xi, \ \text{avec } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.
\end{cases}
$$

On choisit $p = 3.0$



L^∞ - ordres 1.71 et 0.97



$W^{1,p}$ - ordres 1.0 et 0.3

$$\varphi(x,\xi) = |\xi|^{p_i-2}\xi \text{ dans } \Omega_i$$

$$u(x) = \begin{cases} x_1 \left(\left(\lambda^{\frac{p_2-1}{p_1-1}} - 1 \right) (2x_1 - 1) + 1 \right) & \text{pour } x_1 \leq 0.5 \\ (1-x_1)((1+\lambda)(2x_1-1)+1) & \text{pour } x_1 \geq 0.5 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Sauts de gradient importants à l'interface

On prend $p_1 = 2$, $p_2 = 4$

h	DDFV $L^p(\Omega)$	m-DDFV $L^p(\Omega)$	DDFV $W^{1,p}(\Omega)$	m-DDFV $W^{1,p}(\Omega)$
7.25E-02	4.70E-01	3.61E-02	2.5E+01	1.41
3.63E-02	2.36E-01	9.14E-02	2.03E+01	6.62E-01
1.81E-02	1.19E-01	2.24E-03	1.65E+01	3.11E-01
9.07E-03	6.01E-02	4.46E-04	1.34E+01	1.47E-01
ordres	0.98	2.11	0.30	1.08

Plan

Si φ provient d'un potentiel Φ

$$\begin{cases} \varphi(x,\xi) & = & \nabla_\xi \Phi(x,\xi), \quad \text{pour tout } \xi \in \mathbb{R}^2 \ \ \text{p.p. } x \in \Omega, \\ \Phi(x,0) & = & 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \end{cases}$$

Proposition

La solution $u^{\mathcal{T}}$ du schéma m-DDFV est l'unique minimum de

$$J^{\mathcal{T}}(v^{\mathcal{T}}) = 2 \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \Phi_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} v^{\mathcal{T}}) - \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} - \sum_{\mathcal{K}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*}, \ \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$$

avec $\Phi_{\mathcal{Q}}(\cdot) = \dfrac{1}{|\mathcal{Q}|} \displaystyle\int_{\mathcal{Q}} \Phi(x,\cdot)dx.$

Notation : $\Delta = (\mathbb{R}^4)^{\mathfrak{D}}$.

Proposition

Le couple $(u^{\mathcal{T}}, (\delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}))_{\mathcal{D}})$ *est l'unique minimum de la fonctionnelle*

$$J^{\mathcal{T},\Delta}(v^{\mathcal{T}}, \tilde{\delta}) = 2 \sum_{\mathcal{D}\in\mathfrak{D}} \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|\Phi_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\tilde{\delta}^{\mathcal{D}}) - \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} - \sum_{\mathcal{K}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*}, \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}},\ \forall \tilde{\delta} \in \Delta.$$

Principe

Pour un diamant $\mathcal{D}$ fixé, $\delta^{\mathcal{D}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})$ minimise la contribution élémentaire

$$\tilde{\delta}^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^4 \mapsto \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|\Phi_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\tilde{\delta}^{\mathcal{D}}).$$

FONCTIONNELLE NON QUADRATIQUE (voir **(Glowinsky & al.)**)
On se donne une famille $\mathcal{A} = (A_{\mathcal{Q}})_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}}$ de matrices 2×2 SDP

$$L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{T},\Delta}(v^{\mathcal{T}}, \tilde{\delta}, g, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 2 \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}| \Phi_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}}) - \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} - \sum_{\mathcal{K}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*}$$
$$+ 2 \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}| (\lambda_{\mathcal{Q}}, g_{\mathcal{Q}} - \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} - B_{\mathcal{Q}} \tilde{\delta}^{\mathcal{D}})$$
$$+ \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}| \Big(A_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}} - \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} - B_{\mathcal{Q}} \tilde{\delta}^{\mathcal{D}}), (g_{\mathcal{Q}} - \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} - B_{\mathcal{Q}} \tilde{\delta}^{\mathcal{D}}) \Big),$$
$$\forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \forall \tilde{\delta} \in \Delta, \forall g, \lambda \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{Q}}.$$

THÉORÈME

La solution $u^{\mathcal{T}}$ du schéma m-DDFV s'obtient à partir de l'unique point-selle du Lagrangien $L_{\mathcal{A}}^{\mathcal{T},\Delta}$.

- Terme d'augmentation standard : $A_{\mathcal{Q}} = r\mathrm{Id}$.

- *Etape 1 :* Trouver $(u^{\mathcal{T},n}, \delta_{\mathcal{D}}^n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \Delta$ solution de

$$2 \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}| \left(A_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} + B_{\mathcal{Q}} \delta_{\mathcal{D}}^n - g_{\mathcal{Q}}^{n-1}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \right)$$
$$= \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*} + 2 \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}| (\lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}), \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

$$\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| {}^t B_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}} (B_{\mathcal{Q}} \delta_{\mathcal{D}}^n + \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} - g_{\mathcal{Q}}^{n-1}) - \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| {}^t B_{\mathcal{Q}} \lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1} = 0, \ \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}.$$

Le solveur itératif

- *Etape 1 :* Trouver $(u^{\mathcal{T},n}, \delta_{\mathcal{D}}^n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \Delta$ solution de

$$2\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}|\Big(A_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} + B_{\mathcal{Q}}\delta_{\mathcal{D}}^n - g_{\mathcal{Q}}^{n-1}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}\Big)$$
$$= \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*} + 2\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}|(\lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}), \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

$$\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|^t B_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}}(B_{\mathcal{Q}}\delta_{\mathcal{D}}^n + \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} - g_{\mathcal{Q}}^{n-1}) - \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}|^t B_{\mathcal{Q}} \lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1} = 0, \ \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}.$$

- *Etape 2 :* Sur chaque $\mathcal{Q}$, trouver $g_{\mathcal{Q}}^n \in \mathbb{R}^2$ solution de

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}}^n) + \lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1} + A_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}}^n - \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} - B_{\mathcal{Q}}\delta_{\mathcal{D}}^n) = 0.$$

- *Etape 1 :* Trouver $(u^{\mathcal{T},n}, \delta_{\mathcal{D}}^n) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \Delta$ solution de

$$2 \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}| \Big(A_{\mathcal{Q}}(\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} + B_{\mathcal{Q}}\delta_{\mathcal{D}}^n - g_{\mathcal{Q}}^{n-1}), \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \Big)$$
$$= \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^*} |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*} + 2 \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}} |\mathcal{Q}| (\lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}), \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

$$\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| {}^t B_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}} (B_{\mathcal{Q}}\delta_{\mathcal{D}}^n + \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} - g_{\mathcal{Q}}^{n-1}) - \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| {}^t B_{\mathcal{Q}} \lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1} = 0, \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}.$$

- *Etape 2 :* Sur chaque $\mathcal{Q}$, trouver $g_{\mathcal{Q}}^n \in \mathbb{R}^2$ solution de

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}}^n) + \lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1} + A_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}}^n - \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} - B_{\mathcal{Q}}\delta_{\mathcal{D}}^n) = 0.$$

- *Etape 3 :* Sur chaque $\mathcal{Q}$ calculer $\lambda_{\mathcal{Q}}^n \in \mathbb{R}^2$ par

$$\lambda_{\mathcal{Q}}^n = \lambda_{\mathcal{Q}}^{n-1} + A_{\mathcal{Q}}(g_{\mathcal{Q}}^n - \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T},n} - B_{\mathcal{Q}}\delta_{\mathcal{D}}^n).$$

Un solveur itératif

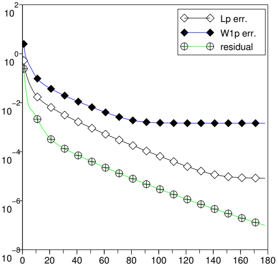
Théorème

Pour toute famille de matrices d'augmentation $\mathcal{A}$, l'algorithme précédent converge vers l'unique solution du schéma m-DDFV.

Bien qu'issu de l'optimisation, le solveur itératif et le théorème sont valables aussi dans le cas **non-potentiel**.

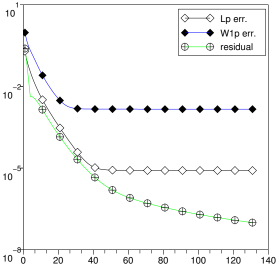
Théorème

Pour toute famille de matrices d'augmentation $\mathcal{A}$, l'algorithme précédent converge vers l'unique solution du schéma m-DDFV.



augmentation isotrope

$A_{\mathcal{Q}} = r\,\mathrm{Id}.$



augmentation anisotrope

$A_{\mathcal{Q}}$ adaptée au problème

Plan

6. Quelques grandes classes de méthodes
   - Présentation générale
   - Schémas MPFA
   - Schémas diamants
   - Schémas VF monotones non-linéaires
   - Schémas DDFV
   - Schémas mimétiques
   - Schémas VF mixtes
   - Schémas SUCCES / SUSHI
7. Comparaisons : Benchmark FVCA 5
   - Présentation
   - Test 1 : Anisotropie modérée
   - Test 3 : Ecoulement oblique
   - Test 4 : Faille verticale
   - Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène
   - Test 8 : Source ponctuelle
   - Bilan

Problèmes linéaires $\quad -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f$

- **Schémas purement cell-centered**
  - MPFA **(Aavatsmark et al. '98 → '08)** **(Edwards et al. '06,'08)**
  - Schémas diamant **(Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)** **(Manzini et al ... '04 → '07)**
  - SUSHI (version barycentrique) = SUCCES **(Eymard-Gallouet-Herbin '08)**

PROBLÈMES LINÉAIRES $-\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f$

- SCHÉMAS PUREMENT CELL-CENTERED
  - MPFA **(Aavatsmark et al. '98 $\rightarrow$ '08)** **(Edwards et al. '06,'08)**
  - Schémas diamant **(Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)** **(Manzini et al ... '04 $\rightarrow$ '07)**
  - SUSHI (version barycentrique) = SUCCES **(Eymard-Gallouet-Herbin '08)**
- SCHÉMAS VF MONOTONES NON-LINÉAIRES
  - Schémas diamant non-linéaire **(Bertolazzo-Manzini '07)**
  - NMFV **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**

Problèmes linéaires $-\text{div}(A(x)\nabla u) = f$

- Schémas purement cell-centered
  - MPFA **(Aavatsmark et al. '98 → '08)** **(Edwards et al. '06,'08)**
  - Schémas diamant **(Coudière-Vila-Villedieu '99, '00)** **(Manzini et al ... '04 → '07)**
  - SUSHI (version barycentrique) = SUCCES **(Eymard-Gallouet-Herbin '08)**
- Schémas VF monotones non-linéaires
  - Schémas diamant non-linéaire **(Bertolazzo-Manzini '07)**
  - NMFV **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**
- Schémas sur maillages primal et dual
  - DDFV **(Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05)** **(Pierre '06) (Andreianov-B.-Hubert '07)**
  - m-DDFV **(Hermeline '03) (B.-Hubert '08)**

Problèmes linéaires $\quad -\mathrm{div}(A(x)\nabla u) = f$

- **Schémas purement cell-centered**
  - MPFA (Aavatsmark et al. '98 → '08) (Edwards et al. '06,'08)
  - Schémas diamant (Coudière-Vila-Villedieu '99, '00) (Manzini et al ... '04 → '07)
  - SUSHI (version barycentrique) = SUCCES (Eymard-Gallouet-Herbin '08)
- **Schémas VF monotones non-linéaires**
  - Schémas diamant non-linéaire (Bertolazzo-Manzini '07)
  - NMFV (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)
- **Schémas sur maillages primal et dual**
  - DDFV (Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05) (Pierre '06) (Andreianov-B.-Hubert '07)
  - m-DDFV (Hermeline '03) (B.-Hubert '08)
- **Schémas mixtes ou hybrides**
  - Schémas mimétiques (Brezzi, Lipnikov et al '05 → '08) (Manzini et al '07-'08)
  - VF mixtes (Droniou-Eymard '06)
  - SUSHI (version hybride) (Eymard-Gallouet-Herbin '08)

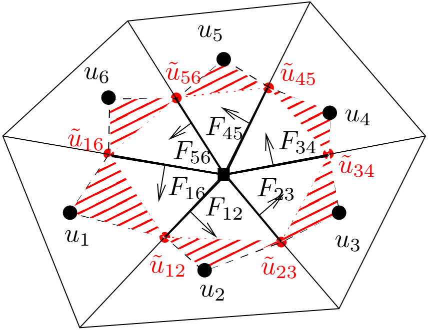
Plan

6. Quelques grandes classes de méthodes
   - Présentation générale
   - Schémas MPFA
   - Schémas diamants
   - Schémas VF monotones non-linéaires
   - Schémas DDFV
   - Schémas mimétiques
   - Schémas VF mixtes
   - Schémas SUCCES / SUSHI

7. Comparaisons : Benchmark FVCA 5
   - Présentation
   - Test 1 : Anisotropie modérée
   - Test 3 : Ecoulement oblique
   - Test 4 : Faille verticale
   - Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène
   - Test 8 : Source ponctuelle
   - Bilan

SCHÉMA O

(Aavatsmark et al. '98 → '08)

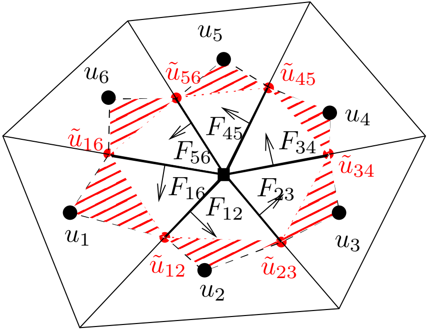


- Inconnues intermédiaires : $\tilde{u}_{ij}$
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^{\perp} + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^{\perp}.$$

Schéma O

(Aavatsmark et al. '98 → '08)



- Inconnues intermédiaires : $\tilde{u}_{ij}$
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

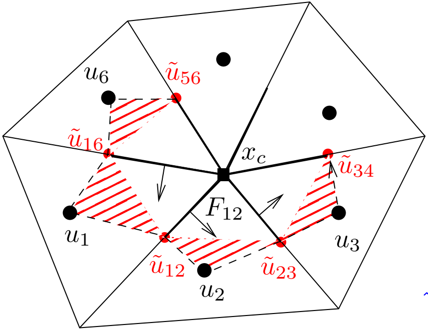
$$\nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^{\perp} + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^{\perp}.$$

- On écrit la continuité des flux

$$F_{i,i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{(A_i \nabla_i u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1} = (A_{i+1} \nabla_{i+1} u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1}}.$$

- Etant donnés les u_i, on calcule les $\tilde{u}_{i,i+1}$ puis les flux $F_{i,i+1}$.

Schéma U : **On veut calculer F_{12}** **(Aavatsmark et al. '98 → '08)**

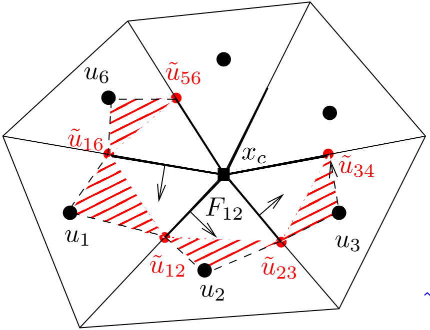


- Inconnues intermédiaires : $\tilde{u}_{ij}$
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^\perp + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^\perp.$$

⇝ Cela définit une fonction affine $U_i(x)$ sur chaque cellule.

Schéma U : **On veut calculer F_{12}** **(Aavatsmark et al. '98 → '08)**



- Inconnues intermédiaires : $\tilde{u}_{ij}$
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^{\perp} + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^{\perp}.$$

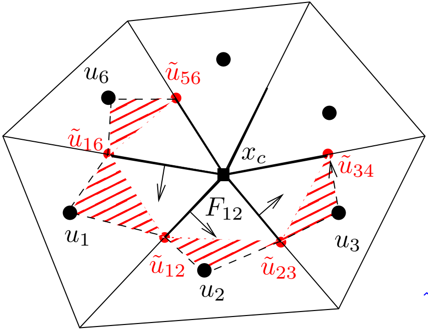
⇝ Cela définit une fonction affine $U_i(x)$ sur chaque cellule.

- On écrit la continuité des flux pour F_{12}, F_{23} et F_{61}

$$F_{i,i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{(A_i \nabla_i u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1} = (A_{i+1} \nabla_{i+1} u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1}}, \quad i \in \{1, 2, 6\}$$

- Il manque deux équations.

Schéma U : On veut calculer F_{12} **(Aavatsmark et al. '98 → '08)**



- Inconnues intermédiaires : $\tilde{u}_{ij}$
- Calcul d'un gradient sur chaque triangle rouge T_i

$$\nabla_i u^{\mathcal{T}} = \frac{\tilde{u}_{i,i+1} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i-1,i} - x_i)^{\perp} + \frac{\tilde{u}_{i-1,i} - u_i}{2|T_i|}(\tilde{x}_{i,i+1} - x_i)^{\perp}.$$

⇝ Cela définit une fonction affine $U_i(x)$ sur chaque cellule.

- On écrit la continuité des flux pour F_{12}, F_{23} et F_{61}

$$F_{i,i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{(A_i \nabla_i u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1} = (A_{i+1}\nabla_{i+1} u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{i,i+1}}, \quad i \in \{1,2,6\}$$

- Il manque deux équations. On écrit :

$$U_2(x_c) = U_3(x_c), \quad \text{et} \quad U_1(x_c) = U_6(x_c).$$

- Etant donnés les u_i, on calcule les $\tilde{u}_{i,i+1}$ puis le flux F_{12}.

Propriétés

- En général :
  - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
  - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans **(Le Potier, '05)**.

Propriétés

- En général :
  - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
  - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans **(Le Potier, '05)**.
- Stencil :
  - La méthode O engendre un stencil trop grand.
  - Pour la méthode U sur des triangles conformes : un flux dépend de 6 inconnues.
  - En général, l'équation sur un volume de controle κ dépend des voisins de κ et des voisins des voisins de κ.

Propriétés

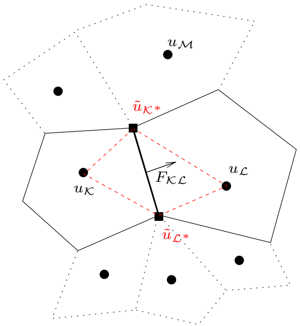
- En général :
  - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
  - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans **(Le Potier, '05)**.
- Stencil :
  - La méthode O engendre un stencil trop grand.
  - Pour la méthode U sur des triangles conformes : un flux dépend de 6 inconnues.
  - En général, l'équation sur un volume de controle κ dépend des voisins de κ et des voisins des voisins de κ.
- Pas de gradient discret complet naturellement à disposition.

PROPRIÉTÉS

- En général :
  - le système linéaire obtenu n'est pas symétrique.
  - coercivité/stabilité en défaut pour de fortes anisotropies et/ou hétérogénéités et/ou distorsions du maillage.
- Version symétrique/stabilisée sur des quad. dans **(Le Potier, '05)**.
- Stencil :
  - La méthode O engendre un stencil trop grand.
  - Pour la méthode U sur des triangles conformes : un flux dépend de 6 inconnues.
  - En général, l'équation sur un volume de controle κ dépend des voisins de κ et des voisins des voisins de κ.
- Pas de gradient discret complet naturellement à disposition.
- Pas de principe du maximum pour les méthodes de base. Variantes pour assurer la monotonie dans certains cas.
- Convergence dans le cas général sous une hypothèse géométrique de coercivité **(Agelas-Masson, '08)**,**(Agelas-DiPietro-Droniou, '10)**

(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.

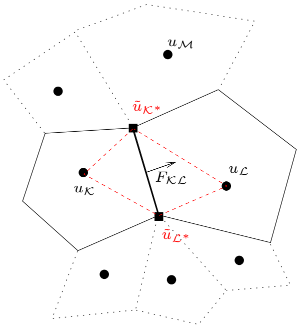


(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.
- Gradient discret sur la cellule diamant $\mathcal{D}$:

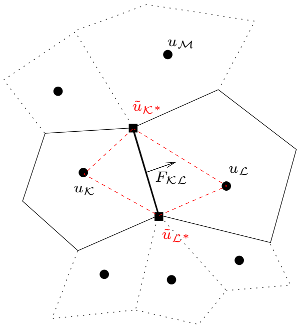
$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}. \end{array} \right.$$



(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.



- Gradient discret sur la cellule diamant $\mathcal{D}$:

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}. \end{array} \right.$$

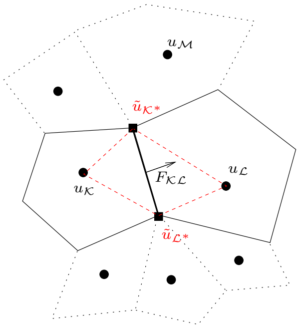
- $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont calculés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}}_{\geq 0} u_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{L}^*}}_{\geq 0} u_{\mathcal{M}},$$

avec $\displaystyle\sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} = 1, \sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{M}} = x_{\mathcal{K}^*}$.

(Coudière-Vila-Villedieu, '99, '00)

- Inconnues intermédiaires aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$, $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$.



- Gradient discret sur la cellule diamant $\mathcal{D}$:

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{KL}} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} + \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \sin \alpha_{\mathcal{D}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$$

- $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont calculés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}}_{\geq 0} u_{\mathcal{M}}, \quad \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{L}^*}}_{\geq 0} u_{\mathcal{M}},$$

avec $\displaystyle\sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} = 1, \sum_{\mathcal{M}} \gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{M}} = x_{\mathcal{K}^*}.$

- Le flux s'écrit alors

$$F_{\mathcal{KL}} = -|\sigma| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}.$$

Propriétés

- Les poids $\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}$ sont calculés par moindres carrés.
- La consistance du schéma au sens des volumes finis est assurée.

Propriétés

- Les poids $\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}$ sont calculés par moindres carrés.
- La consistance du schéma au sens des volumes finis est assurée.

- La coercivité/stabilité n'est pas assurée sauf pour des maillages "proches" de maillages rectangles.
- Si on a coercivité, alors on a les estimations d'erreur en $O(h)$ pour u et ∇u en norme L^2.

Propriétés

- Les poids $\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}$ sont calculés par moindres carrés.
- La consistance du schéma au sens des volumes finis est assurée.

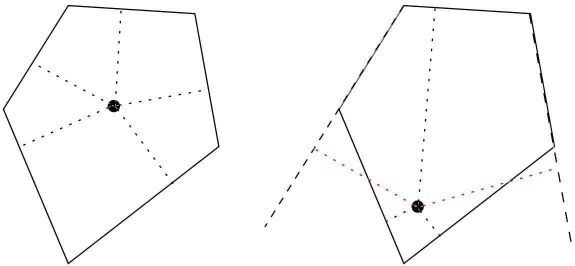
- La coercivité/stabilité n'est pas assurée sauf pour des maillages "proches" de maillages rectangles.
- Si on a coercivité, alors on a les estimations d'erreur en $O(h)$ pour u et ∇u en norme L^2.

- Le schéma peut s'écrire sur des maillages généraux mais n'est analysé que pour des simplexes (2D/3D) et des quadrangles en 2D.
- En général, le schéma **n'est pas symétrique**.

(Manzini et al ... '04 → '07)

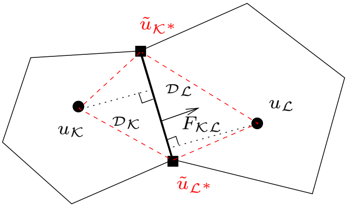
- On suppose que les centres se projettent orthogonalement sur les arêtes.

