Volumes finis pour les problèmes elliptiques hétérogènes anisotropes sur maillages généraux

Partie 1

Franck BOYER

Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités
CNRS / Université Paul Cézanne

Ecole d'été du GDR MOAD
Fréjus, 31 Aout - 3 Septembre 2009

Plan du cours

Partie 1

- Introduction : modèles / problématiques.
- Le schéma volumes finis de base et les outils d'analyse associés.

Partie 2

- Revue de schémas plus évolués et de leurs propriétés.
- Benchmark

Partie 3

- Les schémas DDFV dans le cadre scalaire non-linéaire.
- Les schémas DDFV pour le problème de Stokes.

Partie 1 - Plan

1. **Introduction**
   - Avant-Propos
   - Ecoulements complexes en milieux poreux
   - Ecoulements de fluides complexes visqueux incompressibles
   - Autres modèles
   - Cahier des charges
2. **Le Schéma Volumes Finis basique pour le problème de Laplace**
   - Notations. Construction
   - Analyse du schéma VF4
     - Existence. Unicité. Stabilité.
     - Principe du maximum discret
     - Gradient discret. Compacité. Convergence
     - Estimation de l'erreur
   - Extensions de VF4
     - Diffusion isotrope hétérogène
     - Second membre non régulier
     - Un exemple un peu plus complexe
   - Les limitations de VF4

Avant-Propos

Ce dont je ne parlerai pas dans ce cours

- La prise en compte de conditions aux limites exotiques (Fourier par exemple).
- Les problèmes 3D (**Cf. exposé de F. Hubert**)
- Les méthodes Discontinuous Galerkin **(Di Pietro–Ern '08)**
- Beaucoup d'autres schémas (dont peut-être votre schéma favori).
- Les solveurs associés (décomposition de domaines, multigrille, ...)

Je ne présenterai pas le schéma idéal !

Remerciements B. Andreianov, F. Hubert, S. Krell

Exemples d'écoulements de Darcy ...

Ecoulement d'un fluide incompressible en milieu poreux

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \text{conservation de la masse,}$$

$$v = -\varphi(x, \nabla p), \quad \text{loi constitutive pour la vitesse de filtration.}$$

Ecoulement d'un fluide incompressible en milieu poreux

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \text{conservation de la masse,}$$

$$v = -\varphi(x, \nabla p), \quad \text{loi constitutive pour la vitesse de filtration.}$$

Loi de