OK pas OK



- Les auteurs donnent un algorithme qui donnent des poids $\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*}$, tels que

$$\gamma_{\mathcal{M},\mathcal{K}^*} \geq C_0 > 0, \quad \forall_{\mathcal{M}} \text{ contenant } x_{\mathcal{K}^*}.$$

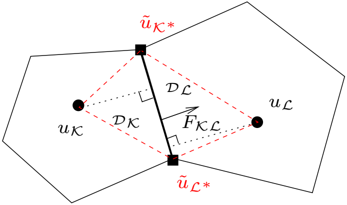


(Manzini et al ... '04 → '07)

Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_\mathcal{K}$ et $\mathcal{D}_\mathcal{L}$ à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_\mathcal{K}} u^\mathcal{T}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_\mathcal{L}} u^\mathcal{T}.$$

(Manzini et al ... ’04 → ’07)



Définition d’un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

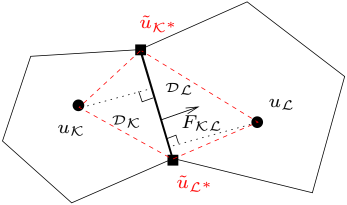
- On regarde alors les deux flux correspondant

$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \underbrace{\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}}}_{>0}(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \sum_{\mathcal{M}\neq\mathcal{L}} \underbrace{\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{M}}}_{\geq 0}(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{M}}),$$

$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \underbrace{\alpha^{\mathcal{L}}_{\mathcal{L}}}_{>0}(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \sum_{\mathcal{M}\neq\mathcal{K}} \underbrace{\alpha^{\mathcal{L}}_{\mathcal{M}}}_{\geq 0}(u_{\mathcal{M}} - u_{\mathcal{L}}).$$

On pose $\alpha = \min(\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{K}}, \alpha^{\mathcal{L}}_{\mathcal{L}}) > 0$.

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ à partir de trois valeurs :

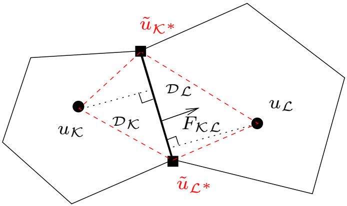
$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

- On regarde alors les deux flux correspondant

$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{\sum_{\mathcal{M}} \underbrace{(\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{M}} - \alpha\delta_{\mathcal{ML}})}_{\geq 0}(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{M}})}_{\stackrel{\text{def}}{=} g_{\mathcal{K}}(u)},$$

$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{\sum_{\mathcal{M}} \underbrace{(\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{M}} - \alpha\delta_{\mathcal{MK}})}_{\geq 0}(u_{\mathcal{M}} - u_{\mathcal{L}})}_{\stackrel{\text{def}}{=} g_{\mathcal{L}}(u)}.$$

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

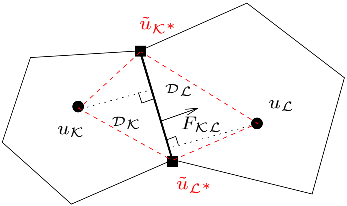
$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}),$$
$$-|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}).$$

- On pose $\omega_{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}) = \dfrac{|g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|}{|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})| + |g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|}$ et on va prendre comme gradient

$$\nabla_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = \omega_{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}})\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}} + (1 - \omega_{\mathcal{D}}(u^{\mathcal{T}}))\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

$$\Rightarrow F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} -|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{\frac{g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})|g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})| + g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})|}{|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})| + |g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|}}_{=\mathbf{T}}.$$

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

$$F_{\mathcal{KL}} = -|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{\frac{g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})|g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})| + g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})|}{|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})| + |g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|}}_{=\mathbf{T}}.$$

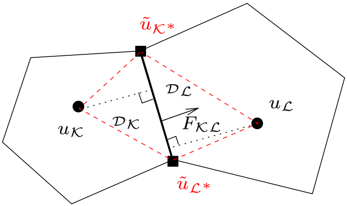
- Si $g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) < 0$:

$$T = 0.$$

- Si $g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) > 0$:

$$T = \frac{2g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})}{g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}) + g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T \text{ est un multiple } \textbf{positif} \text{ de } g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}}) \\ T \text{ est un multiple } \textbf{positif} \text{ de } g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) \end{array} \right.$$

(Manzini et al ... '04 → '07)



Définition d'un gradient sur chaque demi-diamant $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{L}}$ à partir de trois valeurs :

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}}} u^{\mathcal{T}}, \quad \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} u^{\mathcal{T}}.$$

$$F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = -|\sigma|\nabla_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{\frac{g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})|g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})| + g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})|}{|g_{\mathcal{K}}(u^{\mathcal{T}})| + |g_{\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})|}}_{=\mathbf{T}}.$$

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{C_{\mathcal{K}}}_{\geq 0} \sum_{\mathcal{M}} (\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{M}} - \alpha\delta_{\mathcal{M}\mathcal{L}})(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{M}}),$$

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \alpha(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) + \underbrace{C_{\mathcal{L}}}_{\geq 0} \sum_{\mathcal{M}} (\alpha^{\mathcal{K}}_{\mathcal{M}} - \alpha\delta_{\mathcal{M}\mathcal{K}})(u_{\mathcal{M}} - u_{\mathcal{L}}).$$

(Manzini et al ... ’04 → ’07)

Propriétés

- Consistance OK.
- Existence d’au moins une solution du schéma non-linéaire (bien que non régulier !).
- Quasi-unicité : toutes les solutions sont dans des boules de rayon $O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$.
- Résolution par un solveur itératif qui nécessite l’inversion d’une unique matrice (non SDP).

(Manzini et al ... ’04 → ’07)

PROPRIÉTÉS

- Consistance OK.
- Existence d’au moins une solution du schéma non-linéaire (bien que non régulier !).
- Quasi-unicité : toutes les solutions sont dans des boules de rayon $O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$.
- Résolution par un solveur itératif qui nécessite l’inversion d’une unique matrice (non SDP).

- Cette solution vérifie le principe du maximum discret.
- On a pas le principe du max à chaque itération du solveur.

(Manzini et al ... '04 → '07)

Propriétés

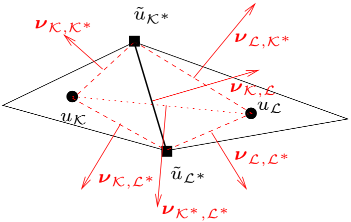
- Consistance OK.
- Existence d'au moins une solution du schéma non-linéaire (bien que non régulier !).
- Quasi-unicité : toutes les solutions sont dans des boules de rayon $O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$.
- Résolution par un solveur itératif qui nécessite l'inversion d'une unique matrice (non SDP).

- Cette solution vérifie le principe du maximum discret.
- On a pas le principe du max à chaque itération du solveur.

- Pas d'analyse de convergence *a priori*.
- Numériquement on obtient de l'ordre 2 en norme L^2.
- Possibilité de rajouter un terme d'advection avec une technique de type "limiteur de pente".

Plan

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**



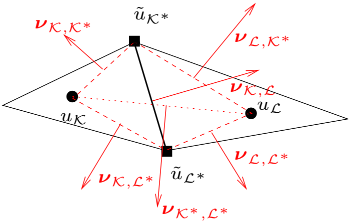
- Maillage de triangles.
- Les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont donnés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{0 \leq \cdot \leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- Propriétés géométriques de base :

$$\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} = 0,$$
$$\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} - \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} = 0,$$
$$\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = 0,$$
$$\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} - \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = 0,$$

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**



- Maillage de triangles.
- Les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont donnés par

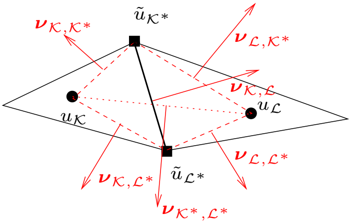
$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{0\leq\cdot\leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- On définit deux gradients discrets

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{K}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\Big),$$

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{L}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\Big).$$

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**



- Maillage de triangles.
- Les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont donnés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{0\leq\cdot\leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- On définit deux gradients discrets

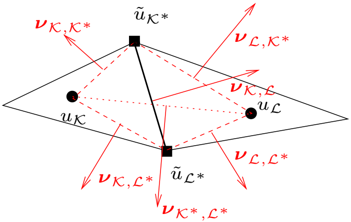
$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{K}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})}\Big),$$

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{L}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})}\Big).$$

- Soit $F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} -\mu|\sigma|(A\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} - (1-\mu)|\sigma|(A\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$
  On cherche **la forme** d'un flux à deux points :

$$\frac{\mu\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{C_{\mathcal{K}^*}} A(\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \frac{(1-\mu)\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}}{C_{\mathcal{L}^*}} A(\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = 0.$$

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**



- Maillage de triangles.
- Les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont donnés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{0\leq\cdot\leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- On définit deux gradients discrets

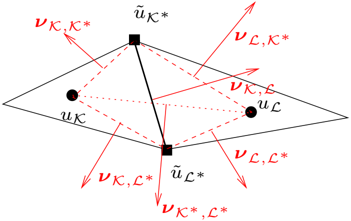
$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{K}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})}\Big),$$

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{L}^*}}\Big(- u_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})}\Big).$$

- Soit $F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} -\mu|\sigma|(A\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} - (1-\mu)|\sigma|(A\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$
  On cherche **la forme** d'un flux à deux points :

$$\left(\frac{\mu\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}}{C_{\mathcal{K}^*}} - \frac{(1-\mu)\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}}{C_{\mathcal{L}^*}}\right) = 0.$$

POUR SIMPLIFIER : $A(x) = A$ **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**



- Maillage de triangles.
- Les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ seront déterminés par la suite.
- Les valeurs aux sommets $\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}$ et $\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}$ sont donnés par

$$\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{M}} \underbrace{\gamma_{\mathcal{M}\mathcal{K}^*}}_{0 \leq \cdot \leq 1} u_{\mathcal{M}}.$$

- On définit deux gradients discrets

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{K}^*}} \Big(- u_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} (\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})} \Big),$$

$$\nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{C_{\mathcal{L}^*}} \Big(- u_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*} + \boxed{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*} (\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*} + \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})} \Big).$$

- Soit $F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} -\mu |\sigma| (A \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} - (1-\mu) |\sigma| (A \nabla_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}^*}} u^{\mathcal{T}}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$
  On cherche **la forme** d'un flux à deux points :

$$\mu(u) = \frac{\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}/C_{\mathcal{L}^*}}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}/C_{\mathcal{K}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}/C_{\mathcal{L}^*}}.$$

BILAN : **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{\mu(u^{\mathcal{T}})}{C_{\mathcal{K}^*}}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \frac{1-\mu(u^{\mathcal{T}})}{C_{\mathcal{L}^*}}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}},$$

$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -\frac{\mu(u^{\mathcal{T}})}{C_{\mathcal{K}^*}}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} - \frac{1-\mu(u^{\mathcal{T}})}{C_{\mathcal{L}^*}}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}},$$

Bilan : **(Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)**

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -\frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

Bilan : (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -\frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*}C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*}C_{\mathcal{K}^*}}.$$

- Il faut maintenant montrer que sous de bonnes hypothèses on a

$$u^{\mathcal{T}} \geq 0 \Longrightarrow \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) \geq 0, \quad \text{et} \quad \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) \geq 0.$$

Bilan : (Le Potier '05) (Lipnikov et al '07)

- Le flux numérique s'écrit comme un flux à deux points non-linéaire

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = \tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{K}} - \tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}})|\sigma|\, u_{\mathcal{L}},$$

avec

$$\tau_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} C_{\mathcal{K}^*}}.$$

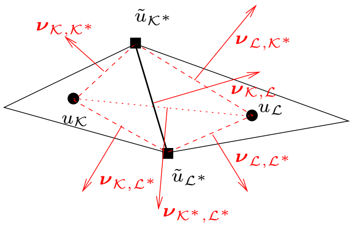
$$\tau_{\mathcal{L},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -\frac{\left(\tilde{u}_{\mathcal{L}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + \tilde{u}_{\mathcal{K}^*}(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}}\right)}{\tilde{u}_{\mathcal{K}^*} C_{\mathcal{L}^*} + \tilde{u}_{\mathcal{L}^*} C_{\mathcal{K}^*}}.$$

- Il faut maintenant montrer que sous de bonnes hypothèses on a

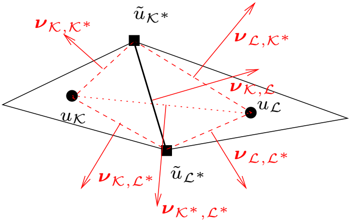
$$(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, \quad (A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0,$$

$$(A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0, \quad (A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0.$$

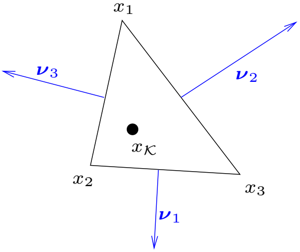
Pour cela, on montre qu'il existe un bon choix des centres $x_{\mathcal{K}}$.



$$\text{On veut}\quad \begin{cases} (A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, & (A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, \\ (A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0, & (A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0. \end{cases}$$



On veut $\begin{cases} (A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, & (A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \geq 0, \\ (A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0, & (A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*})\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} \leq 0. \end{cases}$



Un choix convenable :

$$x_\mathcal{K} = \frac{\|\boldsymbol{\nu}_1\|_A\, x_1 + \|\boldsymbol{\nu}_2\|_A\, x_2 + \|\boldsymbol{\nu}_3\|_A\, x_3}{\|\boldsymbol{\nu}_1\|_A + \|\boldsymbol{\nu}_2\|_A + \|\boldsymbol{\nu}_3\|_A},$$

avec

$$\|\xi\|_A = \sqrt{A\xi\cdot\xi}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Propriétés

- L'existence d'une solution au problème non-linéaire n'est pas prouvée.
- Pas de résultat de convergence.

Propriétés

- L'existence d'une solution au problème non-linéaire n'est pas prouvée.
- Pas de résultat de convergence.

- En pratique, on résout le problème par une méthode itérative qui préserve la positivité au cours des itérations.
- Le système linéaire à résoudre change à chaque itération et n'est pas symétrique.

Propriétés

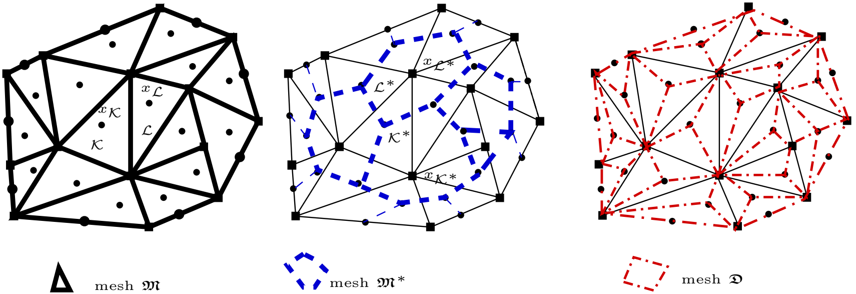
- L'existence d'une solution au problème non-linéaire n'est pas prouvée.
- Pas de résultat de convergence.

- En pratique, on résout le problème par une méthode itérative qui préserve la positivité au cours des itérations.
- Le système linéaire à résoudre change à chaque itération et n'est pas symétrique.

- Le principe du schéma se généralise (difficilement) à des maillages polygonaux seulement dans le cas où
  - $A(x)$ est isotrope.
  - Le maillage est régulier et les volumes de contrôle sont étoilés.

(Hermeline '00) (Domelevo-Omnes '05) (Andreianov-Boyer-Hubert '07)

Maillages



Maillage primal
$\rightsquigarrow (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}}$

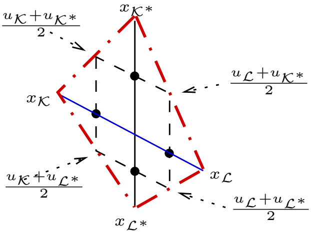
Maillage dual
$\rightsquigarrow (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*\in\mathfrak{M}^*}$

Maillage diamant
$\rightsquigarrow$ gradient discret

Solution approchée : $u^{\mathcal{T}} = \Big((u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}, (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^*}\Big)$

GRADIENT DISCRET

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \right), \quad \forall \,\text{diamant}\, \mathcal{D}.$$



Définition équivalente
$$\begin{cases} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) = u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}, \\ \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathcal{L}^*} - x_{\mathcal{K}^*}) = u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}. \end{cases}$$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \right), \quad \forall \, \text{diamant}\, \mathcal{D}.$$

Méthode DDFV

Formulation Volumes Finis :

$$- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}} \right) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M},$$

$$- \sum_{\sigma^* \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}} |\sigma^*| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*} \right) = |\mathcal{K}^*| f_{\mathcal{K}^*}, \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*,$$

où, par exemple, on prend un tenseur de diffusion approché sur le diamant par

$$A_{\mathcal{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} A(x)\, dx.$$

Gradient discret

$$\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{|\sigma^*|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{|\sigma|} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} \right), \quad \forall \,\text{diamant}\, \mathcal{D}.$$

Méthode DDFV

Formulation équivalente (Dualité Discrète) :

$$2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} |\mathcal{D}| \left(A_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}, \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \right) = \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}} dx + \int_{\Omega} f v^{\mathfrak{M}^*} dx, \quad \forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

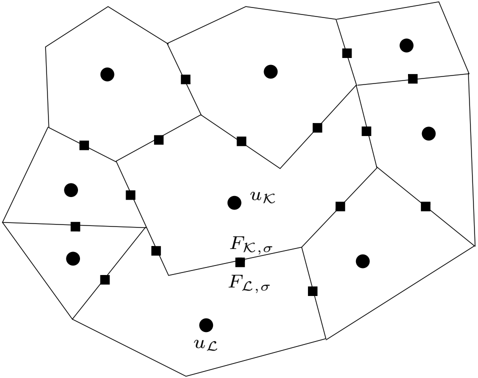
Propriétés

- Nombre d'inconnues = nombre de cellules + nombre de sommets.
- La monotonie et la coercivité de l'opérateur sont préservées.
- Existence et unicitié de la solution approchée.
- Convergence dans le cas général et estimation d'erreur dans le cas régulier en $O(\mathrm{size}(\mathcal{T}))$ pour u et ∇u.
- Prise en compte des coeffs discontinus $\Rightarrow$ m-DDFV.

Plan

6. Quelques grandes classes de méthodes
   - Présentation générale
   - Schémas MPFA
   - Schémas diamants
   - Schémas VF monotones non-linéaires
   - Schémas DDFV
   - Schémas mimétiques
   - Schémas VF mixtes
   - Schémas SUCCES / SUSHI
7. Comparaisons : Benchmark FVCA 5
   - Présentation
   - Test 1 : Anisotropie modérée
   - Test 3 : Ecoulement oblique
   - Test 4 : Faille verticale
   - Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène
   - Test 8 : Source ponctuelle
   - Bilan

(Lipnikov et al '05 → '08) (Manzini '08)



- Une inconnue scalaire $u_\mathcal{K}$ sur chaque volume de contrôle $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

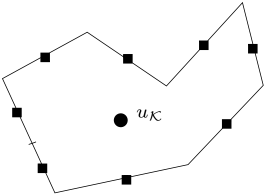
$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- On note $\mathbb{R}^\mathcal{T}$ (resp. $\mathbb{R}^\mathcal{E}$) l'ensemble des inconnues aux centres (resp. aux arêtes).

Schémas mimétiques pour $-\mathrm{div}(A(x)\nabla\cdot)$

Principe : Se baser sur la formule de Green

$$\int_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1}(A_{\mathcal{K}}\nabla u)\cdot\xi\,dx + \int_{\mathcal{K}} u(\mathrm{div}\xi)\,dx = \int_{\partial\mathcal{K}} u(\xi\cdot\boldsymbol{\nu})\,ds.$$



- Si $F\in\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$, on définit la div. discrète

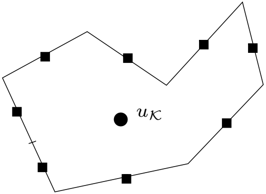
$$\mathrm{div}^{\mathcal{K}} F = \frac{1}{|\mathcal{K}|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{|\sigma|F_{\mathcal{K},\sigma}}_{}$$

chgt de notation

- On se donne un "produit scalaire" $(\cdot,\cdot)_{A^{-1},\mathcal{K}}$ sur l'ens. des ■ qui approche $\int_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1}F\cdot G\,dx$.

Principe : Se baser sur la formule de Green

$$\int_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1}(A_{\mathcal{K}}\nabla u)\cdot\xi\,dx + \int_{\mathcal{K}} u(\mathrm{div}\xi)\,dx = \int_{\partial\mathcal{K}} u(\xi\cdot\boldsymbol{\nu})\,ds.$$



- Si $F\in\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$, on définit la div. discrète

$$\mathrm{div}^{\mathcal{K}} F = \frac{1}{|\mathcal{K}|}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{|\sigma|F_{\mathcal{K},\sigma}}_{\text{chgt de notation}}$$

- On se donne un “produit scalaire” $(\cdot,\cdot)_{A^{-1},\mathcal{K}}$ sur l'ens. des ■ qui approche $\int_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1}F\cdot G\,dx$.

Hypothèses

Coercivité : $\underline{C}|\mathcal{K}|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}}|F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 \leq (F,F)_{A^{-1},\mathcal{K}} \leq \overline{C}|\mathcal{K}|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}}|F_{\mathcal{K},\sigma}|^2,\quad \forall\mathcal{K},$

Consistance : $\big((A_{\mathcal{K}}\nabla\varphi),G\big)_{A^{-1},\mathcal{K}} + \int_{\mathcal{K}}\varphi\,\mathrm{div}^{\mathcal{K}}G\,dx$

$$= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma}\left(\int_\sigma\varphi\right), \forall\mathcal{K}, \forall G\in\mathbb{R}^{\mathcal{E}}, \forall\varphi \text{ affine.}$$

Produits scalaires globaux

$$(F,G)_{A^{-1}} = \sum_{\mathcal{K}} (F,G)_{A^{-1},\mathcal{K}},$$

$$(u,v) = \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| u_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}},$$

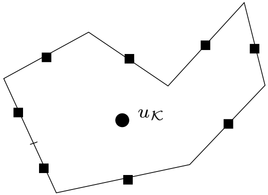
Operateur flux approché : $\Phi : u \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \mapsto \Phi u \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}} \approx (A\nabla u)\cdot \boldsymbol{\nu}$

$$(G,\Phi u)_{A^{-1}} = -(u, \mathrm{div}^{\mathcal{K}} G), \quad \forall u \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}_0, \forall G \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}}.$$

Le schéma s'écrit alors :

$$-\mathrm{div}^{\mathcal{K}}(\Phi u) = f_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K}.$$

Tout se ramène à construire un p.s. $(\cdot,\cdot)_{A^{-1},\mathcal{K}}$ convenable vérifiant les hypothèses de consistance et coercivité



On cherche

$$(F,G)_{A^{-1},\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} {}^t\Big(F_{\mathcal{K},\sigma}\Big)_\sigma M_\mathcal{K} \Big(G_{\mathcal{K},\sigma}\Big)_\sigma,$$

avec $M_\mathcal{K}$ SDP de taille $m\times m$.

Définitions

$$R_\mathcal{K} = \begin{pmatrix} |\sigma_1|^t(x_{\sigma_1}-x_\mathcal{K}) \\ \vdots \\ |\sigma_m|^t(x_{\sigma_m}-x_\mathcal{K}) \end{pmatrix}, \quad N_\mathcal{K} = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{\nu}_{\sigma_1} \\ \vdots \\ {}^t\boldsymbol{\nu}_{\sigma_m} \end{pmatrix} A_\mathcal{K}, \quad \text{de taille } m\times 2,$$

Proposition

La condition de consistance est équivalente à

$$M_\mathcal{K} N_\mathcal{K} = R_\mathcal{K} \Longleftrightarrow M_\mathcal{K} = \frac{1}{|\mathcal{K}|} R_\mathcal{K} A_\mathcal{K}^{-1}\,{}^t R_\mathcal{K} + C_\mathcal{K} U_\mathcal{K}\,{}^t C_\mathcal{K},$$

où $C_\mathcal{K}$ de taille $m\times(m-2)$ est telle que ${}^tC_\mathcal{K} N_\mathcal{K}=0$ et $U_\mathcal{K}$ est une matrice SDP quelconque de taille $m-2$.

Preuve

Propriétés

- Les mailles doivent être étoilées par rapport à leur barycentre.
- Le nombre total d'inconnues est égal au nombre d'éléments + le nombre d'arêtes.
- Le système linéaire à résoudre est de type point-selle.

Propriétés

- Les mailles doivent être étoilées par rapport à leur barycentre.
- Le nombre total d'inconnues est égal au nombre d'éléments + le nombre d'arêtes.
- Le système linéaire à résoudre est de type point-selle.

- On peut voir ces schémas comme une généralisation des éléments finis mixtes associés à des formules de quadrature bien choisies.

PROPRIÉTÉS

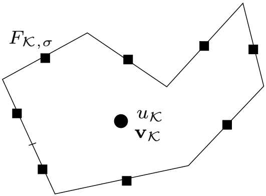
- Les mailles doivent être étoilées par rapport à leur barycentre.
- Le nombre total d'inconnues est égal au nombre d'éléments + le nombre d'arêtes.
- Le système linéaire à résoudre est de type point-selle.

- On peut voir ces schémas comme une généralisation des éléments finis mixtes associés à des formules de quadrature bien choisies.

- Sous de bonnes hypothèses de régularité, on peut montrer la convergence à l'ordre 2 en norme L^2 et à l'ordre 1 en norme H^1.
- Pas encore d'estimations d'erreurs dans le cas de coefficients discontinus.

Plan

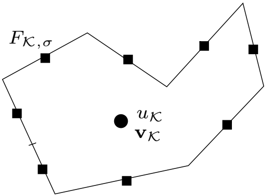
6. Quelques grandes classes de méthodes
   - Présentation générale
   - Schémas MPFA
   - Schémas diamants
   - Schémas VF monotones non-linéaires
   - Schémas DDFV
   - Schémas mimétiques
   - Schémas VF mixtes
   - Schémas SUCCES / SUSHI
7. Comparaisons : Benchmark FVCA 5
   - Présentation
   - Test 1 : Anisotropie modérée
   - Test 3 : Ecoulement oblique
   - Test 4 : Faille verticale
   - Test 5 : Anisotropie tournante hétérogène
   - Test 8 : Source ponctuelle
   - Bilan



(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$



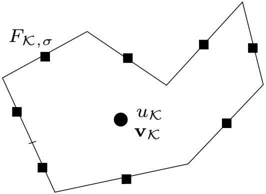
(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

- Une inconnue scalaire $u_\mathcal{K}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_\mathcal{K}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K}) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{L}) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$



(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

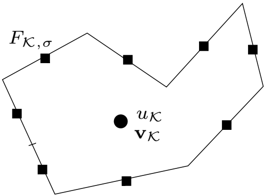
- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- Formule de "géométrie"

$$|\mathcal{K}|\xi = \int_{\mathcal{K}} \underbrace{\operatorname{div}\Big((x - x_{\mathcal{K}}) \otimes \xi\Big)}_{=\xi} \, dx = \int_{\partial\mathcal{K}} (\xi \cdot \boldsymbol{\nu})(x - x_{\mathcal{K}})\, dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)



- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

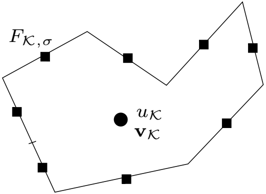
$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- Formule de “géométrie”

$$|\mathcal{K}|\xi = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \left(\xi \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}\right) (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2.$$



(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

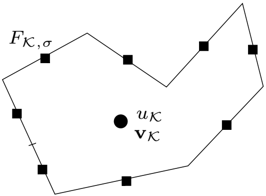
- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- Formule de "géométrie"

$$|\mathcal{K}|A_{\mathcal{K}}\mathbf{v}_{\mathcal{K}} = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(x_\sigma - x_{\mathcal{K}}).$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)



- Une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Une inconnue vectorielle $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sur chaque $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.
- Deux inconnues **scalaires** de flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{L},\sigma}$ sur chaque arête $\sigma \in \mathcal{E}$.
- Elles sont liées par la relation de conservativité

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0.$$

- Continuité de l'approximation au barycentre x_σ de σ :

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- Formule de "géométrie"

$$|\mathcal{K}|A_{\mathcal{K}}\mathbf{v}_{\mathcal{K}} = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(x_\sigma - x_{\mathcal{K}}).$$

- Bilan des flux $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}|f_{\mathcal{K}}$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Propriétés

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.

- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé sans le terme de pénalisation.
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\mathrm{div}(\varphi(x, \nabla u)) = f$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Propriétés

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.
- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé sans le terme de pénalisation.
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\mathrm{div}(\varphi(x, \nabla u)) = f$.
- Résultat de convergence de la solution $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$ et du gradient $\mathbf{v}^{\mathcal{T}} = (\mathbf{v}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$, pour un maillage quelconque et des données peu régulières.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Propriétés

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.
- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé sans le terme de pénalisation.
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\mathrm{div}(\varphi(x, \nabla u)) = f$.
- Résultat de convergence de la solution $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$ et du gradient $\mathbf{v}^{\mathcal{T}} = (\mathbf{v}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$, pour un maillage quelconque et des données peu régulières.
  - Inégalité de Poincaré. ▸ Preuve
  - Estimation *a priori*. ▸ Preuve
  - Compacité.
  - Convergence.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Propriétés

- On a 3 inconnues scalaires par volume de contrôle et deux inconnues scalaires (en réalité une seule) par arête.
- Sur maillage simplicial, le problème est bien posé sans le terme de pénalisation.
- Le schéma s'adapte sans grandes différences au cas non linéaire $-\mathrm{div}(\varphi(x, \nabla u)) = f$.
- Résultat de convergence de la solution $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$ et du gradient $\mathbf{v}^{\mathcal{T}} = (\mathbf{v}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}$, pour un maillage quelconque et des données peu régulières.
- Sous des hypothèses de régularité de la solution et des coefficients du problème :
  - Maillages généraux : Estimation d'erreur théorique en $O(\sqrt{\mathrm{size}(\mathcal{T})})$ pour la solution et son gradient.
  - Maillages simpliciaux : Estimation en $O(\mathrm{size}(\mathcal{T}))$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $$(u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K} (F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}},$$
  où $B_\mathcal{K}$ est S.D.P. et ne dépend que de la géométrie de $\mathcal{K}$ et de $\nu_\mathcal{K}$.

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $$(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

IMPLÉMENTATION

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

HYBRIDATION (CAS LINÉAIRE)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $$(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$
- Elimination de $u_\mathcal{K}$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}| f_\mathcal{K}$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $$(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$
- Elimination de $u_\mathcal{K}$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} c_{\mathcal{K},\sigma} (u_\sigma - u_\mathcal{K}) = |\mathcal{K}| f_\mathcal{K}$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $$(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$
- Elimination de $u_\mathcal{K}$ $$\Rightarrow u_\mathcal{K} = b_\mathcal{K} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} \tilde{c}_{\mathcal{K},\sigma} u_\sigma.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

- D'où $$(F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$
- Elimination de $u_\mathcal{K}$ $$\Rightarrow u_\mathcal{K} = b_\mathcal{K} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} \tilde{c}_{\mathcal{K},\sigma} u_\sigma.$$

$$\Rightarrow (F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = C_\mathcal{K} (u_\sigma - u_{\sigma'})_{\sigma,\sigma' \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} + (G_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$

(Droniou-Eymard '06) (Droniou '07)

Implémentation

- Initialement, le nombre d'inconnues est important.
- Le système linéaire n'a pas de structure simple.

Hybridation (cas linéaire)

But : Ramener le problème à un système SDP plus petit.

- On définit une inconnue scalaire par arête par

$$u_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\mathcal{K} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\mathcal{L} - x_\sigma) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On utilise

$$\mathbf{v}_\mathcal{K} = -\frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma} A_\mathcal{K}^{-1} (x_\sigma - x_\mathcal{K}).$$

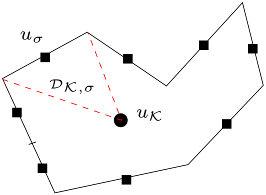
- D'où $\qquad (F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = B_\mathcal{K}^{-1} (u_\sigma - u_\mathcal{K})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$
- Elimination de $u_\mathcal{K}$ $\quad \Rightarrow u_\mathcal{K} = b_\mathcal{K} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} \tilde{c}_{\mathcal{K},\sigma} u_\sigma.$

$$\Rightarrow (F_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} = C_\mathcal{K} (u_\sigma - u_{\sigma'})_{\sigma,\sigma' \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} + (G_{\mathcal{K},\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}}.$$

- $F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0 \Rightarrow$ Une équation par arête liant les $(u_\sigma)_\sigma$.

Plan

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



- Inconnues aux centres $u_\mathcal{K}$ et aux arêtes u_σ.
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

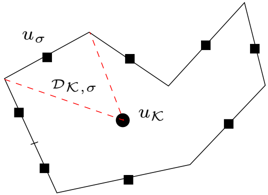
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_{\mathcal{K}} \gamma_\mathcal{K}^\sigma u_\mathcal{K}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule "géométrique" $\Longrightarrow$ définition d'un gradient discret :

$$|\mathcal{K}|\xi = \int_\mathcal{K} \nabla\Big(\xi \cdot (x - x_\mathcal{K})\Big)\,dx = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} \int_\sigma \Big(\xi \cdot (x - x_\mathcal{K})\Big)\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}\,dx$$

$$= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} |\sigma|\Big(\xi \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K})\Big)\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



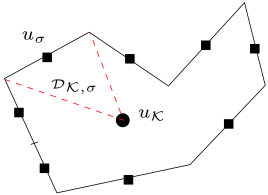
- Inconnues aux centres $u_\mathcal{K}$ et aux arêtes u_σ.
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_\mathcal{K} \gamma_\mathcal{K}^\sigma u_\mathcal{K}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule "géométrique" $\Longrightarrow$ définition d'un gradient discret :

$$|\mathcal{K}|\nabla u \approx \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} |\sigma|(u(x_\sigma) - u(x_\mathcal{K}))\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



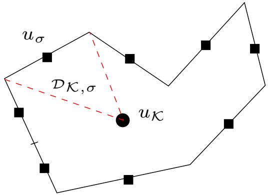
- Inconnues aux centres $u_{\mathcal{K}}$ et aux arêtes u_σ.
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_{\mathcal{K}} \gamma_{\mathcal{K}}^\sigma u_{\mathcal{K}}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule "géométrique" $\Longrightarrow$ définition d'un gradient discret :

$$\nabla_{\mathcal{K}} u^{\mathcal{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| (u_\sigma - u_{\mathcal{K}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



- Inconnues aux centres $u_\mathcal{K}$ et aux arêtes u_σ.
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

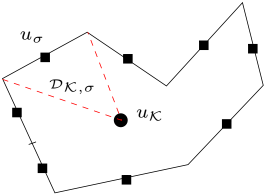
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_\mathcal{K} \gamma_\mathcal{K}^\sigma u_\mathcal{K}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule "géométrique" $\Longrightarrow$ définition d'un gradient discret :

$$\nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} |\sigma|(u_\sigma - u_\mathcal{K})\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- Err. de consistance $R_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = \dfrac{\alpha}{d_{\mathcal{K},\sigma}}\Big(u_\sigma - u_\mathcal{K} - \nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K})\Big)$.

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)



- Inconnues aux centres $u_\mathcal{K}$ et aux arêtes u_σ.
- L'ensemble des arêtes est divisé en deux

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_B \cup \mathcal{E}_H.$$

- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_B$ sont éliminées par une formule barycentrique $u_\sigma = \sum_\mathcal{K} \gamma_\mathcal{K}^\sigma u_\mathcal{K}$.
- Les inconnues u_σ correspondant à $\sigma \in \mathcal{E}_H$ sont libres.
- Formule "géométrique" $\Longrightarrow$ définition d'un gradient discret :

$$\nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} |\sigma| (u_\sigma - u_\mathcal{K}) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- Err. de consistance $R_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = \dfrac{\alpha}{d_{\mathcal{K},\sigma}} \Big(u_\sigma - u_\mathcal{K} - \nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K}) \Big)$.
- Sur chaque triangle $\mathcal{D}_{\mathcal{K},\sigma}$ on définit un gradient stabilisé

$$\nabla_{\mathcal{K},\sigma} u^\mathcal{T} = \nabla_\mathcal{K} u^\mathcal{T} + R_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- Le schéma s'écrit sous forme "variationnelle"

$$\int_\Omega (A(x)\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) \cdot \nabla^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}\, dx = \sum_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| v_{\mathcal{K}} f_{\mathcal{K}}, \quad \forall v^{\mathcal{T}} = ((v_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}}, (v_\sigma)_\sigma).$$

- Le schéma s'écrit sous forme "variationnelle"

$$\int_\Omega (A(x)\nabla^\tau u^\mathcal{T}) \cdot \nabla^\tau v^\mathcal{T}\, dx = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma).$$

- On peut l'écrire sous forme VF

$$\sum_\mathcal{K} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T})(v_\mathcal{K} - v_\sigma) = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma),$$

avec $F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = \sum_{\sigma'\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} \alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}(u_\mathcal{K} - u_{\sigma'})$, $\alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}$ dépend des données.

- Le schéma s'écrit sous forme "variationnelle"

$$\int_\Omega (A(x)\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) \cdot \nabla^\mathcal{T} v^\mathcal{T}\, dx = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma).$$

- On peut l'écrire sous forme VF

$$\sum_\mathcal{K} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T})(v_\mathcal{K} - v_\sigma) = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma),$$

avec $F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} \alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}(u_\mathcal{K} - u_{\sigma'})$, $\alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}$ dépend des données.

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_H$, l'inconnue v_σ est un degré de liberté, donc

$$F_{\mathcal{K},\sigma}(u) + F_{\mathcal{L},\sigma}(u) = 0.$$

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_B$, **ceci est faux**.

- Le schéma s'écrit sous forme "variationnelle"

$$\int_\Omega (A(x)\nabla^\mathcal{T} u^\mathcal{T}) \cdot \nabla^\mathcal{T} v^\mathcal{T}\, dx = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma).$$

- On peut l'écrire sous forme VF

$$\sum_\mathcal{K} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T})(v_\mathcal{K} - v_\sigma) = \sum_\mathcal{K} |\mathcal{K}| v_\mathcal{K} f_\mathcal{K}, \quad \forall v^\mathcal{T} = ((v_\mathcal{K})_\mathcal{K}, (v_\sigma)_\sigma),$$

avec $F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = \sum_{\sigma'\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} \alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}(u_\mathcal{K} - u_{\sigma'})$, $\alpha_\mathcal{K}^{\sigma,\sigma'}$ dépend des données.

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_H$, l'inconnue v_σ est un degré de liberté, donc

$$F_{\mathcal{K},\sigma}(u) + F_{\mathcal{L},\sigma}(u) = 0.$$

- Pour les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_B$, **ceci est faux**.

Choix des arêtes barycentriques/hybrides

- On décide que $\sigma \in \mathcal{E}_B$ si le tenseur A est régulier près de σ.
- On décide que $\sigma \in \mathcal{E}_H$ si A est discontinu à travers σ pour assurer une bonne précision et la conservativité locale.

Propriétés

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)

- Schéma barycentrique/hybride adapté à la géométrie à mi-chemin entre VF et EF mixtes, proche des schémas mimétiques.

Propriétés

(Eymard-Gallouët-Herbin '08)

- Schéma barycentrique/hybride adapté à la géométrie à mi-chemin entre VF et EF mixtes, proche des schémas mimétiques.
- La conservativité locale n'est assurée que sur les arêtes "hybrides".
  - Schéma totalement barycentrique :

    peu d'inconnues / profil large / pas de conservativité locale
  - Schéma totalement hybride :

    beaucoup d'inconnues / profil réduit / conservativité locale
- Dans le cas barycentrique, la notion de "flux local" n'est pas très claire.

Propriétés (Eymard-Gallouët-Herbin '08)

- Schéma barycentrique/hybride adapté à la géométrie à mi-chemin entre VF et EF mixtes, proche des schémas mimétiques.
- La conservativité locale n'est assurée que sur les arêtes "hybrides".
    - Schéma totalement barycentrique :

      peu d'inconnues / profil large / pas de conservativité locale
    - Schéma totalement hybride :

      beaucoup d'inconnues / profil réduit / conservativité locale
- Dans le cas barycentrique, la notion de "flux local" n'est pas très claire.
- Le système linéaire à résoudre est symétrique.
- Existence et unicité de la solution.
- Théorème de convergence dans le cas général.
- Estimation d'erreur en $O(\mathrm{size}(\mathcal{T}))$ pour u et ∇u dans le cas **isotrope régulier**.

(Droniou–Eymard–Gallouët–Herbin '09)

Théorème (énoncé simplifié)

Les trois méthodes suivantes

- *Mimétique*
- *VF mixtes*
- *SUCCES*

sont **algébriquement** *équivalentes (en choisissant convenablement les paramètres).*

Plan

Présentation rapide du benchmark

(Herbin-Hubert, '08)

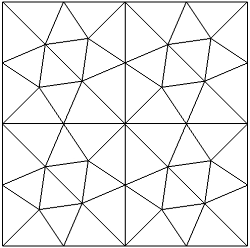
`http://www.latp.univ-mrs.fr/fvca5`
Actes de la conférence édités chez Wiley
Ed. : Robert Eymard et Jean-Marc Hérard

- 19 contributions.
- 9 cas tests.
- Une dizaine de familles de maillages.
- Quelques éléments de comparaison :
  - Nombre d'inconnues / d'éléments non nuls de la matrice.
  - Respect de la conservativité locale.
  - Erreurs L^∞/L^2 sur u et ∇u.
  - Erreur sur l'approximation des flux aux interfaces.
  - Respect de la positivité / Principe du maximum discret.
  - Bilan énergétique discret.

Plan

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega$$

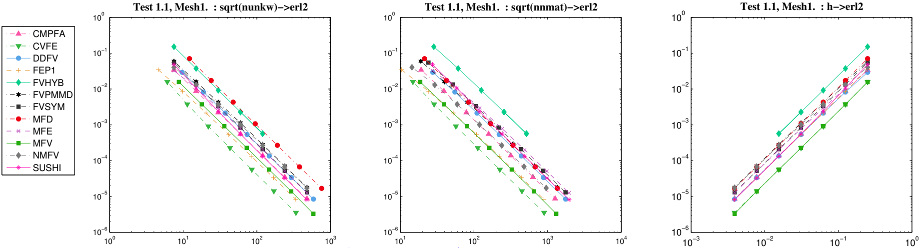
avec $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ et $u(x, y) = 16x(1 - x)y(1 - y)$.



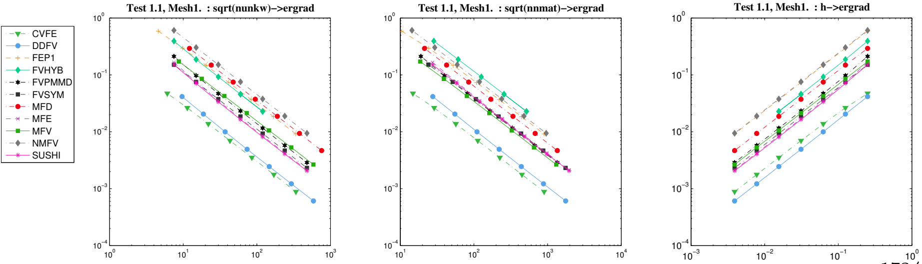
Mesh1

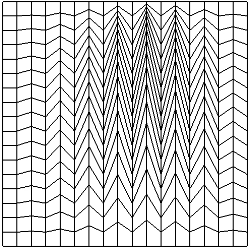
Test 1 : Anisotropie modérée

Erreur L^2 sur la solution (ordre 2)

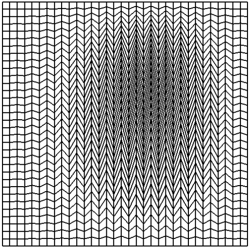


et sur le gradient (ordre 1)





Mesh4_1



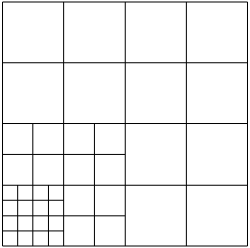
Mesh4_2

Minimum et maximum de la solution approchée

	mesh 4_1		mesh 4_2	
	umin	umax	umin	umax
CMPFA	9.95E-03	1.00E+00	2.73E-03	9.99E-01
CVFE	0.00E+00	8.43E-01	0.00E+00	9.14E-01
DDFV	1.33E-02	9.96E-01	3.63E-03	9.99E-01
FEQ1	0.00E+00	8.61E-01	0.00E+00	9.37E-01
FVHYB	2.14E-03	9.84E-01	7.16E-04	9.93E-01
FVSYM	7.34E-03	9.59E-01	2.33E-03	9.89E-01
MFD	6.64E-03	9.71E-01	1.50E-03	9.93E-01
MFV	1.08E-02	9.42E-01	3.34E-03	9.82E-01
NMFV	1.30E-02	**1.11E+00**	3.61E-03	**1.04E+00**
SUSHI	7.64E-03	8.88E-01	2.33E-03	9.61E-01

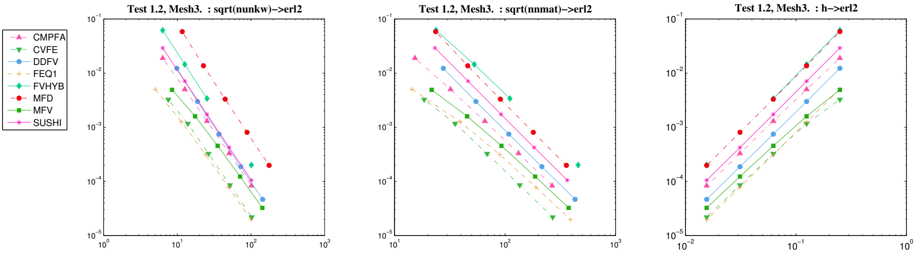
$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega$$

avec $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$ et
$u(x, y) = \sin\left((1-x)(1-y)\right) + (1-x)^3(1-y)^2.$

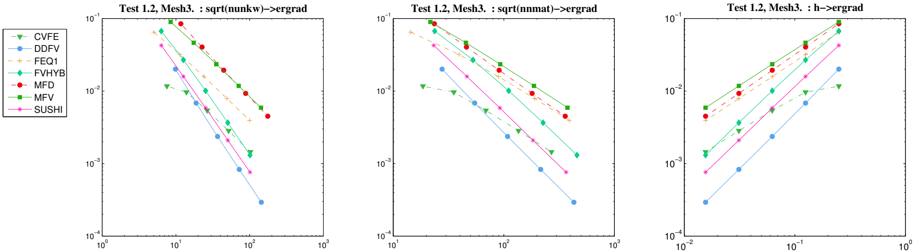


Mesh3

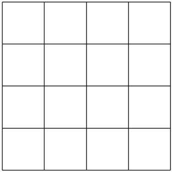
ERREUR L^2 SUR LA SOLUTION (ORDRE 2)



ET SUR LE GRADIENT (ORDRES 0.5 OU 1)



Plan



$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

$$\text{avec } A = R_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-3} \end{pmatrix} R_\theta^{-1},\ \theta = 40°$$

La donnée au bord $\bar{u}$ est continue et linéaire par morceaux sur $\partial\Omega$:

$$\bar{u}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{sur } (0,.2) \times \{0.\} \cup \{0.\} \times (0,.2) \\ 0 & \text{sur } (.8,1.) \times \{1.\} \cup \{1.\} \times (.8,1.) \\ \frac{1}{2} & \text{sur } ((.3,1.) \times \{0\} \cup \{0\} \times (.3,1.) \\ \frac{1}{2} & \text{sur } (0.,.7) \times \{1.\} \cup \{1.\} \times (0.,0.7) \end{cases}$$

Minimum et maximum des solutions approchées

	umin_i	umax_i	i
CMPFA	6.90E-02	9.31E-01	1
	9.83E-04	9.99E-01	7
CVFE	0.00E+00	1.00E+00	1
	0.00E+00	1.00E+00	7
DDFV	**-4.72E-03**	1.00E+00	1
	-5.31E-04	1.00E+00	7
FEQ1	0.00E+00	1.00E+00	1
	0.00E+00	1.00E+00	7
FVHYB	**-1.75E-01**	**1.17E+00**	1
	-1.00E-03	1.00E+00	6
FVSYM	6.85E-02	9.32E-01	1
	4.92E-04	9.99E-01	8
MFD	7.56E-02	9.24E-01	1
	8.01E-04	9.99E-01	8
MFE	3.12E-02	9.69E-01	1
	5.08E-04	9.99E-01	8
MFV	1.22E-02	8.78E-01	1
	7.92E-04	9.99E-01	7
NMFV	1.11e-01	8.88e-01	1
	1.28E-03	9.99E-01	7
SUSHI	6.03E-02	9.40E-01	1
	8.52E-04	9.99E-01	7

Les énergies

	ener1	eren	i
CMPFA	N/A N/A	N/A N/A	
CVFE	2.24E-01 2.42E-01	8.42E-02 3.33E-03	1 7
DDFV	2.14E-01 2.42E-01	9.60E-02 7.11E-06	1 7
FEQ1	2.21E-01 2.44E-01	3.67E-01 3.17E-02	1 7
FVHYB	2.13E-01 2.42E-01	2.55E-01 8.19E-03	1 6
FVSYM	2.20E-01 2.42E-01	0.00E+00 0.00E+00	1 8
MFD	**1.91E-01** 2.42E-01	1.87E-14 3.70E-14	1 8
MFE	**1.25E-01** 2.41E-01	2.46E-02 2.91E-03	1 8
MFV	**4.85E-01** 2.42E-01	8.23E-07 9.74E-06	1 7
NMFV	2.33e-01 2.45E-01	1.45e-01 1.94E-02	1 7
SUSHI	2.25E-01 2.43E-01	3.01E-01 1.28E-02	1 7

Energie de volume

$$\text{ener1} \approx \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx,$$

Energie de bord

$$\text{ener2} \approx \int_{\partial\Omega} A\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} \, dx.$$

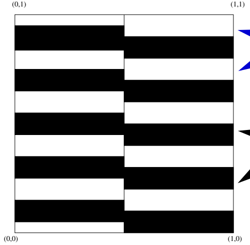
Sur le problème continu :

$$\text{eren1} = \text{eren2}.$$

Erreur sur le bilan d'énergie

$$\text{eren} = \text{ener1} - \text{ener2}.$$

Plan

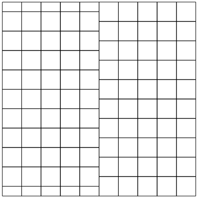


$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = 0 \text{ dans } \Omega$$

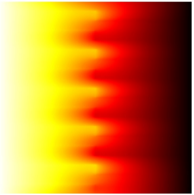
$$u = \bar{u} \text{ sur } \partial\Omega$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^2 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega_1, \\ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10^{-2} \\ 10^{-3} \end{pmatrix} \text{ dans } \Omega_2 \end{cases}$$

et $\bar{u}(x,y) = 1 - x$.



`mesh5`



Principe du maximum

- Vérifié par toutes les méthodes présentées ici.

Valeurs des énergies

	ener1 `mesh5`	eren `mesh5`	ener1 `mesh5_ref`	eren `mesh5_ref`
CVFE	45.9	1.04E-02	**43.3**	6.25E-04
DDFV	**42.1**	3.65E-02	**43.2**	1.27E-03
FVHYB	**41.4**	6.12E-02	/	/
MFD-BLS	33.9	7.93E-14	**43.2**	2.84E-12
MFD	31.4	1.16E-12	**43.2**	4.71E-14
MFV	49.9	4.21E-05	**43.2**	1.88E-05
NMFV	/	/	**43.2**	5.92E-04
SUSHI	39.1	6.67E-02	**43.1**	8.88E-04

Approximation des flux sortant

$$\text{flux en } x = 0 : \int_{\partial\Omega\cap\{x=0\}} A\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu},$$

	flux0 mesh5	flux0 mesh5_ref	flux1 mesh5	flux1 mesh5_ref	fluy0 mesh5	fluy0 mesh5_ref	fluy1 mesh5
CMPFA	-45.2	**-42.1**	46.1	**44.4**	-0.95	**-2.33**	4.84E-04
CVFE	-46.6	**-42.2**	48.5	**44.5**	0.87	-2.25	8.02E-04
DDFV	-40.0	**-42.1**	41.8	**44.4**	-1.81	**-2.33**	9.08E-04
FEQ1	/	**-42.2**	/	**44.5**	/	-2.16	/
FVHYB	-44.3	/	46.3	/	0.49	/	1.55E-04
MFD	-29.7	**-42.1**	34.1	**44.4**	-4.37	**-2.33**	1.01E-03
MFV	-44.0	**-42.1**	50.3	**44.4**	-8.03	**-2.33**	1.72E+00
NMFV	**-43.2**	**-42.1**	**44.5**	**44.4**	-1.23	**-2.33**	2.32E-04
SUSHI	**-40.9**	**-42.1**	**43.1**	**44.4**	**-2.21**	**-2.33**	6.94E-04

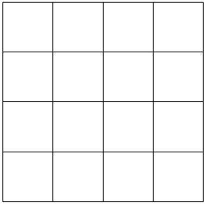
Plan

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \text{ dans } \Omega$$

avec

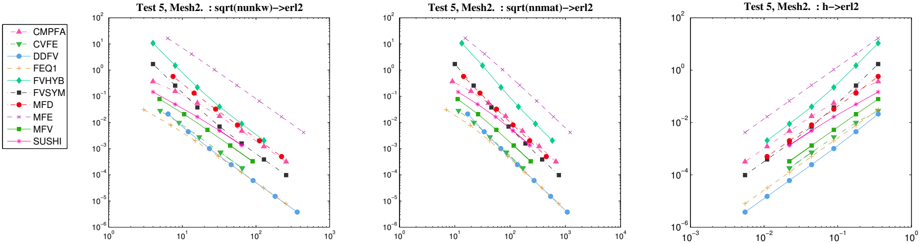
$$A = \frac{1}{(x^2+y^2)} \begin{pmatrix} 10^{-3}x^2 + y^2 & (10^{-3}-1)xy \\ (10^{-3}-1)xy & x^2 + 10^{-3}y^2 \end{pmatrix}$$

et $u(x,y) = \sin \pi x \sin \pi y$.

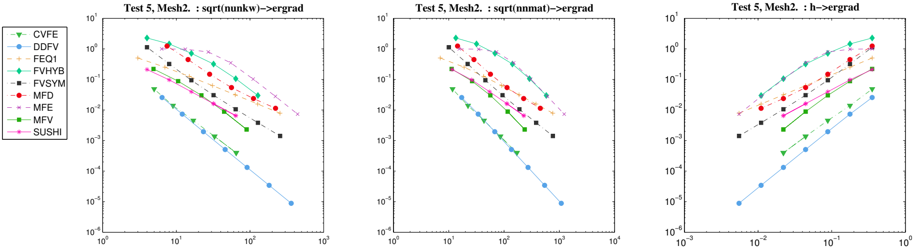


mesh2

Erreur en norme L^2 sur la solution (ordre 2)



et sur son gradient (ordres compris entre 1 et 2)



Certains schémas ne vérifient pas le principe du maximum

	umin	umax
CMPFA	**-1.06E-01**	**1.09E+00**
FEQ1	0.00E+00	**1.05E+00**
FVHYB	**-1.92E+01**	**5.38E+00**
FVSYM	**-8.67E-01**	**2.57E+00**
MFE	**-1.62E+00**	**1.90E+01**

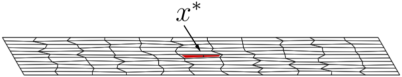
$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega$$

Conditions de Dirichlet homogènes

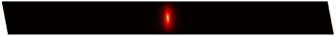
Terme source "mesure" : $f = 0$ sauf dans la cellule C^*

- $C^* = \text{cell}(6,6)$
- $\int_{\text{cell}(6,6)} f(x)\,dx = 1.$

- $C^* = x^*$
- $f = \delta_{x^*}.$



Le maillage quadrangle utilisé `mesh9`



Solution de référence sur une grille fine régulière

Valeurs extrêmes des solutions approchées

	umin	umax
Fine grid	**1.07E-24**	**4.10E-01**
CMPFA	-2.31E-02	1.03E-01
CVFE	-1.23E-03	4.24E-02
DDFV	-1.25E-03	8.22E-02
FEQ1	-4.17E-03	4.90E-02
FVHYB	-3.38E-02	1.12E-01

	umin	umax
FVSYM	-7.21E-02	1.52E-01
FVPMMD	**1.22E-09**	**3.99E-01**
MFD	**-1.03E-01**	1.85E-01
MFV	-8.08E-03	5.81E-02
NMFV	**3.05E-15**	9.42E-02
SUSHI	-1.19E-03	5.65E-02
SUSHI-P	**3.26E-06**	**6.77E-03**

Flux de masse sur les quatre côtés du domaine

	flux0	flux1	fluy0	fluy1
Fine grid	**5.46E-21**	**5.46E-21**	**5.00E-01**	**5.00E-01**
CVFE	-1.17E-05	2.63E-05	2.87E-01	5.54E-01
DDFV	**-5.814E-10**	**-3.35E-10**	**4.97E-01**	**5.02E-01**
FEQ1	5.51E-06	7.15E-05	5.46E-01	4.89E-01
FVSYM	1.37E-04	-1.15E-04	**4.96E-01**	**5.04E-01**
FVPMMD	1.76E-06	3.5E-06	4.55E-01	5.44E-01
MFD	-5.14E-04	-3.13E-03	**5.01E-01**	**5.03E-01**
MFV	-2.30E-02	4.95E-02	2.74E-01	6.99E-01
NMFV	**0.00E+00**	**0.00E+00**	**4.99E-01**	**5.01E-01**
SUSHI	7.35E-04	1.29E-04	**4.99E-01**	**5.00E-01**
SUSHI-P	-4.21E-02	-3.29E-02	5.38E-01	5.37E-01

Plan

Y-a-t'il une conclusion ?

Comment choisir un schéma ?

- Ai-je besoin d'utiliser un maillage vraiment général (non conforme, déformé, ...) ?
- Ai-je besoin d'assurer la positivité/monotonie ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise du gradient/des flux ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise des énergies ?

Y-a-t'il une conclusion ?

Comment choisir un schéma ?

- Ai-je besoin d'utiliser un maillage vraiment général (non conforme, déformé, ...) ?
- Ai-je besoin d'assurer la positivité/monotonie ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise du gradient/des flux ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise des énergies ?

- Avec quelles autres équations dois-je envisager un couplage ? Avec un code déjà existant ?
- Si oui, quelle est la structure de données dont je dispose dans mon code ?

Y-a-t'il une conclusion ?

Comment choisir un schéma ?

- Ai-je besoin d'utiliser un maillage vraiment général (non conforme, déformé, ...) ?
- Ai-je besoin d'assurer la positivité/monotonie ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise du gradient/des flux ?
- Ai-je besoin d'une approximation précise des énergies ?

- Avec quelles autres équations dois-je envisager un couplage ? Avec un code déjà existant ?
- Si oui, quelle est la structure de données dont je dispose dans mon code ?

- Ai-je besoin d'être rassuré par des théorèmes ?

Plan

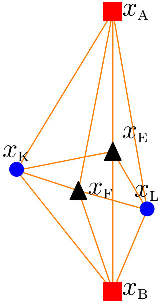
8 Schémas DDFV en 3D

- Reconstruction de gradient en 3D
- L'approche de Coudière-Pierre et Andreianov & al.
- Le schéma de Hermeline
- L'approche Coudière-Hubert
- Implémentation
- Résultats théoriques
- Résultats numériques

En 3D, on considère 6 points de $\mathbb{R}^3$ qui définissent 3 directions indépendantes.

On définit $\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^3$ par les formules

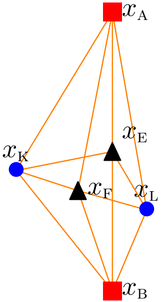
$$\begin{aligned}
\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{K}}) &= u_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{K}} \\
\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}) &= u_{\mathrm{A}} - u_{\mathrm{B}} \\
\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}) &= u_{\mathrm{F}} - u_{\mathrm{E}}
\end{aligned}$$



On appelle **cellule diamant** le polyhèdre dont les faces sont les triangles $(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{F}})$, $(x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{F}})$, $(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{F}})$, $(x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{F}})$, $(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{E}})$, $(x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{E}})$, $(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{E}})$, $(x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{E}})$.

Le vecteur $\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}$ de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant

$$\begin{array}{rcl} \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{K}}) & = & u_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{K}} \\ \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}) & = & u_{\mathrm{A}} - u_{\mathrm{B}} \\ \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}) & = & u_{\mathrm{F}} - u_{\mathrm{E}} \end{array}$$



est donné par

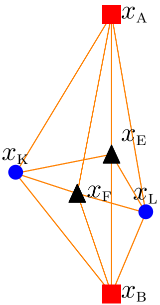
$$\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{3|\mathrm{D}|}\Big((u_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{K}})N_{\mathrm{KL}} + (u_{\mathrm{B}} - u_{\mathrm{A}})N_{\mathrm{AB}} + (u_{\mathrm{F}} - u_{\mathrm{E}})N_{\mathrm{EF}}\Big)$$

avec

$$N_{\mathrm{KL}} = \frac{1}{2}(x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}}) \wedge (x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}),$$

$$N_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}(x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}) \wedge (x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{K}}),$$

$$N_{\mathrm{EF}} = \frac{1}{2}(x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{K}}) \wedge (x_{\mathrm{A}} - x_{\mathrm{B}})$$



Le vecteur $\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}$ de $\mathbb{R}^3$ satisfaisant

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_L - x_K) &= u_L - u_K \\ \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_A - x_B) &= u_A - u_B \\ \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \cdot (x_F - x_E) &= u_F - u_E \end{aligned}$$

est donné par

$$\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{3|D|}\Big((u_L - u_K)N_{KL} + (u_B - u_A)N_{AB} + (u_F - u_E)N_{EF}\Big)$$

Choix des points

- On prend naturellement
  - x_K,x_L centres de deux cellules primales voisines
  - x_A, x_B deux sommets communs à K et L
- On a par contre plusieurs possibilités pour les points x_F et x_E.

- Inconnues aux centres et aux sommets des cellules
  (Coudière-Pierre 07')

  (Andreianov and *al* 08')

  $\Rightarrow x_{\mathrm{F}}, x_{\mathrm{E}}$ sont aussi des sommets des cellules primales
  $\rightsquigarrow$ Ne fonctionne que pour les maillages conformes

- Inconnues aux centres des cellules, aux sommets et aux centres des faces

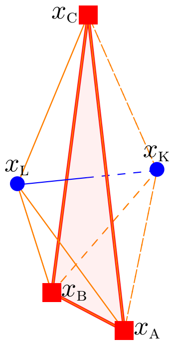
  (Hermeline 07')

  $\Rightarrow x_{\mathrm{F}}$ est le centre de la face entre K et L, x_{E} est le centre de l'arête $x_{\mathrm{A}}x_{\mathrm{B}} \subset \partial x_{\mathrm{F}}$.
  $\rightsquigarrow$ Le système linéaire obtenu n'est pas symétrique en général.

- Inconnues aux centres, aux sommets, aux centres des faces et aux centres des arêtes. **(Coudière-H. 09')**
  $\Rightarrow x_{\mathrm{F}}$ est le centre de la face entre K et L, x_{E} est le centre de l'arête $x_{\mathrm{A}}x_{\mathrm{B}} \subset \partial x_{\mathrm{F}}$.
  $\rightsquigarrow$ Aucune restriction sur le maillage, prise en compte de discontinuité dans la perméabilité.

Si toutes les faces sont des triangles

- On prend pour x_{F} et x_{E} un autre couple de sommets de la face. Ainsi si $\mathrm{F} = (x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}\mathrm{C})$, on prend par exemple $x_{\mathrm{F}} = x_{\mathrm{A}}$ et $x_{\mathrm{E}} = \mathrm{C}$.
- Les diamants sont la réunion de deux pyramides de base F et de sommets x_{K} et x_{L}.



- Le gradient discret d'écrit

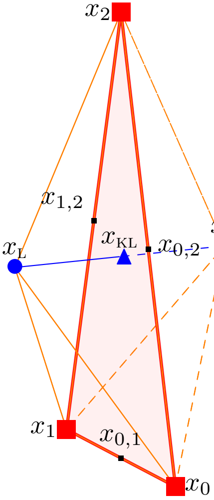
$$3|\mathrm{D}|\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{K}})N_{\mathrm{KL}} + (u_{\mathrm{B}} - u_{\mathrm{A}})N_{\mathrm{AB}} + (u_{\mathrm{A}} - u_{\mathrm{C}})N_{\mathrm{CA}}$$

Cas général

- On numérote les sommets de la face F : $(x_i)_i$.
- Si on suppose une condition d'orthogonalité $(x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{K}}) \perp$ F, le gradient s'écrit

$$\begin{aligned}\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} &= \frac{u_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{K}}}{|x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{K}}|} n_{\mathrm{KL}} \\ &\quad + \sum_i \alpha_{i,i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{|x_{i+1} - x_i|} (x_{i,i+1} - x_{\mathrm{KL}})^{\perp}\end{aligned}$$

pour un bon choix des coefficients $\alpha_{i,i+1}$.



- On a des inconnues aux centres et aux sommets su maillage primal.
- A chaque sommet x_{A}, on associe un volume de contrôle A, appelé cellule duale ou cellule nodale.
- On écrit un bilan de flux discret à la fois sur les cellules primales et sur les cellules duales :

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathrm{K}} \varphi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= f_{\mathrm{K}} \\ -\operatorname{div}_{\mathrm{A}} \varphi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= f_{\mathrm{A}} \\ +BC & \end{aligned}$$

Il faut préciser la définition de la maille duale $\mathrm{A} \in \mathcal{N}$.

DEUX POSSIBILITÉS :

Coudière-Pierre

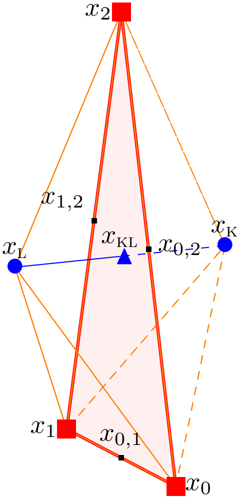
- Les faces de la maille duale P_i qui se trouvent dans le diamant D sont :

$$(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i-1}), (x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i+1}),$$
$$(x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i-1}), (x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i+1})$$

Andreianov & al.

- Les faces de la maille duale P_i qui se trouvent dans le diamant D sont :

$$(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i-1,i}), (x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i,i+1}),$$
$$(x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i,i-1}), (x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i,i+1})$$



Deux possibilités :

Coudière-Pierre

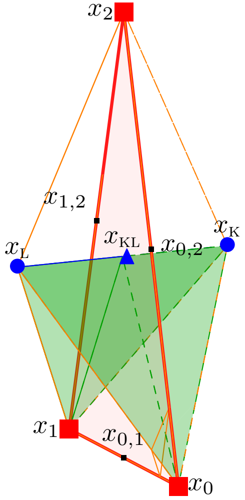
- Les faces de la maille duale P_i qui se trouvent dans le diamant D sont :

$$(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i-1}), (x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i+1}),$$
$$(x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i-1}), (x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i+1})$$

Andreianov & al.

- Les faces de la maille duale P_i qui se trouvent dans le diamant D sont :

$$(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i-1,i}), (x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i,i+1}),$$
$$(x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i,i-1}), (x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i,i+1})$$



Deux possibilités :

Coudière-Pierre

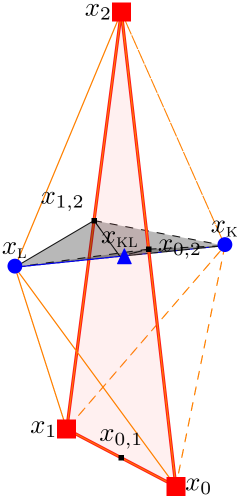
- Les faces de la maille duale P_i qui se trouvent dans le diamant D sont :

$$(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i-1}), (x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i+1}),$$
$$(x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i-1}), (x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i+1})$$

Andreianov & al.

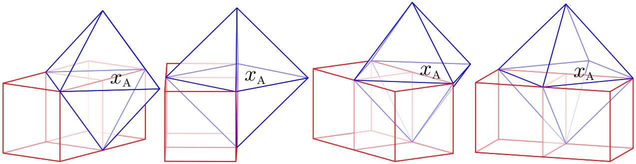
- Les faces de la maille duale P_i qui se trouvent dans le diamant D sont :

$$(x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i-1,i}), (x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i,i+1}),$$
$$(x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i,i-1}), (x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{KL}}, x_{i,i+1})$$

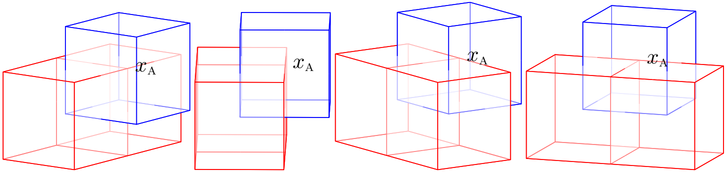


Exemples de mailles duales pour un maillage primal cubique

Coudière, Pierre



Andreianov & al.



Le propriété de dualité discrète s'écrit

$$-[\![\mathrm{div}^{\mathcal{T}}\, \xi^{\mathcal{D}}, u^{\mathcal{T}}]\!] = ((\xi^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})) = \sum_{\mathrm{D}} |\mathrm{D}| \xi^{\mathrm{D}} \nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$$

avec **ATTENTION**

Coudière-Pierre

$$[\![u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}]\!] = \frac{1}{3}\left(\sum_{\mathrm{K}\in\mathcal{M}} |\mathrm{K}| u_{\mathrm{K}} v_{\mathrm{K}} + \sum_{\mathrm{A}\in\mathcal{N}} |\mathrm{A}| u_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} \right)$$

Andreianov & al.

$$[\![u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}]\!] = \frac{1}{3}\left(\sum_{\mathrm{K}\in\mathcal{M}} |\mathrm{K}| u_{\mathrm{K}} v_{\mathrm{K}} + 2 \sum_{\mathrm{A}\in\mathcal{N}} |\mathrm{A}| u_{\mathrm{A}} v_{\mathrm{A}} \right)$$

$\Rightarrow$ **Bilan :** Le domaine est recouvert 3 fois !

Avantages

- Monotonie et coercivité sont préservées.
- Existence et unicité de la solution prouvées.
- Consistence des opérateurs discrets.
- Preuve de convergence, y compris dans le cadre non linéaire.

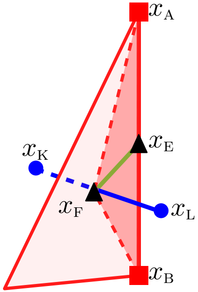
Inconvénients

- Restreint aux maillages conformes

8 Schémas DDFV en 3D

- Reconstruction de gradient en 3D
- L'approche de Coudière-Pierre et Andreianov & al.
- Le schéma de Hermeline
- L'approche Coudière-Hubert
- Implémentation
- Résultats théoriques
- Résultats numériques

- Pour chaque face $\mathrm{F} = \partial\mathrm{K} \cap \partial\mathrm{L}$, et chaque arête $\mathrm{E} \subset \partial x_{\mathrm{F}}$, qui connecte les sommets $x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}} \in \partial e$.

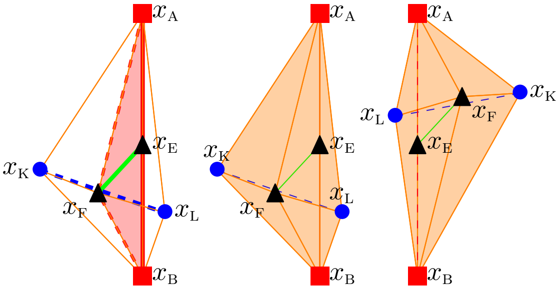


On a trois directions non coplainaire naturelles :

- La direction $x_{\mathrm{K}}x_{\mathrm{L}}$
- La direction $x_{\mathrm{A}}x_{\mathrm{B}}$
- La direction $x_{\mathrm{F}}x_{\mathrm{E}}$

- Pour chaque face $\text{F} = \partial\text{K} \cap \partial\text{L}$, et chaque arête $\text{E} \subset \partial x_{\text{F}}$, qui connecte les sommets $x_{\text{A}}, x_{\text{B}} \in \partial e$.

$\Rightarrow$ D'où la cellule diamant :



et le gradient discret

$$\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{3|\text{D}|} \left((u_{\text{L}} - u_{\text{K}}) N_{\text{KL}} + (u_{\text{A}} - u_{\text{B}}) N_{\text{AB}} + (u_{\text{F}} - u_{\text{E}}) N_{\text{FE}} \right)$$

Le schéma

- Les inconnues au centre des arêtes sont déterminées par

$$u_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}(u_{\mathrm{A}} + u_{\mathrm{B}})$$

- Les inconnues au centre des faces u_{F} sont aussi éliminées par interpolation barycentrique à partir des valeurs aux sommets de la face :

$$u_{\mathrm{F}} = \sum_{\mathrm{A}_i} \alpha_i u_{\mathrm{A}_i}$$

- On a donc, *in fine*, seulement des inconnues principales du schéma aux centres des volumes primal et aux sommets.
- Il faut préciser la définition de la maille duale associée.
- Ensuite, il suffit d'écrire le bilan de flux sur les mailles primales et les mailles duales :

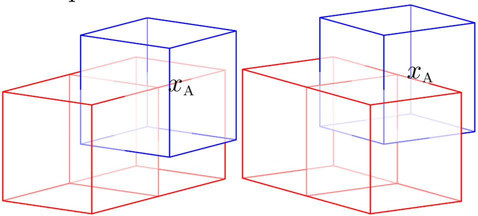
$$\begin{aligned} -\operatorname{div}_{\mathrm{K}} \varphi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= f_{\mathrm{K}} \\ -\operatorname{div}_{\mathrm{A}} \varphi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= f_{\mathrm{A}} \\ &+BC \end{aligned}$$

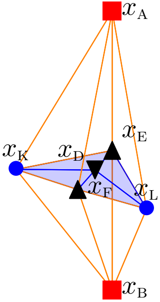
Même définition que celle de **Andreianov & al.**

- Les faces de la cellule duale associée à x_A qui sont dans D sont :

$$(x_D, x_K, x_F), (x_D, x_K, x_E),$$
$$(x_D, x_L, x_F), (x_D, x_L, x_E)$$

- Exemple de maille duale





Propriétés

Avantages

- Adapté à des maillages généraux, y compris non conformes.
- Prise en compte naturelle des sauts de perméabilité

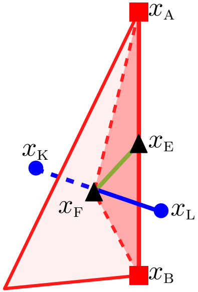
Inconvénients

- Le système linéaire obtenu est en général non symétrique, y compris pour le Laplacien !
- Pas de formulation en dualité discrète.

$\Rightarrow$ Peu de résultats théoriques.

8 SCHÉMAS DDFV EN 3D

- Pour chaque face $\text{F} = \partial\text{K} \cap \partial\text{L}$, chaque arête $\text{E} \subset \partial x_{\text{F}}$, qui connecte les sommets $x_{\text{A}}, x_{\text{B}} \in \partial e$

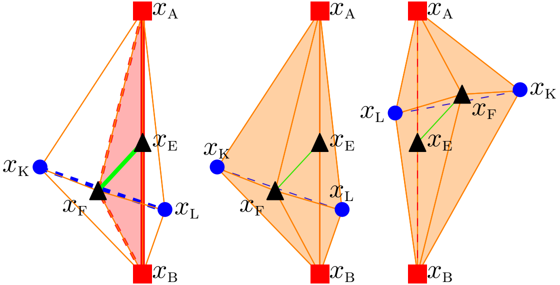


On a trois directions indépendantes

- La direction $x_{\text{K}}x_{\text{L}}$
- La direction $x_{\text{A}}x_{\text{B}}$
- La direction $x_{\text{F}}x_{\text{E}}$

- Pour chaque face $\mathrm{F} = \partial\mathrm{K} \cap \partial\mathrm{L}$, chaque arête $\mathrm{E} \subset \partial x_{\mathrm{F}}$, qui connecte les sommets $x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}} \in \partial e$

$\Rightarrow$ On lui associe la cellule diamant :

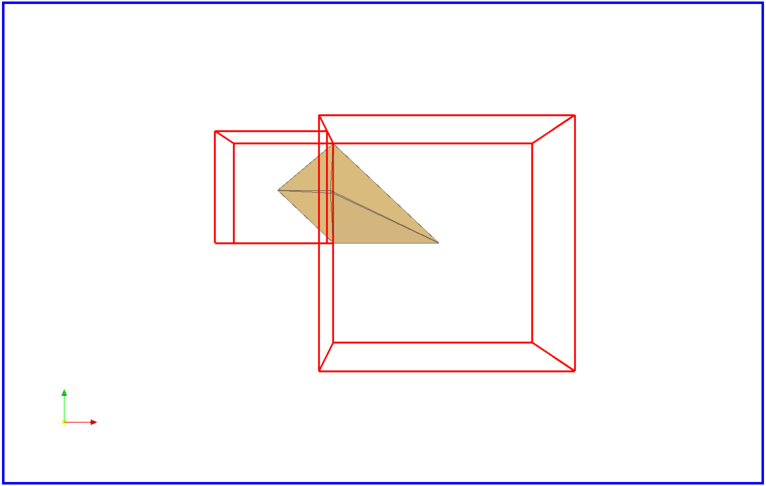


et le gradient discret

$$\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{3|\mathrm{D}|}\left((u_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{K}})N_{\mathrm{KL}} + (u_{\mathrm{A}} - u_{\mathrm{B}})N_{\mathrm{AB}} + (u_{\mathrm{F}} - u_{\mathrm{E}})N_{\mathrm{FE}}\right)$$

Maillage cubique localement raffiné

On peut ainsi traiter des maillages non conformes.



Le schéma

- On associe à chaque inconnue $u_{\mathrm{K}}, u_{\mathrm{L}}, u_{\mathrm{A}}, u_{\mathrm{B}}, u_{\mathrm{F}}, u_{\mathrm{E}}$, un volume de contrôle.

$\Rightarrow$ On a donc trois familles de maillages

  - Le maillage initiale (maillage primal)
  - Le maillage associé aux sommets (maillage nodal)
  - Le maillage associé aux couples faces/arêtes (maillage faces/arêtes)

- Ecrire le bilan discret sur chaque volume de contrôle en utilisant la divergence discrète et le gradient discret.

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div}_{\mathrm{K}} \varphi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= f_{\mathrm{K}} \\
-\operatorname{div}_{\mathrm{A}} \varphi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= f_{\mathrm{A}} \\
-\operatorname{div}_{\mathrm{F}} \varphi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) &= f_{\mathrm{F}}, \quad -\operatorname{div}_{\mathrm{E}} \varphi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}) = f_{\mathrm{E}} \\
+BC &
\end{aligned}
$$

LE MAILLAGE PRIMAL $\mathcal{M}$

- Les faces de K contenues dans D :

$$\cup \left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} \\ x_{\mathrm{F}} \end{pmatrix} \right)$$

LE MAILLAGE NODAL $\mathcal{N}$

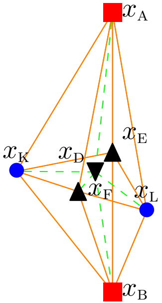
- Les faces de A contenues dans D :

$$\cup \left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{K}} \\ x_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} \\ x_{\mathrm{F}} \end{pmatrix} \right)$$

LE MAILLAGE FACES ARÊTES $\mathcal{FE}$

- Les faces de F ou E contenues dans D :

$$\cup \left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{K}} \\ x_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \right)$$



LE MAILLAGE PRIMAL $\mathcal{M}$

- Les faces de K contenues dans D :

$$\cup\left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} \\ x_{\mathrm{F}} \end{pmatrix}\right)$$

LE MAILLAGE NODAL $\mathcal{N}$

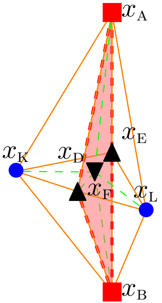
- Les faces de A contenues dans D :

$$\cup\left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{K}} \\ x_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} \\ x_{\mathrm{F}} \end{pmatrix}\right)$$

LE MAILLAGE FACES ARÊTES $\mathcal{FE}$

- Les faces de F ou E contenues dans D :

$$\cup\left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{K}} \\ x_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}\right)$$



Le maillage primal $\mathcal{M}$

- Les faces de K contenues dans D :

$$\cup \left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} \\ x_{\mathrm{F}} \end{pmatrix} \right)$$

Le maillage nodal $\mathcal{N}$

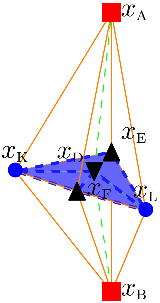
- Les faces de A contenues dans D :

$$\cup \left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{K}} \\ x_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} \\ x_{\mathrm{F}} \end{pmatrix} \right)$$

Le maillage faces arêtes $\mathcal{FE}$

- Les faces de F ou E contenues dans D :

$$\cup \left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{K}} \\ x_{\mathrm{L}} \end{pmatrix} \right)$$



Le maillage primal $\mathcal{M}$

- Les faces de K contenues dans D :

$$\cup\left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} \\ x_{\mathrm{F}} \end{pmatrix}\right)$$

Le maillage nodal $\mathcal{N}$

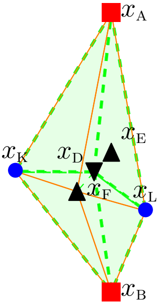
- Les faces de A contenues dans D :

$$\cup\left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{K}} \\ x_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{E}} \\ x_{\mathrm{F}} \end{pmatrix}\right)$$

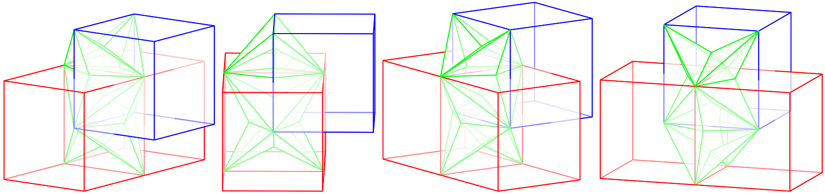
Le maillage faces arêtes $\mathcal{FE}$

- Les faces de F ou E contenues dans D :

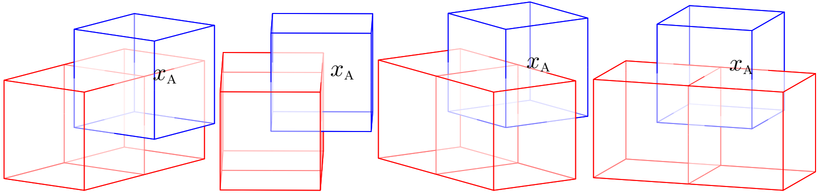
$$\cup\left(x_{\mathrm{D}}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{\mathrm{K}} \\ x_{\mathrm{L}} \end{pmatrix}\right)$$



Les trois maillages

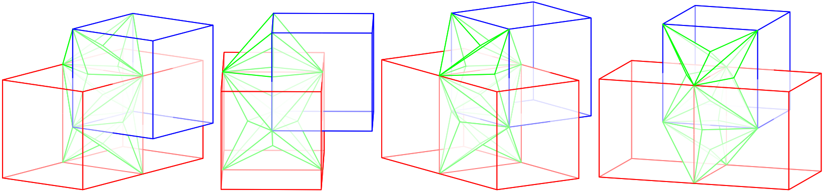


Le maillage primal et le volume de contrôle A

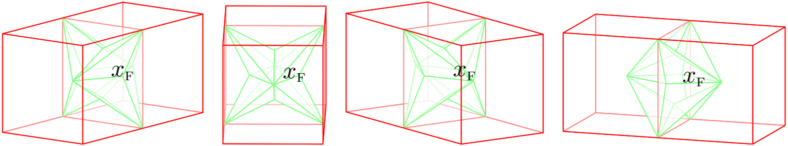


Exemple d'un maillage cubique

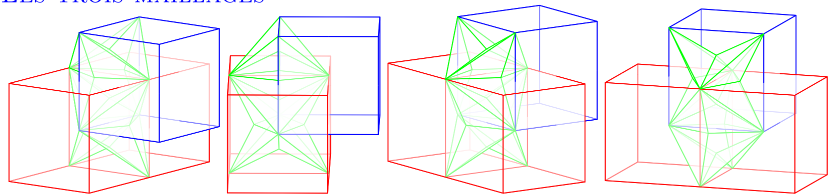
Les trois maillages



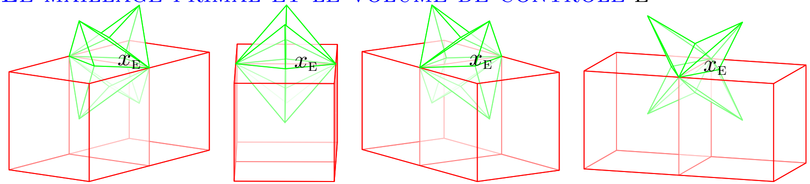
Le maillage primal et le volume de contrôle F



Les trois maillages

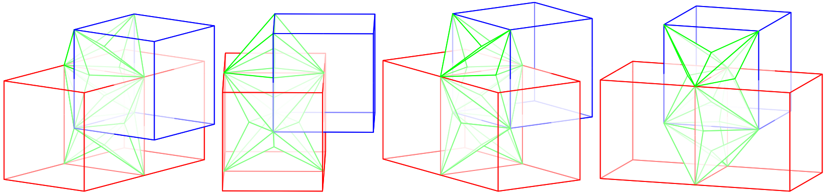


Le maillage primal et le volume de contrôle E

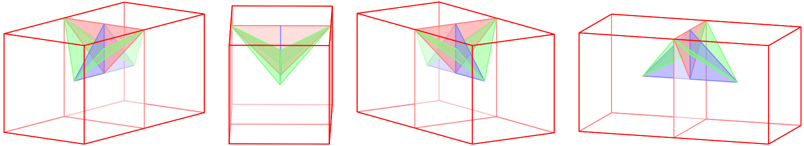


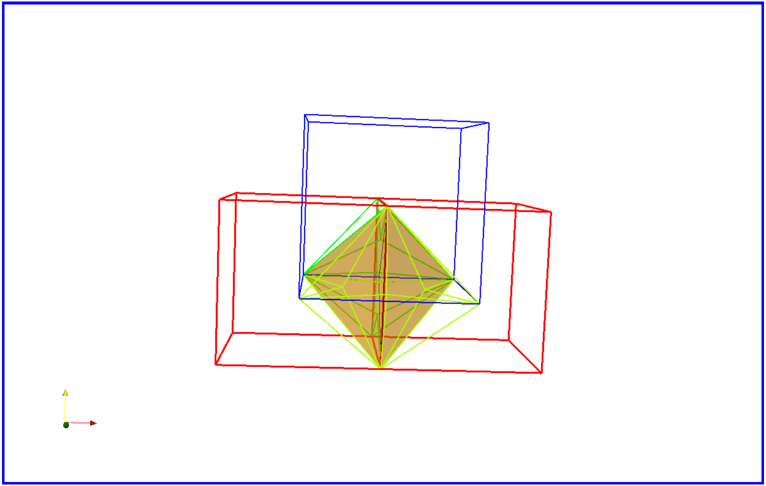
Exemple d'un maillage cubique

Les trois maillages



Les faces des 3 maillages dans un diamant





Le schéma

$$-\operatorname{div}^{\mathcal{T}}(\varphi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})) = f^{\mathcal{T}}$$

Le gradient discret

$$\forall \mathrm{D} \in \mathcal{D}, \quad \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{3|\mathrm{D}|}\left((u_{\mathrm{L}} - u_{\mathrm{K}})N_{\mathrm{KL}} + (u_{\mathrm{B}} - u_{\mathrm{A}})N_{\mathrm{AB}} + (u_{\mathrm{F}} - u_{\mathrm{E}})N_{\mathrm{EF}}\right).$$

La divergence discrète

$$\operatorname{div}^{\mathcal{T}} = \Big((\operatorname{div}_{\mathrm{K}})_{\mathrm{K}\in\mathcal{M}}, (\operatorname{div}_{\mathrm{A}})_{\mathrm{A}\in\mathcal{N}}, (\operatorname{div}_{\mathrm{E}}, \operatorname{div}_{\mathrm{F}})_{\mathrm{E,F}\in\mathcal{F}\mathcal{E}}\Big)$$

$$|\mathrm{K}| \operatorname{div}_{\mathrm{K}} \xi^{\mathcal{D}} = \sum_{\mathrm{D}\in\mathrm{D}_{\mathrm{K}}} \xi_{\mathrm{D}} N_{\mathrm{KL}}, \quad |\mathrm{A}| \operatorname{div}_{\mathrm{A}} \xi^{\mathcal{D}} = \sum_{\mathrm{D}\in\mathrm{D}_{\mathrm{A}}} \xi_{\mathrm{D}} N_{\mathrm{AB}},$$

$$|\mathrm{E}| \operatorname{div}_{\mathrm{E}} \xi^{\mathcal{D}} = \sum_{\mathrm{D}\in\mathrm{D}_{\mathrm{E}}} \xi_{\mathrm{D}} N_{\mathrm{EF}}, |\mathrm{F}| \operatorname{div}_{\mathrm{F}} \xi^{\mathcal{D}} = -\sum_{\mathrm{D}\in\mathrm{D}_{\mathrm{F}}} \xi_{\mathrm{D}} N_{\mathrm{EF}}$$

$$\begin{aligned}
N_{\mathrm{KL}} &= \frac{1}{2}(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}) \times (x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}) \\
N_{\mathrm{AB}} &= \frac{1}{2}(x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}) \times (x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{K}}) \\
N_{\mathrm{EF}} &= \frac{1}{2}(x_{\mathrm{L}} - x_{\mathrm{K}}) \times (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})
\end{aligned}$$

Avec des conditions de Dirichlet homogène, on a

$$-[\![\mathrm{div}^{\mathcal{T}}\,\xi^{\mathcal{D}}, u^{\mathcal{T}}]\!] = \sum_{\mathrm{D}\in\mathcal{D}} |\mathrm{D}|\xi^{\mathrm{D}}\nabla^{\mathcal{T}}u^{\mathcal{T}}$$

avec

$$[\![u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}]\!] = \frac{1}{3}\left(\sum_{\mathrm{K}\in\mathcal{M}} |\mathrm{K}|u_{\mathrm{K}}v_{\mathrm{K}} + \sum_{\mathrm{A}\in\mathcal{N}} |\mathrm{A}|u_{\mathrm{A}}v_{\mathrm{A}} + \sum_{x_{\mathrm{F}}\in\mathcal{F}} |\mathrm{F}|u_{\mathrm{F}}v_{\mathrm{F}} + \sum_{x_{\mathrm{E}}\in\mathcal{E}} |\mathrm{E}|u_{\mathrm{E}}v_{\mathrm{E}}\right)$$

Le domaine est recouvert 3 fois par les maillages

- Aucun des maillages $\mathcal{N}$ ni $\mathcal{FE}$ ne sont réellement contruits en pratique.
- On a juste besoin du maillage primal et d'une structure diamant qui contient
  - une référence aux points $x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{L}}, x_{\mathrm{E}}, x_{\mathrm{F}}$.
  - Les vecteurs $N_{\mathrm{KL}}, N_{\mathrm{AB}}, N_{\mathrm{EF}}$.
  - Les mesures des 8 tétraèdres : $(x_{\mathrm{D}}, x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{F}})$,$(x_{\mathrm{D}}, x_{\mathrm{K}}, x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{E}})$, ...
- Dans le cas linéaire $\varphi(x, \xi) = A(x)\xi$, la matrice du système est constituée de termes de la forme $A^{\mathrm{D}} N_{\mathrm{KL}} \cdot N_{\mathrm{KL}}$, $A^{\mathrm{D}} N_{\mathrm{AB}} \cdot N_{\mathrm{KL}}, \cdots$
- Les termes sources sont évalués dans chaque maille diamant que l'on découpe en tétraèdres.

8 Schémas DDFV en 3D

Le schéma

$$-\operatorname{div}^{\mathcal{T}}(\varphi^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}})) = f^{\mathcal{T}}$$

- Nombre d'inconnues = # volumes de contrôle primaux +# sommets intérieurs + # faces intérieures + # arêtes intérieures.
- Monotonie et coercivité du problème continu sont préservées.
- Existence et unicité de la solution approchée.
- Structure variationnelle préservée si $\varphi = \nabla_\xi \Phi$.
- Estimations d'erreur en h^{p-1} si $p \geq 2$, dès que $u_{\mathrm{E}} \in W^{2,p}(\Omega)$.

⇝ Un benchmark diffusion anisotrope 3D est en cours

http://www.latp.univ-mrs.fr/latp_numerique/

⇝ Workshop à Carry-le-Rouet : du 8 au 10 Septembre 2010

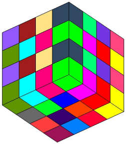
Les avantages

- Implémentation aisée malgré les apparences !
- Bases théoriques solides.
- Possibilité de prendre naturellement en compte des sauts de perméabilité.
- Grande généralité de maillages.

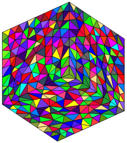
Inconvénients

- Beaucoup d'inconnues par rapport à d'autres approches, mais il faudrait comparer les stencils.

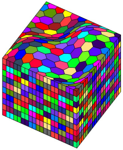
$$-\operatorname{div}(A(x,y,z)\nabla u) = f + \textit{Dirichlet BC}$$



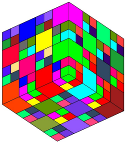
Maillage cubique (mesh 1)



Maillage tétraédrique (mesh 2)



Maillage de prismes (mesh 3)



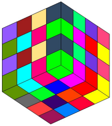
Maillage en “damier” (mesh 4)

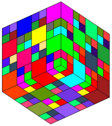
	Mesh 1		Mesh 2		Mesh 3		Mesh 4	
#	Nb vol.	Nb un.	Nb vol.	Nb un.	Nb vol.	Nb un.	Nb vol.	Nb un.
1	8	27	215	737	36	239	1210	12179
2	64	343	2003	7777	288	2543	8820	96759
3	512	3375	3898	15495	2304	23135	28830	325739
4	4096	29791	7711	31139	18432	196799	–	–
5	32768	250047	15266	62419	–	–	–	–

Résultats numériques

Test 1

$$-\operatorname{div}(A(x,y,z)\nabla u) = f + DirichletBC$$





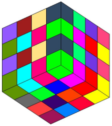
$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

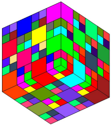
$$u(x,y,z) = 16(x(1-x) + y(1-y) + z(1-z))$$

	Mesh 1				Mesh 4			
#	$\Vert\cdot\Vert_2$	Ordre L_2	$\Vert\cdot\Vert_{H_1}$	Ordre H_1	$\Vert\cdot\Vert_2$	Ordre L_2	$\Vert\cdot\Vert_{H_1}$	Ordre H
1	0.18e+00	–	0.12e+01	–	0.78e+00	–	0.28e+01	–
2	0.37e-01	2.02	0.49e+00	1.10	0.22e+00	1.62	0.15e+01	0.80
3	0.24e-01	1.91	0.39e+00	0.96	0.57e-01	1.82	0.77e+00	0.90
4	0.15e-01	2.10	0.30e+00	1.09	0.14e-01	1.91	0.39e+00	0.95
5	0.95e-02	1.87	0.25e+00	0.93	–	–	–	–

TEST 1

$$-\operatorname{div}(A(x,y,z)\nabla u) = f + DirichletBC$$





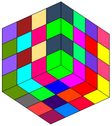
$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

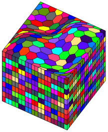
$$u(x,y,z) = 16(x(1-x) + y(1-y) + z(1-z))$$

	Mesh 1		Mesh 4	
#	$u_{\min}$	$u_{\max}$	$u_{\min}$	$u_{\max}$
1	0.000	11.938	0.000	12.023
2	0.000	12.022	0.000	11.999
3	0.000	11.992	0.000	12.000
4	0.000	12.006	0.000	12.000
5	0.000	12.004	–	–

Test 2

$$-\operatorname{div}(A(x,y,z)\nabla u) = f + DirichletBC$$





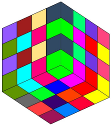
$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2+z^2+1 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2+1 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2+1 \end{pmatrix}$$

$$u(x,y,z) = x^3y^2z + x\sin(2\pi xz)\sin(2\pi xy)\sin(2\pi z)$$

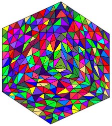
	Mesh 1				Mesh 3			
#	$\|\cdot\|_2$	Rate	$\|\cdot\|_{H_1}$	Rate	$\|\cdot\|_2$	Rate	$\|\cdot\|_{H_1}$	Rate
1	0.25e+00	–	0.85e+00	–	0.12e-01	–	0.18e+00	–
2	0.54e-01	1.79	0.39e+00	0.92	0.33e-02	1.85	0.89e-01	1.03
3	0.17e-01	1.56	0.20e+00	0.87	0.15e-02	1.92	0.58e-01	1.05
4	0.44e-02	1.82	0.97e-01	1.01	–	–	–	–
5	0.11e-02	1.92	0.47e-01	1.02	–	–	–	–

TEST 3

$$-\operatorname{div}(A(x,y,z)\nabla u) = f + DirichletBC$$



$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{K_1x^2+K_2y^2}{x^2+y^2} & \frac{K_1-K_2xy}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{(K_1-K_2)xy}{x^2+y^2} & \frac{K_2x^2+K_1y^2}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1.0+K_3z \end{pmatrix}$$



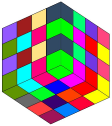
$$u(x,y,z) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z)$$

$$K_1 = 1,\ K_2 = 0.1,\ K_3 = 1$$

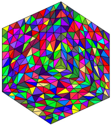
	Mesh 1				Mesh 2			
#	$\|\cdot\|_2$	Ordre L_2	$\|\cdot\|_{H_1}$	Ordre H_1	$\|\cdot\|_2$	Ordre L_2	$\|\cdot\|_{H_1}$	Ordre H
1	0.34e+00	–	0.25e+00	–	0.20e+01	–	0.12e+01	–
2	0.56e-01	2.14	0.62e+00	0.95	0.39e-01	2.06	0.51e+00	1.11
3	0.16e-01	1.67	0.36e+00	0.72	0.25e-01	2.00	0.40e+00	1.11
4	0.41e-02	1.86	0.18e+00	0.91	0.16e-01	1.97	0.31e+00	1.09
5	0.10e-02	1.96	0.93e-01	0.97	0.98e-02	2.00	0.24e+00	1.04

Test 3

$$-\operatorname{div}(A(x,y,z)\nabla u) = f + DirichletBC$$



$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{K_1x^2+K_2y^2}{x^2+y^2} & \frac{K_1-K_2xy}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{(K_1-K_2)xy}{x^2+y^2} & \frac{K_2x^2+K_1y^2}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1.0+K_3z \end{pmatrix}$$



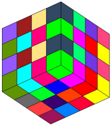
$$u(x,y,z) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z)$$

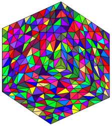
$$K_1 = 1,\ K_2 = 0.1,\ K_3 = 1$$

	Mesh 1		Mesh 2	
#	$u_{\min}$	$u_{\max}$	$u_{\min}$	$u_{\max}$
1	-0.663	0.682	-1.072	1.178
2	-0.977	0.985	-1.016	1.086
3	-0.999	1.001	-1.012	1.028
4	-1.000	1.000	-1.003	1.021
5	-1.000	1.000	-1.015	1.015

TEST 4

$$-\operatorname{div}(A(x,y,z)\nabla u) = f + DirichletBC$$





$$A(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{K_1x^2+K_2y^2}{x^2+y^2} & \frac{K_1-K_2xy}{x^2+y^2} & 0 \\ \frac{(K_1-K_2)xy}{x^2+y^2} & \frac{K_2x^2+K_1y^2}{x^2+y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1.0+K_3z \end{pmatrix}$$

$$u(x,y,z) = \sin(2\pi x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z)$$

$$K_1 = 1,\ K_2 = 0.001,\ K_3 = 10$$

	Mesh 1				Mesh 2			
#	$\Vert\cdot\Vert_2$	Ordre L_2	$\Vert\cdot\Vert_{H_1}$	Ordre H_1	$\Vert\cdot\Vert_2$	Ordre L_2	$\Vert\cdot\Vert_{H_1}$	Ordre H
1	0.42e+00	–	0.19e+01	–	0.25e+00	–	0.17e+01	–
2	0.25e+00	0.61	0.29e+01	-0.49	0.49e-01	0.83	0.79e+00	1.01
3	0.66e-01	1.74	0.16e+01	0.82	0.32e-01	1.90	0.61e+00	1.09
4	0.17e-01	1.88	0.80e+00	0.93	0.20e-01	1.94	0.49e+00	0.94
5	0.43e-02	1.94	0.40e+00	0.97	0.13e-01	2.05	0.38e+00	1.06

FIN

Preuve du principe du maximum 1D

Soit $u^{\mathcal{T}}$ solution de $Au^{\mathcal{T}} = (h_i f_i)_i$.

- On suppose $(f_i)_i \geq 0$, on veut montrer $(u_i)_i \geq 0$.

Preuve du principe du maximum 1D

Soit $u^{\mathcal{T}}$ solution de $Au^{\mathcal{T}} = (h_i f_i)_i$.

- On suppose $(f_i)_i \geq 0$, on veut montrer $(u_i)_i \geq 0$.
- Supposons $U = (u_i)_i \ngeq 0$, on pose alors

  $$i_0 = \min\{1 \leq i \leq N, \ \text{ tel que } \ u_i = \min U\}.$$

  Par hypothèse, on a $u_{i_0} < 0 = u_0$ et donc

  $$u_{i_0} < u_{i_0 - 1}, \ \text{ et } \ u_{i_0} \leq u_{i_0+1}.$$

Preuve du principe du maximum 1D

Soit $u^{\mathcal{T}}$ solution de $Au^{\mathcal{T}} = (h_i f_i)_i$.

- On suppose $(f_i)_i \geq 0$, on veut montrer $(u_i)_i \geq 0$.
- Supposons $U = (u_i)_i \not\geq 0$, on pose alors

$$i_0 = \min\{1 \leq i \leq N, \quad \text{tel que} \quad u_i = \min U\}.$$

  Par hypothèse, on a $u_{i_0} < 0 = u_0$ et donc

$$u_{i_0} < u_{i_0-1}, \quad \text{et} \quad u_{i_0} \leq u_{i_0+1}.$$

- On regarde la i_0-ième équation du système

$$\underbrace{-k_{i_0+1/2}\frac{u_{i_0+1}-u_{i_0}}{h_{i_0+1/2}}}_{\leq 0} + \underbrace{k_{i_0-1/2}\frac{u_{i_0}-u_{i_0-1}}{h_{i_0-1/2}}}_{<0} = \underbrace{h_{i_0} f_{i_0}}_{\geq 0}.$$

$$\Rightarrow \text{Contradiction.}$$

Retour

Soit $u^{\mathcal{T}}$ tel que $Au^{\mathcal{T}} = (h_i f_i)_i$.

- On construit "explicitement" un vecteur V solution de

$$AV = (h_i)_i.$$

Preuve de la stabilité L^∞ en 1D

Soit $u^{\mathcal{T}}$ tel que $Au^{\mathcal{T}} = (h_i f_i)_i$.

- On construit "explicitement" un vecteur V solution de
$$AV = (h_i)_i.$$
- Celui-ci vérifie $\|V\|_\infty \leq C$ et $v_i \approx v(x_i)$ ou v est la solution de
$$-\partial_x(k(x)\partial_x v) = 1, \quad v(0) = v(1) = 0.$$

Soit $u^{\mathcal{T}}$ tel que $Au^{\mathcal{T}} = (h_i f_i)_i$.

- On construit “explicitement” un vecteur V solution de
$$AV = (h_i)_i.$$
- Celui-ci vérifie $\|V\|_\infty \leq C$ et $v_i \approx v(x_i)$ ou v est la solution de
$$-\partial_x(k(x)\partial_x v) = 1, \quad v(0) = v(1) = 0.$$
- On a la propriété suivante
$$A\big(\|f\|_\infty V - U\big) = \big(h_i(\|f\|_\infty - f_i)\big)_i \geq 0.$$

Preuve de la stabilité L^∞ en 1D

Soit $u^{\mathcal{T}}$ tel que $Au^{\mathcal{T}} = (h_i f_i)_i$.

- On construit "explicitement" un vecteur V solution de
$$AV = (h_i)_i.$$
- Celui-ci vérifie $\|V\|_\infty \leq C$ et $v_i \approx v(x_i)$ ou v est la solution de
$$-\partial_x(k(x)\partial_x v) = 1, \quad v(0) = v(1) = 0.$$
- On a la propriété suivante
$$A\big(\|f\|_\infty V - U\big) = \big(h_i(\|f\|_\infty - f_i)\big)_i \geq 0.$$
- Par le principe du maximum discret on en déduit
$$U \leq \|f\|_\infty V,$$
d'où
$$U \leq C\|f\|_\infty.$$
- On fait le même raisonnement avec $-U$ pour conclure.

- On suppose Ω convexe (pour simplifier).
- On fixe une vecteur unitaire $\xi \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $x \in \Omega$ on note $y(x)$ la *projection* de x sur $\partial\Omega$ dans la direction ξ.
- Pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}$, on note

$$\chi_\sigma(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x, y] \cap \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } [x, y] \cap \sigma = \emptyset. \end{cases}$$

Preuve de l'inégalité de Poincaré

- On suppose Ω convexe (pour simplifier).
- On fixe une vecteur unitaire $\xi \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $x \in \Omega$ on note $y(x)$ la *projection* de x sur $\partial\Omega$ dans la direction ξ.
- Pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}$, on note

$$\chi_\sigma(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x,y] \cap \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } [x,y] \cap \sigma = \emptyset. \end{cases}$$

- On note

$$\tilde{\Omega} = \Big\{ x \in \Omega, \quad [x, y(x)] \text{ ne rencontre aucun sommet} \\ \text{et ne contient aucune arête} \Big\}.$$

On vérifie que $\tilde{\Omega}^c$ est de mesure nulle dans Ω.

Preuve de l'inégalité de Poincaré

- On suppose Ω convexe (pour simplifier).
- On fixe une vecteur unitaire $\xi \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $x \in \Omega$ on note $y(x)$ la *projection* de x sur $\partial\Omega$ dans la direction ξ.
- Pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}$, on note

$$\chi_\sigma(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x,y] \cap \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } [x,y] \cap \sigma = \emptyset. \end{cases}$$

- On note

$$\tilde{\Omega} = \Big\{ x \in \Omega, \quad [x, y(x)] \ \text{ne rencontre aucun sommet} \\ \text{et ne contient aucune arête} \Big\}.$$

  On vérifie que $\tilde{\Omega}^c$ est de mesure nulle dans Ω.
- Soit maintenant $\kappa \in \mathcal{T}$ et $x \in \kappa \cap \tilde{\Omega}$.
  En parcourant le segment $[x, y(x)]$, on rencontre un nombre fini de volumes de contrôle noté $(\kappa_i)_{1 \leq i \leq m}$ avec $\kappa_1 = \kappa$ et κ_m est un volume de contrôle du bord.

- On a donc une somme télescopique

$$u_{\mathcal{K}} = u_{\mathcal{K}_1} = \sum_{i=1}^{m-1} (u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}) + u_{\mathcal{K}_m},$$

$$|u_{\mathcal{K}}| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}| + |0 - u_{\mathcal{K}_m}|,$$

- Il vient

$$\boxed{|u_{\mathcal{K}}| \leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})| \chi_\sigma(x, y(x)).}$$

- On a donc une somme télescopique

$$u_{\mathcal{K}} = u_{\mathcal{K}_1} = \sum_{i=1}^{m-1} (u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}) + u_{\mathcal{K}_m},$$

$$|u_{\mathcal{K}}| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}| + |0 - u_{\mathcal{K}_m}|,$$

- Il vient

$$\boxed{|u_{\mathcal{K}}| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma \sqrt{c_\sigma} \frac{1}{\sqrt{c_\sigma}} |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})| \chi_\sigma(x, y(x)).}$$

avec $c_\sigma = |\boldsymbol{\nu}_\sigma \cdot \xi|$ (qui est non nul car $x \in \tilde{\Omega}$).

- On a donc une somme télescopique

$$u_\mathcal{K} = u_{\mathcal{K}_1} = \sum_{i=1}^{m-1} (u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}) + u_{\mathcal{K}_m},$$

$$|u_\mathcal{K}| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}| + |0 - u_{\mathcal{K}_m}|,$$

- Il vient

$$\boxed{|u_\mathcal{K}| \leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma \sqrt{c_\sigma} \frac{1}{\sqrt{c_\sigma}} |D_\sigma(u^\mathcal{T})| \chi_\sigma(x, y(x)).}$$

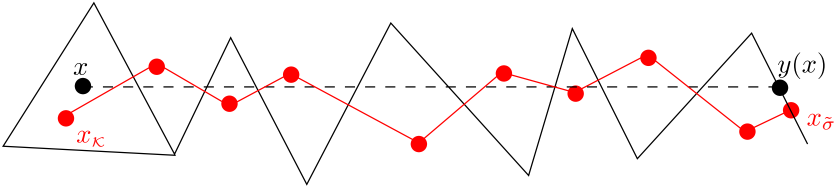
avec $c_\sigma = |\boldsymbol{\nu}_\sigma \cdot \xi|$ (qui est non nul car $x \in \tilde{\Omega}$).

- Par Cauchy-Schwarz (rappel : $x \in \mathcal{K}$)

$$|u_\mathcal{K}|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x, y(x))\right) \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2 \chi_\sigma(x, y(x))\right).$$

$$|u_{\mathcal{K}}|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x,y(x))\right)\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2\chi_\sigma(x,y(x))\right).$$

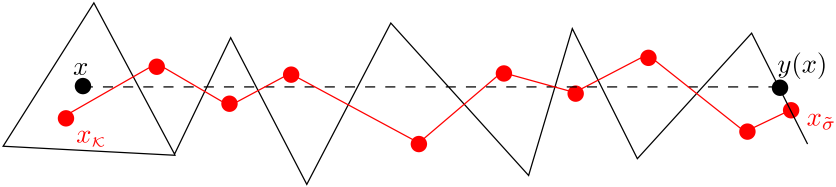
Estimation du premier terme Soit $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_{ext}$ telle que $y(x) \in \tilde{\sigma}$.



$$\sum_{i=1}^{m-1}(x_{\mathcal{K}_i} - x_{\mathcal{K}_{i+1}}) + x_{\mathcal{K}_m} - x_{\tilde{\sigma}} = x_{\mathcal{K}} - x_{\tilde{\sigma}},$$

$$|u_{\mathcal{K}}|^2 \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x, y(x)) \right) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2 \chi_\sigma(x, y(x)) \right).$$

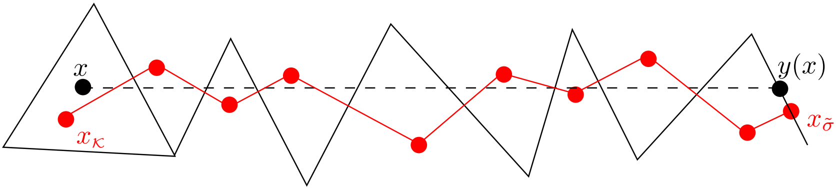
Estimation du premier terme Soit $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_{ext}$ telle que $y(x) \in \tilde{\sigma}$.



$$\sum_{i=1}^{m-1} (x_{\mathcal{K}_i} - x_{\mathcal{K}_{i+1}}) \cdot \xi + (x_{\mathcal{K}_m} - x_{\tilde{\sigma}}) \cdot \xi = (x_{\mathcal{K}} - x_{\tilde{\sigma}}) \cdot \xi,$$

$$|u_{\mathcal{K}}|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x,y(x))\right)\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2\chi_\sigma(x,y(x))\right).$$

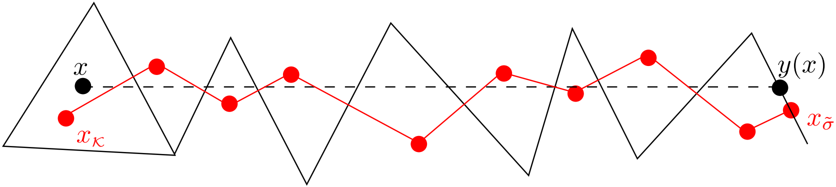
Estimation du premier terme Soit $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_{ext}$ telle que $y(x) \in \tilde{\sigma}$.



$$-\sum_{i=1}^{m-1} d_{\mathcal{K}_i\mathcal{K}_{i+1}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}_i\mathcal{K}_{i+1}}\cdot\xi - d_{\mathcal{K}_m\tilde{\sigma}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}_m\tilde{\sigma}}\cdot\xi = (x_{\mathcal{K}} - x_{\tilde{\sigma}})\cdot\xi,$$

$$|u_\mathcal{K}|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x,y(x))\right)\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2\chi_\sigma(x,y(x))\right).$$

ESTIMATION DU PREMIER TERME Soit $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_{ext}$ telle que $y(x) \in \tilde{\sigma}$.



$$-\sum_{i=1}^{m-1} d_{\mathcal{K}_i\mathcal{K}_{i+1}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}_i\mathcal{K}_{i+1}} \cdot \xi - d_{\mathcal{K}_m\tilde{\sigma}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}_m\tilde{\sigma}} \cdot \xi = (x_\mathcal{K} - x_{\tilde{\sigma}}) \cdot \xi,$$

$$\Rightarrow \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x,y(x)) = \left|(x_\mathcal{K} - x_{\tilde{\sigma}}) \cdot \xi\right| \leq \operatorname{diam}(\Omega).$$

Preuve de l'inégalité de Poincaré

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \forall x \in \mathcal{K} \cap \tilde{\Omega}, \quad |u_{\mathcal{K}}|^2 \leq \operatorname{diam}(\Omega) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2 \chi_\sigma(x, y(x)) \right).$$

$$\forall \kappa \in \mathcal{T}, \forall x \in \kappa \cap \tilde{\Omega}, \quad |u_\kappa|^2 \leq \text{diam}(\Omega) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2 \chi_\sigma(x, y(x)) \right).$$

On intègre sur $\kappa \cap \tilde{\Omega}$ par rapport à x, puis on somme sur $\kappa \in \mathcal{T}$

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}} |\kappa| |u_\kappa|^2 \leq \text{diam}(\Omega) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2 \left(\int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x))\, dx \right),$$

Preuve de l'inégalité de Poincaré

$$\forall \kappa \in \mathcal{T}, \forall x \in \kappa \cap \tilde{\Omega}, \;\; |u_\kappa|^2 \leq \mathrm{diam}(\Omega) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2 \chi_\sigma(x, y(x)) \right).$$

On intègre sur $\kappa \cap \tilde{\Omega}$ par rapport à x, puis on somme sur $\kappa \in \mathcal{T}$

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}} |\kappa| |u_\kappa|^2 \leq \mathrm{diam}(\Omega) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2 \left(\int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x))\, dx \right),$$

Evaluation de l'intégrale

$$\int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x))\, dx \leq \mathrm{diam}(\Omega) |\sigma| c_\sigma.$$

Preuve de l'inégalité de Poincaré

$$\forall\kappa\in\mathcal{T},\forall x\in\kappa\cap\tilde{\Omega},\quad |u_\kappa|^2\leq \mathrm{diam}(\Omega)\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2\chi_\sigma(x,y(x))\right).$$

On intègre sur $\kappa\cap\tilde{\Omega}$ par rapport à x, puis on somme sur $\kappa\in\mathcal{T}$

$$\sum_{\kappa\in\mathcal{T}}|\kappa||u_\kappa|^2\leq \mathrm{diam}(\Omega)\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}\frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2\left(\int_\Omega\chi_\sigma(x,y(x))\,dx\right),$$

Evaluation de l'intégrale

$$\int_\Omega\chi_\sigma(x,y(x))\,dx\leq \mathrm{diam}(\Omega)|\sigma|c_\sigma.$$

Conclusion

$$\|u^\mathcal{T}\|_{L^2}^2=\sum_{\kappa\in\mathcal{T}}|\kappa||u_\kappa|^2\leq \mathrm{diam}(\Omega)^2\sum_{\sigma\in\mathcal{E}}|\sigma|d_\sigma|D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2=\mathrm{diam}(\Omega)^2\|u^\mathcal{T}\|_{1,\mathcal{T}}^2.$$

Retour

- Soit $u^n \in L^2(\mathbb{R}^2)$ le prolongement par 0 de $u^{\mathcal{T}_n} \in L^2(\Omega)$.
- On va utiliser le théorème de Kolmogorov, pour cela il suffit d'obtenir une estimation sur les translatées

$$\|u^n(\cdot + \eta) - u^n\|_{L^2} \xrightarrow[\eta \to 0]{} 0, \quad \text{unif. par rapport à } n.$$

- Soit $u^n \in L^2(\mathbb{R}^2)$ le prolongement par 0 de $u^{\mathcal{T}_n} \in L^2(\Omega)$.
- On va utiliser le théorème de Kolmogorov, pour cela il suffit d'obtenir une estimation sur les translatées

$$\|u^n(\cdot + \eta) - u^n\|_{L^2} \xrightarrow[\eta \to 0]{} 0, \quad \text{unif. par rapport à } n.$$

- On fixe $\eta \in \mathbb{R}^2$ non nul. Par sommes télescopiques on a

$$|u^n(x+\eta) - u^n(x)| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n})| \chi_\sigma(x, x+\eta),$$

et par Cauchy-Schwarz

$$|u^n(x+\eta) - u^n(x)|^2 \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_\sigma(x, x+\eta) d_\sigma c_\sigma \right) \times \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_\sigma(x, x+\eta) \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \right),$$

avec $c_\sigma = |\boldsymbol{\nu}_\sigma \cdot \frac{\eta}{|\eta|}|$.

$$|u^n(x+\eta)-u^n(x)|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \chi_\sigma(x,x+\eta)d_\sigma c_\sigma\right) \times \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \chi_\sigma(x,x+\eta)\frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2\right),$$

avec $c_\sigma = |\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\eta}{|\eta|}|$.

Estimation du premier terme

- On peut se ramener au cas où $[x,x+\eta]\subset\Omega$.
- Soient alors $\mathcal{K},\mathcal{L}\in\mathcal{T}$ tels que $x\in\mathcal{K}$ et $x+\eta\in\mathcal{L}$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \chi_\sigma(x,x+\eta)d_\sigma c_\sigma &= \left|(x_\mathcal{L}-x_\mathcal{K})\cdot\frac{\eta}{|\eta|}\right| \leq |x_\mathcal{L}-x_\mathcal{K}| \\ &\leq |x_\mathcal{L}-(x+\eta)|+|(x+\eta)-x|+|x-x_\mathcal{K}| \\ &\leq |\eta|+2\mathrm{size}(\mathcal{T}_n).\end{aligned}$$

- On intègre en $x\in\mathbb{R}^2$

$$|u^n(x+\eta)-u^n(x)|^2 \leq C(|\eta|+\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \left(\chi_\sigma(x,x+\eta)\frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \right),$$

- On intègre en $x \in \mathbb{R}^2$

$$\|u^n(\cdot+\eta)-u^n\|_{L^2}^2 \leq C(|\eta|+\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\sigma(x,x+\eta)\,dx \right)$$

$$|u^n(x+\eta)-u^n(x)|^2 \leq C(|\eta|+\text{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \left(\chi_\sigma(x,x+\eta)\frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \right),$$

- On intègre en $x \in \mathbb{R}^2$

$$\|u^n(\cdot+\eta)-u^n\|_{L^2}^2 \leq C(|\eta|+\text{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\sigma(x,x+\eta)\,dx \right)$$

- Calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\sigma(x,x+\eta)\,dx = |\eta||\sigma|c_\sigma.$$

$$|u^n(x+\eta)-u^n(x)|^2 \leq C(|\eta|+\text{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \left(\chi_\sigma(x,x+\eta) \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \right),$$

- On intègre en $x \in \mathbb{R}^2$

$$\|u^n(\cdot+\eta)-u^n\|_{L^2}^2 \leq C(|\eta|+\text{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\sigma(x,x+\eta)\, dx \right)$$

- Calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\sigma(x,x+\eta)\, dx = |\eta||\sigma|c_\sigma.$$

Conclusion

$$\|u^n(\cdot+\eta)-u^n\|_{L^2}^2 \leq C|\eta|(|\eta| + \underbrace{\text{size}(\mathcal{T}_n)}_{\leq \text{diam}(\Omega)}) \underbrace{\|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n}^2}_{\text{borné}}.$$

$\exists$ une sous-suite $u^{\varphi(n)} \longrightarrow u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ avec $u = 0$ en dehors de Ω.

- Par hypothèse, on a

$$\sup_n \|\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}\|_{L^2} < +\infty,$$

- Il existe donc $G \in (L^2(\Omega))^2$ tel que (modulo une autre sous-suite)

$$\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightharpoonup[n\to\infty]{} G.$$

On veut montrer que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla u = G$.

- Par hypothèse, on a

$$\sup_n \|\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}\|_{L^2} < +\infty,$$

- Il existe donc $G \in (L^2(\Omega))^2$ tel que (modulo une autre sous-suite)

$$\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} G.$$

On veut montrer que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla u = G$.

- Soit $\Phi \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2))^2$ (**on ne suppose pas $\Phi = 0$ sur $\partial\Omega$**)

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega u^{\mathcal{T}_n} (\operatorname{div} \Phi)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega u\, (\operatorname{div} \Phi)\, dx.$$

- Par hypothèse, on a

$$\sup_n \|\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}\|_{L^2} < +\infty,$$

- Il existe donc $G \in (L^2(\Omega))^2$ tel que (modulo une autre sous-suite)

$$\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} G.$$

On veut montrer que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla u = G$.

- Soit $\Phi \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2))^2$ (**on ne suppose pas $\Phi = 0$ sur $\partial\Omega$**)

$$I_n \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega u^{\mathcal{T}_n} (\operatorname{div} \Phi)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega u\, (\operatorname{div} \Phi)\, dx.$$

- Mais on a aussi

$$I_n = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} u_{\mathcal{K}}^n \left(\int_{\mathcal{K}} \operatorname{div} \Phi\, dx\right) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} u_{\mathcal{K}}^n \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \left(\int_\sigma \Phi \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}\, dx\right).$$

- Sommons par arête

$$I_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} (u_{\mathcal{K}}^n - u_{\mathcal{L}}^n) \left(\int_\sigma \Phi \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} u_{\mathcal{K}}^n \left(\int_\sigma \Phi \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right).$$

- Sommons par arête

$$I_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} (u_{\mathcal{K}}^n - u_{\mathcal{L}}^n) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \cdot \left(\int_\sigma \Phi \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} u_{\mathcal{K}}^n \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \cdot \left(\int_\sigma \Phi \right).$$

- Sommons par arête

$$I_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \frac{|\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{d} \left(d \frac{u_{\mathcal{K}}^n - u_{\mathcal{L}}^n}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{|\sigma| d_{\mathcal{K}\sigma}}{d} \left(d \frac{u_{\mathcal{K}}^n}{d_{\mathcal{K}\sigma}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right) \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Comme Φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \left| \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right) - \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \Phi \right) \right| \leq C \|\nabla \Phi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Comme Φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \left| \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right) - \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \Phi \right) \right| \leq C \|\nabla \Phi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

- Comme $(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})_n$ est bornée dans L^2, on a

$$I_n = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \Phi \right) + O_\Phi(\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\mathcal{D}|\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \Phi\right).$$

- Comme Φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \left|\left(\frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \Phi\right) - \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_{\mathcal{D}} \Phi\right)\right| \leq C\|\nabla\Phi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

- Comme $(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})_n$ est bornée dans L^2, on a

$$I_n = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \int_{\mathcal{D}} \Phi + O_\Phi(\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\mathcal{D}|\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \Phi\right).$$

- Comme Φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \left|\left(\frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \Phi\right) - \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_{\mathcal{D}} \Phi\right)\right| \leq C\|\nabla\Phi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

- Comme $(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})_n$ est bornée dans L^2, on a

$$I_n = -\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \Phi\, dx + O_\Phi(\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Comme Φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \left| \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right) - \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \Phi \right) \right| \leq C \|\nabla \Phi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

- Comme $(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})_n$ est bornée dans L^2, on a

$$I_n = -\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \Phi \, dx + O_\Phi(\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)).$$

- Bilan, pour tout $\Phi \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2))^2$

$$I_n \xrightarrow[n \to \infty]{} -\int_\Omega G \cdot \Phi \, dx, \quad \text{et} \quad I_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_\Omega u \, \mathrm{div} \, \Phi \, dx.$$

Retour

Estimation d'énergie

$$\forall n \geq 0, \quad \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} \leq \text{diam}(\Omega)\|f\|_{L^2}.$$

Estimation d'énergie

$$\forall n \geq 0, \quad \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|f\|_{L^2}.$$

Théorème de compacité $\Rightarrow$ Il existe $u \in H^1_0(\Omega)$ tq

$$u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \nabla u \text{ dans } (L^2(\Omega))^2.$$

Preuve de convergence VF4

Estimation d'énergie

$$\forall n \geq 0, \quad \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|f\|_{L^2}.$$

Théorème de compacité $\Rightarrow$ Il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tq

$$u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \rightharpoonup_{n\to\infty} \nabla u \text{ dans } (L^2(\Omega))^2.$$

Ce qu'il reste à faire

- On va montrer que u vérifie la formulation faible du problème $-\Delta u = f$.
- Par unicité on en déduit que les convergences ci-dessus ont lieu pour toute la suite $(u^{\mathcal{T}_n})_n$.

Preuve de convergence VF4

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Intégration par parties discrète avec $v^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} d_\sigma|\sigma| D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}_n}) \frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}).$$

Remarque : Pour n assez grand, les termes de bord sont nuls.

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Intégration par parties discrète avec $v^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} d_\sigma|\sigma| D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}_n}) \frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}).$$

Remarque : Pour n assez grand, les termes de bord sont nuls.

Par définition du gradient discret

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \underbrace{\frac{d_\sigma|\sigma|}{d}}_{=|\mathcal{D}|} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}).$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Intégration par parties discrète avec $v^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} d_\sigma|\sigma| D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}_n}) \frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}).$$

Remarque : Pour n assez grand, les termes de bord sont nuls.

Par définition du gradient discret

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \int_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} \int_{\mathcal{K}} f(x)\varphi(x_{\mathcal{K}})\, dx.$$

Preuve de convergence VF4

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \mathbb{P}^\mathcal{T}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x_\mathcal{K}))_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}.$$

Intégration par parties discrète avec $v^\mathcal{T} = \mathbb{P}^\mathcal{T}\varphi$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} d_\sigma|\sigma| D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}_n}) \frac{\varphi(x_\mathcal{L})-\varphi(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_\mathcal{K} \varphi(x_\mathcal{K}).$$

Remarque : Pour n assez grand, les termes de bord sont nuls.

Par définition du gradient discret

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \int_\mathcal{D} \nabla_\mathcal{D}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\nabla\varphi(x) + \underbrace{\left(\frac{\varphi(x_\mathcal{L})-\varphi(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} - (\nabla\varphi(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}})\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_1^n(x)} \right) dx$$

$$= \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \int_\mathcal{K} f(x) \left(\varphi(x) + \underbrace{(\varphi(x_\mathcal{K}) - \varphi(x))}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_2^n(x)} \right) dx.$$

Bilan

$$\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \nabla\varphi(x)\,dx - \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$= -\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot R_1^n(x)\,dx + \int_\Omega f(x) R_2^n(x)\,dx.$$

Bilan

$$\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \nabla \varphi(x)\, dx - \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx$$
$$= - \int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot R_1^n(x)\, dx + \int_\Omega f(x) R_2^n(x)\, dx.$$

$$|R_1^n(x)| = \left| \frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} - (\nabla \varphi(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right| \leq C \|D^2 \varphi\|_\infty \text{size}(\mathcal{T}_n).$$

$$|R_2^n(x)| = |\varphi(x_{\mathcal{K}}) - \varphi(x)| \leq \|D\varphi\|_\infty \text{size}(\mathcal{T}_n).$$

Bilan

$$\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \nabla\varphi(x)\,dx - \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$= -\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot R_1^n(x)\,dx + \int_\Omega f(x) R_2^n(x)\,dx.$$

$$|R_1^n(x)| = \left| \frac{\varphi(x_\mathcal{L}) - \varphi(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} - (\nabla\varphi(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}})\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right| \leq C\|D^2\varphi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

$$|R_2^n(x)| = |\varphi(x_\mathcal{K}) - \varphi(x)| \leq \|D\varphi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

On peut donc passer à la limite

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx. \qquad (\star)$$

Par densité, $(\star)$ est encore vraie pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, d'où le résultat.

Non convergence forte des gradients

D'après la formule d'intégration par parties discrète, on a

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| |D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n})|^2 = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} u^n_{\mathcal{K}} = \int_\Omega f(x) u^{\mathcal{T}_n}\, dx.$$

Comme $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} = d D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n}) \boldsymbol{\nu}_\sigma$, on en déduit

$$\frac{1}{d} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \underbrace{\frac{d_\sigma|\sigma|}{d}}_{=|\mathcal{D}|} |\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}|^2 = \int_\Omega f(x) u^{\mathcal{T}_n}\, dx.$$

NON CONVERGENCE FORTE DES GRADIENTS

D'après la formule d'intégration par parties discrète, on a

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| |D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n})|^2 = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}}^n = \int_\Omega f(x) u^{\mathcal{T}_n} \, dx.$$

Comme $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} = d D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n}) \boldsymbol{\nu}_\sigma$, on en déduit

$$\frac{1}{d} \|\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}\|_{L^2}^2 = \int_\Omega f(x) u^{\mathcal{T}_n} \, dx.$$

Non convergence forte des gradients

D'après la formule d'intégration par parties discrète, on a

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma|\sigma||D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n})|^2 = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}|f_{\mathcal{K}}u_{\mathcal{K}}^n = \int_\Omega f(x)u^{\mathcal{T}_n}\,dx.$$

Comme $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n}u^{\mathcal{T}_n} = dD_\sigma(u^{\mathcal{T}_n})\boldsymbol{\nu}_\sigma$, on en déduit

$$\frac{1}{d}\|\nabla^{\mathcal{T}_n}u^{\mathcal{T}_n}\|_{L^2}^2 = \int_\Omega f(x)u^{\mathcal{T}_n}\,dx.$$

On passe à la limite dans le terme de droite et on trouve

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla^{\mathcal{T}_n}u^{\mathcal{T}_n}\|_{L^2}^2 = d\int_\Omega f(x)u(x)\,dx = d\|\nabla u\|_{L^2}^2.$$

$\leadsto$ Si $u\neq 0$ et $d\geq 2$, on n'a donc pas convergence forte des gradients.

◂ Retour

$$R_\sigma(u) = \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx.$$

- Formules de Taylor avec reste intégral (pour $u \in \mathcal{C}^2$ et $x \in \sigma$)

$$u(x_\mathcal{L}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{L}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\,dt,$$

$$u(x_\mathcal{K}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{K}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{K}-x)).(x_\mathcal{K}-x)^2\,dt.$$

$$R_\sigma(u) = \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

- Formules de Taylor avec reste intégral (pour $u \in \mathcal{C}^2$ et $x \in \sigma$)

$$u(x_\mathcal{L}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{L}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\, dt,$$

$$u(x_\mathcal{K}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{K}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{K}-x)).(x_\mathcal{K}-x)^2\, dt.$$

- On soustrait et on utilise $x_\mathcal{L} - x_\mathcal{K} = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$

$$u(x_\mathcal{L})-u(x_\mathcal{K}) = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\, dt$$
$$-\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{K}-x)).(x_\mathcal{K}-x)^2\, dt.$$

$$R_\sigma(u) = \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

- Formules de Taylor avec reste intégral (pour $u \in \mathcal{C}^2$ et $x \in \sigma$)

$$u(x_\mathcal{L}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{L}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\, dt,$$

$$u(x_\mathcal{K}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{K}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{K}-x)).(x_\mathcal{K}-x)^2\, dt.$$

- Bilan :

$$R_\sigma(u) = \underbrace{\frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|\sigma|}\int_\sigma\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\, dtdx}_{=T_1}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|\sigma|}\int_\sigma\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{K}-x)).(x_\mathcal{K}-x)^2\, dt\, dx}_{=T_2}.$$

$$T_1 = \frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|\sigma|} \int_\sigma \int_0^1 (1-t) D^2 u(x + t(x_{\mathcal{L}} - x)).(x_{\mathcal{L}} - x)^2 \, dt dx.$$

$$T_1 = \frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|\sigma|} \int_\sigma \int_0^1 (1-t) D^2 u(x + t(x_{\mathcal{L}} - x)).(x_{\mathcal{L}} - x)^2 \, dt dx.$$

Inégalité de Jensen

$$|T_1|^2 \leq \frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^2|\sigma|} \int_\sigma \int_0^1 |1-t|^2 |D^2 u(x + t(x_{\mathcal{L}} - x))|^2 |x_{\mathcal{L}} - x|^4 \, dt dx.$$

$$T_1 = \frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|\sigma|} \int_\sigma \int_0^1 (1-t) D^2 u(x + t(x_\mathcal{L} - x)).(x_\mathcal{L} - x)^2 \, dt dx.$$

Inégalité de Jensen

$$|T_1|^2 \leq \frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^2 |\sigma|} \int_\sigma \int_0^1 |1-t|^2 |D^2 u(x + t(x_\mathcal{L} - x))|^2 |x_\mathcal{L} - x|^4 \, dt dx.$$

Changement de variable

$$(t, x) \in [0,1] \times \sigma \mapsto y = x + t(x_\mathcal{L} - x) \in \mathcal{D}_\mathcal{L}.$$

Le Jacobien vaut $(1-t)(x_\mathcal{L} - x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = (1-t) d_{\mathcal{L}\sigma}$.

$$[T_1|^2 \leq \frac{\mathrm{d}_\mathcal{D}^4}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^2 d_{\mathcal{L},\sigma} |\sigma|} \int_{\mathcal{D}_\mathcal{L}} |D^2 u(y)|^2 \, dy \leq C(\mathrm{reg}(\mathcal{T})) \frac{\mathrm{size}(\mathcal{T})^2}{|\mathcal{D}|} \int_\mathcal{D} |D^2 u(y)|^2 \, dy.$$

Retour

$$R_\sigma(u) = k_\sigma \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

Nouveau terme dans l'estimation

$$|R_\sigma(u)| \leq \left| k_\sigma - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\, dx \right| \left| \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right| + O(\mathrm{size}(\mathcal{T})).$$

$$R_\sigma(u) = k_\sigma \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

Nouveau terme dans l'estimation

$$|R_\sigma(u)| \leq \left| k_\sigma - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\, dx \right| \left| \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right| + O(\text{size}(\mathcal{T})).$$

- Pour n'importe lequel des choix de k_σ on a

$$\left| k_\sigma - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\, dx \right| \leq C \|\nabla k\|_\infty \text{size}(\mathcal{T}).$$

$$R_\sigma(u) = k_\sigma \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

Nouveau terme dans l'estimation

$$|R_\sigma(u)| \leq \left| k_\sigma - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\, dx \right| \left| \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right| + O(\mathrm{size}(\mathcal{T})).$$

- Pour n'importe lequel des choix de k_σ on a

$$\left| k_\sigma - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\, dx \right| \leq C\|\nabla k\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}).$$

- Avec des formules de Taylor on trouve aussi

$$\left| \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right| \leq C \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_\mathcal{D} |\nabla u|^2 + |D^2 u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Retour

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_{\mathcal{K}}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_{\mathcal{L}}}} \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma k(x) \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x) \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx \overset{\text{def}}{=} k_{\mathcal{K}} \int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx = k_{\mathcal{L}} \int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{KL}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{KL}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\,dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\,dx \overset{\text{def}}{=} k_\mathcal{K}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\,dx = k_\mathcal{L}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\,dx.$$

Formules de Taylor pour $x \in \sigma$

ATTENTION : u n'est pas régulière mais $u_{|\mathcal{K}}$ et $u_{|\mathcal{L}}$ le sont.

$$u(x_\mathcal{K}) = u(x) + \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot(x_\mathcal{K} - x) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2),$$

$$u(x_\mathcal{L}) = u(x) + \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot(x_\mathcal{L} - x) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2).$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_{\mathcal{K}}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_{\mathcal{L}}}} \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma k(x) \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x) \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx \overset{\text{def}}{=} k_{\mathcal{K}} \int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx = k_{\mathcal{L}} \int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx.$$

Formules de Taylor pour $x \in \sigma$

$$u(x_{\mathcal{K}}) = u(x) + \nabla u_{|\mathcal{K}}(x) \cdot (-d_{\mathcal{K}\sigma} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + x_\sigma - x) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2),$$

$$u(x_{\mathcal{L}}) = u(x) + \nabla u_{|\mathcal{L}}(x) \cdot (d_{\mathcal{L}\sigma} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + x_\sigma - x) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2).$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx \overset{\text{def}}{=} k_\mathcal{K}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx = k_\mathcal{L}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

Formules de Taylor pour $x \in \sigma$

$$u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K}) = d_{\mathcal{L}\sigma}\nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + d_{\mathcal{K}\sigma}\nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + O(\text{size}(\mathcal{T})^2).$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{KL}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_{\mathcal{K}}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_{\mathcal{L}}}} \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{KL}}} - \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma k(x) \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} \, dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x) \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} \, dx \stackrel{\text{def}}{=} k_{\mathcal{K}} \int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} \, dx = k_{\mathcal{L}} \int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} \, dx.$$

Formules de Taylor pour $x \in \sigma$

$$u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}}) = \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_{\mathcal{L}}} \left(k_{\mathcal{L}} \nabla u_{|\mathcal{L}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} \right) + \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_{\mathcal{K}}} \left(k_{\mathcal{K}} \nabla u_{|\mathcal{K}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}} \right) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{KL}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{KL}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\, dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\, dx \overset{\text{def}}{=} k_\mathcal{K}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\, dx = k_\mathcal{L}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\, dx.$$

Formules de Taylor pour $x \in \sigma$

$$u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K}) = \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}\left(k_\mathcal{L}\nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\right) + \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}}\left(k_\mathcal{K}\nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\right) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

On intègre sur σ

$$|\sigma|(u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})) = \left(\frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}} + \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}}\right)\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{KL}}\, dx + O(\text{size}(\mathcal{T})^3).$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx \stackrel{\text{def}}{=} k_\mathcal{K}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx = k_\mathcal{L}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx.$$

Formules de Taylor pour $x \in \sigma$

$$u(x_\mathcal{L})-u(x_\mathcal{K}) = \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}\Big(k_\mathcal{L}\nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\Big)+\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}}\Big(k_\mathcal{K}\nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\Big)+O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

On intègre sur σ

$$\frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}} + \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} = \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx + O(\text{size}(\mathcal{T})).$$

Retour

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\mathrm{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise $\chi_\sigma(x,y)$, une direction ξ et $y(x)$ la projection d'un point $x \in \Omega$ sur le bord selon ξ.
- Somme télescopique :

$$|u_{\mathcal{K}}|^2 = |u_{\mathcal{K}_1}|^2 = \sum_{i=1}^{m-1} (|u_{\mathcal{K}_i}|^2 - |u_{\mathcal{K}_{i+1}}|^2) + |u_{\mathcal{K}_m}|^2,$$

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\mathrm{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise $\chi_\sigma(x, y)$, une direction ξ et $y(x)$ la projection d'un point $x \in \Omega$ sur le bord selon ξ.
- Somme télescopique :

$$|u_{\mathcal{K}}|^2 \leq C \left(\sum_{i=1}^{m-1} |u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}|(|u_{\mathcal{K}_i}| + |u_{\mathcal{K}_{i+1}}|) \right) + |u_{\mathcal{K}_m}|^2.$$

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\mathrm{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise $\chi_\sigma(x, y)$, une direction ξ et $y(x)$ la projection d'un point $x \in \Omega$ sur le bord selon ξ.
- Somme télescopique :

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} |\mathcal{K}||u_{\mathcal{K}}|^2 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}|(|u_{\mathcal{K}}| + |u_{\mathcal{L}}|) \left(\int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x))\, dx \right).$$

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\mathrm{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise $\chi_\sigma(x, y)$, une direction ξ et $y(x)$ la projection d'un point $x \in \Omega$ sur le bord selon ξ.
- Somme télescopique :

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} |\mathcal{K}||u_{\mathcal{K}}|^2 \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right| (|u_{\mathcal{K}}| + |u_{\mathcal{L}}|).$$

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\mathrm{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise $\chi_\sigma(x, y)$, une direction ξ et $y(x)$ la projection d'un point $x \in \Omega$ sur le bord selon ξ.
- Somme télescopique :

$$\|u^{\mathfrak{m}}\|_{L^2}^2 \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Andreianov–Gutnic–Wittbold, '04)

- Rappel :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : |\mathcal{D}| = \frac{1}{2}(\sin \alpha_{\mathcal{D}})|\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Rightarrow |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \leq C(\mathrm{reg}(\mathcal{T}))|\mathcal{D}|.$$

- On réutilise $\chi_\sigma(x,y)$, une direction ξ et $y(x)$ la projection d'un point $x \in \Omega$ sur le bord selon ξ.
- Somme télescopique :

$$\|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^2}^2 \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left|\frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

- On obtient le résultat si on montre maintenant que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2) \leq C\|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^2}^2 + C \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left|\frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}\right|^2.$$

On veut montrer

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2) \leq C \|u^{\mathfrak{m}}\|_{L^2}^2 + C \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right|^2 .$$

On veut montrer

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2) \leq C \|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^2}^2 + C \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right|^2 .$$

- On a tout d'abord

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} (|u_{\mathcal{K}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma| (d_{\mathcal{K}\sigma} + d_{\mathcal{L}\sigma}) (|u_{\mathcal{K}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2) \\ &\leq C \sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} |\mathcal{K}| |u_{\mathcal{K}}|^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma| (d_{\mathcal{L}\sigma} |u_{\mathcal{K}}|^2 + d_{\mathcal{K}\sigma} |u_{\mathcal{L}}|^2). \end{aligned}$$

On veut montrer

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(|u_{\mathcal{K}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2) \leq C\|u^{\mathfrak{M}}\|_{L^2}^2 + C\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \left|\frac{u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}\right|^2.$$

- On a tout d'abord

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(|u_{\mathcal{K}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma|(d_{\mathcal{K}\sigma} + d_{\mathcal{L}\sigma})(|u_{\mathcal{K}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2) \\ &\leq C\sum_{\mathcal{K}\in\mathfrak{M}} |\mathcal{K}||u_{\mathcal{K}}|^2 + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\sigma|(d_{\mathcal{L}\sigma}|u_{\mathcal{K}}|^2 + d_{\mathcal{K}\sigma}|u_{\mathcal{L}}|^2).\end{aligned}$$

- On remarque maintenant que

$$d_{\mathcal{L}\sigma}|u_{\mathcal{K}}|^2 \leq \begin{cases} 2^2 d_{\mathcal{L}\sigma}|u_{\mathcal{L}}|^2, & \text{si } |u_{\mathcal{K}}| \leq 2|u_{\mathcal{L}}| \\ 2^2 d_{\mathcal{L}\sigma}|u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}|^2, & \text{si } |u_{\mathcal{K}}| > 2|u_{\mathcal{L}}| \end{cases}.$$

Retour

Grandes étapes

- Estimation d'énergie :

$$\sup_n \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} \leq C(\Omega, f).$$

Grandes étapes

- Estimation d'énergie :

$$\sup_n \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} \leq C(\Omega, f).$$

- Théorème de compacité faible L^2 (similaire à celui de VF4) :
  Il existe $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que (modulo sous-suite !)

$$u^{\mathfrak{M}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$u^{\mathfrak{M}^*_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \nabla u \text{ dans } (L^2(\Omega))^2.$$

- On obtient immédiatement que la limite u est bien l'unique solution faible du problème initial.
- Pour la convergence forte on a

$$2\int_\Omega (A(x)\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}, \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})\, dx = \int_\Omega f(x) u^{\mathfrak{M}_n}\, dx + \int_\Omega f(x) u^{\mathfrak{M}^*_n}\, dx,$$

et on passe à la limite dans le second membre.

$$\nabla^{\mathcal{N}}_{\mathcal{Q}} u^{\mathcal{T}} = \nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}), \forall \mathcal{Q} \subset \mathcal{D},$$

$$\nabla^{\mathcal{N}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} 1_{\mathcal{Q}} \nabla^{\mathcal{N}}_{\mathcal{Q}} u^{\mathcal{T}},$$

$$|\mathcal{D}| \nabla^{\mathcal{T}}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} |\mathcal{Q}| \nabla^{\mathcal{N}}_{\mathcal{Q}} u^{\mathcal{T}}.$$

Comparaison des gradients

- $\|\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}\|_{L^p} \leq \|\nabla^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}\|_{L^p}.$
- $\|\nabla^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}\|_{L^p} \leq C(1 + \|\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}}\|_{L^p}).$

Estimation d'énergie

- $\|\nabla^{\mathcal{N}} u^{\mathcal{T}}\|_{L^p} \leq C\left(1 + \|f\|_{L^{p'}}^{\frac{1}{p-1}}\right).$

Toutes les constantes dépendent de $\mathrm{reg}(\mathcal{T})$.

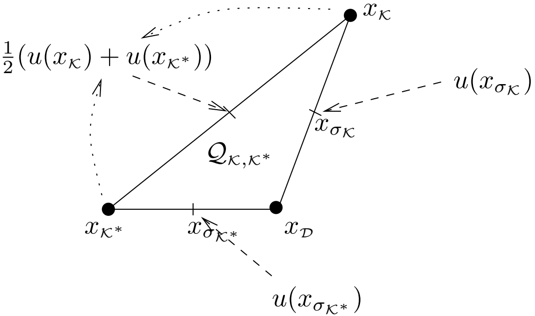
La consistance du nouveau gradient

Proposition

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla u(x) - \nabla^{\mathcal{N}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u(x)|^2 \, dx \\ \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} \left(1 + |\nabla u|^2 + |\nabla^2 u|^p\right) \, dx, \ \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}.$$

Démonstration : On introduit $\mathbb{P}^{\mathfrak{D}} u$ une projection affine de u sur les quarts de diamants $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^{\mathfrak{D}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} u(x_{\sigma\mathcal{K}}) &= u(x_{\sigma\mathcal{K}}),\\
\mathbb{P}^{\mathfrak{D}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} u(x_{\sigma\mathcal{K}^*}) &= u(x_{\sigma\mathcal{K}^*}),\\
\mathbb{P}^{\mathfrak{D}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} u\left(\frac{x_{\mathcal{K}} + x_{\mathcal{K}^*}}{2}\right) &= \frac{u(x_{\mathcal{K}}) + u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}.
\end{aligned}$$



- Le gradient de $\mathbb{P}^{\mathfrak{Q}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} u$ est donné par

$$\nabla \mathbb{P}^{\mathfrak{Q}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} u \quad = \quad \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}})+u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}}|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}})+u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|} \boldsymbol{\nu}^* \right).$$

- Le gradient de $\mathbb{P}^{\mathfrak{Q}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} u$ est donné par

$$\nabla \mathbb{P}^{\mathfrak{Q}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} u \quad = \quad \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}})+u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}}|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}})+u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|} \boldsymbol{\nu}^* \right).$$

- L'erreur de consistance de cette projection

$$T_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) = \nabla u(z) - \nabla \mathbb{P}^{\mathfrak{Q}}_{\mathcal{Q}} u, \quad \forall z \in \mathcal{Q}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}.$$

est classiquement controlée par

$$\int_{\mathcal{Q}} |T_{\overline{\mathcal{Q}}}(z)|^2 \, dx \leq C \mathrm{size}(\mathcal{T})^2 \int_{\mathcal{Q}} |\nabla^2 u(z)|^2 \, dx, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}.$$

- Le gradient de $\mathbb{P}^{\mathfrak{Q}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} u$ est donné par

$$\nabla \mathbb{P}^{\mathfrak{Q}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} u = \frac{2}{\sin \alpha_{\mathcal{D}}} \left(\frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}})+u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}}|} \boldsymbol{\nu} + \frac{u(x_{\sigma_{\mathcal{K}}}) - \frac{u(x_{\mathcal{K}})+u(x_{\mathcal{K}^*})}{2}}{|\sigma_{\mathcal{K}^*}|} \boldsymbol{\nu}^* \right).$$

- L'erreur de consistance de cette projection

$$T_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) = \nabla u(z) - \nabla \mathbb{P}^{\mathfrak{Q}}_{\mathcal{Q}} u, \quad \forall z \in \mathcal{Q}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}.$$

est classiquement controlée par

$$\int_{\mathcal{Q}} |T_{\overline{\mathcal{Q}}}(z)|^2 \, dx \leq C \mathrm{size}(\mathcal{T})^2 \int_{\mathcal{Q}} |\nabla^2 u(z)|^2 \, dx, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}.$$

- On a alors

$$\nabla u(z) - \nabla^{\mathcal{N}}_{\mathcal{Q}} \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u(z) = T_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) + B_{\mathcal{Q}} \bar{\delta}$$

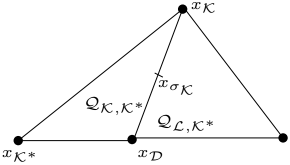
avec par exemple :

$$\bar{\delta}_{\mathcal{K}^*} = u(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) - \frac{1}{2} \left(u(x_{\mathcal{K}^*}) + \frac{|\sigma_{\mathcal{L}}| u(x_{\mathcal{K}}) + |\sigma_{\mathcal{K}}| u(x_{\mathcal{L}})}{|\sigma_{\mathcal{K}}| + |\sigma_{\mathcal{L}}|} \right) = O(\mathrm{size}(\mathcal{T})),$$

alors que $B_{\mathcal{Q}} = O(\mathrm{size}(\mathcal{T})^{-1})$.

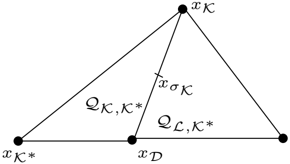
En utilisant la définition de $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ et la continuité des flux sur chaque arête du diamant on obtient

$$\left(\left(\frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}|}\int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} A(x)\nabla u(x) - \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}|}\int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} A(x)\nabla^{\mathcal{N}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u\right), \boldsymbol{\nu}^*\right)$$
$$-\left(\left(\frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}|}\int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}} A(x)\nabla u(x) - \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}|}\int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}} A(x)\nabla^{\mathcal{N}}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u\right), \boldsymbol{\nu}^*\right)$$
$$= R^{\varphi}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*},\sigma_{\mathcal{K}}} - R^{\varphi}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*},\sigma_{\mathcal{K}}}.$$



En utilisant la définition de $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ et la continuité des flux sur chaque arête du diamant on obtient

$$\left(\left(\frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}|}\int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} A(x)\nabla u(x) - \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}|}\int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} A(x)\nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^{\mathcal{N}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u\right), \boldsymbol{\nu}^*\right)$$
$$-\left(\left(\frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}|}\int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}} A(x)\nabla u(x) - \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}|}\int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}} A(x)\nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^{\mathcal{N}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u\right), \boldsymbol{\nu}^*\right)$$
$$= R^{\varphi}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*},\sigma_{\mathcal{K}}} - R^{\varphi}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*},\sigma_{\mathcal{K}}}.$$



$\times|\sigma_{\mathcal{K}}|\overline{\delta_{\mathcal{K}}}$

En utilisant la définition de $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ et la continuité des flux sur chaque arête du diamant on obtient

$$\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}}\int_{\mathcal{Q}}\left(A(x)(\nabla u(x)-\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u),B_{\mathcal{Q}}\bar{\delta}\right)\,dx \\ \leq \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}}|\mathcal{Q}||B_{\mathcal{Q}}\bar{\delta}|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{Q}}}|R_{\mathcal{Q},\sigma}^{\varphi}|$$

En utilisant la définition de $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ et la continuité des flux sur chaque arête du diamant on obtient

$$\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}}\int_{\mathcal{Q}}(A(x)(\nabla u(x)-\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u),\nabla u(x)-\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u+T_{\overline{\mathcal{Q}}}(x))\,dx$$
$$\leq \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}}|\mathcal{Q}||B_{\mathcal{Q}}\bar{\delta}|\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{Q}}}|R_{\mathcal{Q},\sigma}^{\varphi}|$$

En utilisant la définition de $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ et la continuité des flux sur chaque arête du diamant on obtient

$$\sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (A(x)(\nabla u(x) - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u), \nabla u(x) - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u)\, dx$$

$$\leq \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \left(\int_{\mathcal{Q}} |\nabla u(x) - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u(x)|\, dx + \int_{\mathcal{Q}} |T_{\overline{\mathcal{Q}}}(x)|\, dx\right)$$

$$\times \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{Q}}} (|R_{\mathcal{Q},\sigma}^{\varphi}| + |R_{\mathcal{Q},\sigma}^{x}|)$$

$$+ \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (A(x)(\nabla u(x) - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbb{P}^{\mathcal{T}}u), T_{\overline{\mathcal{Q}}}(x))\, dx,$$

Retour

- **Etape 1 :**

  Consistance : $$\Big((A_\mathcal{K}\nabla\varphi), G\Big)_{A^{-1},\mathcal{K}} + \int_\mathcal{K} \varphi \operatorname{div}^\mathcal{K} G\,dx$$
  $$= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} G_{\mathcal{K},\sigma}\left(\int_\sigma \varphi\right), \forall\mathcal{K}, \forall G \in \mathbb{R}^\mathcal{E}, \forall\varphi \text{ affine.}$$

  On applique cela à $\varphi(x) = b\cdot(x - x_\mathcal{K})$, $b \in \mathbb{R}^2$, il vient
  $$M_\mathcal{K} N_\mathcal{K} = R_\mathcal{K}. \qquad (\star)$$

- **Etape 1 :**

  Consistance : $$\big((A_{\mathcal{K}}\nabla\varphi), G\big)_{A^{-1},\mathcal{K}} + \int_{\mathcal{K}} \varphi \,\mathrm{div}^{\mathcal{K}} G\, dx = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma}\left(\int_\sigma \varphi\right), \forall\mathcal{K}, \forall G\in\mathbb{R}^{\mathcal{E}}, \forall\varphi \text{ affine.}$$

  On applique cela à $\varphi(x) = b\cdot(x - x_{\mathcal{K}})$, $b\in\mathbb{R}^2$, il vient
  $$M_{\mathcal{K}} N_{\mathcal{K}} = R_{\mathcal{K}}. \qquad (\star)$$

- **Etape 2 :** La matrice $M_{\mathcal{K}} = \frac{1}{|\mathcal{K}|} R_{\mathcal{K}} A_{\mathcal{K}}^{-1} {}^t R_{\mathcal{K}}$ vérifie $(\star)$.

- **Etape 1 :**

  Consistance : $$\big((A_\mathcal{K}\nabla\varphi), G\big)_{A^{-1},\mathcal{K}} + \int_\mathcal{K} \varphi \operatorname{div}^\mathcal{K} G\,dx$$
  $$= \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} G_{\mathcal{K},\sigma}\left(\int_\sigma \varphi\right), \forall\mathcal{K}, \forall G\in\mathbb{R}^\mathcal{E}, \forall\varphi \text{ affine.}$$

  On applique cela à $\varphi(x) = b\cdot(x - x_\mathcal{K})$, $b\in\mathbb{R}^2$, il vient
  $$M_\mathcal{K} N_\mathcal{K} = R_\mathcal{K}. \qquad (\star)$$

- **Etape 2 :** La matrice $M_\mathcal{K} = \frac{1}{|\mathcal{K}|} R_\mathcal{K} A_\mathcal{K}^{-1}\,{}^tR_\mathcal{K}$ vérifie $(\star)$.
- **Etape 3 :** Si $M_\mathcal{K} N_\mathcal{K} = 0$, alors on a
  $$\ker {}^tC_\mathcal{K} \subset \ker M_\mathcal{K} \quad \Rightarrow \exists P_\mathcal{K}, \quad M_\mathcal{K} = P_\mathcal{K}\,{}^tC_\mathcal{K}.$$
  Comme $M_\mathcal{K}$ est symétrique
  $$P_\mathcal{K}\,{}^tC_\mathcal{K} = C_\mathcal{K}\,{}^tP_\mathcal{K} \quad \Rightarrow P_\mathcal{K} = C_\mathcal{K} \underbrace{{}^tP_\mathcal{K} C_\mathcal{K}\left({}^tC_\mathcal{K} C_\mathcal{K}\right)^{-1}}_{\stackrel{\text{def}}{=} U_\mathcal{K}}.$$
  On vérifie aisément que $U_\mathcal{K}$ est SDP.

Soient $\nu = (\nu_\mathcal{K})_\mathcal{K}$ des paramètres positifs. On note

$$L_\nu(\mathcal{T}) = \Big\{ (u^\mathcal{T}, \mathbf{v}^\mathcal{T}, F^\mathcal{T}) \text{ vérifiant, pour toute arête } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$$

$$u_\mathcal{K} + \mathbf{v}_\mathcal{K} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{K}) - \nu_\mathcal{K} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_\mathcal{L} + \mathbf{v}_\mathcal{L} \cdot (x_\sigma - x_\mathcal{L}) - \nu_\mathcal{L} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} \Big\}.$$

THÉORÈME (INÉGALITÉ DE POINCARÉ)

Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de $\mathrm{reg}(\mathcal{T})$ telle que

$$\forall (u^\mathcal{T}, \mathbf{v}^\mathcal{T}, F) \in L_\nu(\mathcal{T}),\ \|u^\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega)} \leq C(\|\mathbf{v}^\mathcal{T}\|_{L^2(\Omega)} + N(\nu, F)),$$

avec

$$N(\nu, F) = \left(\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}} |\mathcal{K}|^2 \nu_\mathcal{K}^2 F_{\mathcal{K},\sigma}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}}|\mathcal{K}|F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}}|\mathcal{L}|F_{\mathcal{L},\sigma} \quad (\star)$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} \quad (\star)$$

On exprime $u^{\mathcal{T}}$ à l'aide de flux

Soit $w \in H^2(B(0,R))$ telle que $-\Delta w = u^{\mathcal{T}}$ dans Ω. On a alors

$$|\mathcal{K}| u_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \left(- \int_\sigma \nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma}.$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} \quad (\star)$$

ON EXPRIME $u^{\mathcal{T}}$ À L'AIDE DE FLUX

Soit $w \in H^2(B(0,R))$ telle que $-\Delta w = u^{\mathcal{T}}$ dans Ω. On a alors

$$|\mathcal{K}| u_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \left(- \int_\sigma \nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma}.$$

ON MULTIPLIE $(\star)$ PAR LE FLUX DE w

N.B. : $G_{\mathcal{K},\sigma} = -G_{\mathcal{L},\sigma}$

$$\sum_{\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} G_{\mathcal{K},\sigma} + u_{\mathcal{L}} G_{\mathcal{L},\sigma}) + (\mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) G_{\mathcal{K},\sigma} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) G_{\mathcal{L},\sigma})$$
$$- (\nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma} + \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} G_{\mathcal{L},\sigma}) = 0.$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} \quad (\star)$$

On exprime $u^{\mathcal{T}}$ à l'aide de flux

Soit $w \in H^2(B(0,R))$ telle que $-\Delta w = u^{\mathcal{T}}$ dans Ω. On a alors

$$|\mathcal{K}| u_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \left(- \int_\sigma \nabla w \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} G_{\mathcal{K},\sigma}.$$

On multiplie $(\star)$ par le flux de w N.B. : $G_{\mathcal{K},\sigma} = -G_{\mathcal{L},\sigma}$

$$\sum_{\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} G_{\mathcal{K},\sigma} + u_{\mathcal{L}} G_{\mathcal{L},\sigma}) + (\mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) G_{\mathcal{K},\sigma} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) G_{\mathcal{L},\sigma})$$

$$- (\nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma} + \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma} G_{\mathcal{L},\sigma}) = 0.$$

On ordonne par volumes de contrôle

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} |\mathcal{K}| |u_{\mathcal{K}}|^2 = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) G_{\mathcal{K},\sigma} \right) + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma} \right).$$

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 = \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) G_{\mathcal{K},\sigma}\right)}_{=T_1} + \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma}\right)}_{=T_2}.$$

Premier terme

$$T_1 = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \underbrace{\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) \otimes \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}\right)}_{|\mathcal{K}|\mathrm{Id}} \left(\frac{1}{|\mathcal{K}|}\int_{\mathcal{K}} \nabla w\right) + O(\mathrm{size}(\mathcal{T}))\|\mathbf{v}^{\mathcal{T}}\|_{L^2}\|.$$

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 = \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) G_{\mathcal{K},\sigma} \right)}_{=T_1} + \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma} \right)}_{=T_2}.$$

Premier terme

$$T_1 = \int_\Omega \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \cdot \nabla w + O(\mathrm{size}(\mathcal{T})).$$

Le $O(\mathrm{size}(\mathcal{T}))$ contient des termes de la forme

$$\left| \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \nabla w - \frac{1}{|\mathcal{K}|} \int_{\mathcal{K}} \nabla w \right|^2 \leq C \frac{\mathrm{diam}(\mathcal{K})}{|\sigma|} \int_{\mathcal{K}} |\nabla^2 w|^2.$$

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 = \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) G_{\mathcal{K},\sigma} \right)}_{=T_1} + \underbrace{\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} G_{\mathcal{K},\sigma} \right)}_{=T_2}.$$

Premier terme

$$|T_1| \leq \|\mathbf{v}^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \underbrace{\|\nabla w\|_{L^2}}_{\leq C\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}} + O(\text{size}(\mathcal{T}))\|\mathbf{v}^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \underbrace{\|w\|_{H^2}}_{\leq C\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}}.$$

Idem pour le deuxième terme

Retour

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}. \tag{7}$$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0. \tag{8}$$

$$|\mathcal{K}| A_{\mathcal{K}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}). \tag{9}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}. \tag{10}$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}. \quad (7)$$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0. \quad (8)$$

$$|\mathcal{K}| A_{\mathcal{K}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}). \quad (9)$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}. \quad (10)$$

Obtention de l'estimation sous l'hypothèse $\nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \leq C_0$.

- On multiplie (10) par $u_{\mathcal{K}}$ et on somme. En utilisant (8), il vient

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \int_\Omega u^{\mathcal{T}} f.$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}. \tag{7}$$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0. \tag{8}$$

$$|\mathcal{K}| A_{\mathcal{K}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}). \tag{9}$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}. \tag{10}$$

Obtention de l'estimation sous l'hypothèse $\nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \leq C_0$.

- On multiplie (10) par $u_{\mathcal{K}}$ et on somme. En utilisant (8), il vient

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \int_\Omega u^{\mathcal{T}} f.$$

- On utilise (7), on réordonne par maille,

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} (x_{\mathcal{K}} - x_\sigma) \right) + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| |F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 = \int_\Omega u^{\mathcal{T}} f.$$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}. \quad (7)$$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0. \quad (8)$$

$$|\mathcal{K}| A_{\mathcal{K}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(x_\sigma - x_{\mathcal{K}}). \quad (9)$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}. \quad (10)$$

Obtention de l'estimation sous l'hypothèse $\nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \leq C_0$.

- On multiplie (10) par $u_{\mathcal{K}}$ et on somme. En utilisant (8), il vient

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \int_\Omega u^{\mathcal{T}} f.$$

- On utilise (7), on réordonne par maille, puis on utilise (9)

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{E}} |\mathcal{K}| \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (A_{\mathcal{K}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}}) + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| |F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 = \int_\Omega u^{\mathcal{T}} f.$$

Correspond à $\displaystyle\int_\Omega (A(x)\nabla u, \nabla u)\, dx = \int_\Omega f u \, dx.$

$$u_{\mathcal{K}} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}) - \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| F_{\mathcal{K},\sigma} = u_{\mathcal{L}} + \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot (x_\sigma - x_{\mathcal{L}}) - \nu_{\mathcal{L}} |\mathcal{L}| F_{\mathcal{L},\sigma}. \quad (7)$$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} + F_{\mathcal{L},\sigma} = 0. \quad (8)$$

$$|\mathcal{K}| A_{\mathcal{K}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} (x_\sigma - x_{\mathcal{K}}). \quad (9)$$

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma} = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}. \quad (10)$$

Obtention de l'estimation sous l'hypothèse $\nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| \leq C_0$.

- On multiplie (10) par $u_{\mathcal{K}}$ et on somme. En utilisant (8), il vient

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \int_\Omega u^{\mathcal{T}} f.$$

- On utilise (7), on réordonne par maille, puis on utilise (9)

$$\|\mathbf{v}^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| |F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 \leq C \|f\|_{L^2} \|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}.$$

On conclut par l'inégalité de Poincaré

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 + \|\mathbf{v}^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2 + \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \nu_{\mathcal{K}} |\mathcal{K}| |F_{\mathcal{K},\sigma}|^2 \leq C' \|f\|_{L^2}^2.$$

Retour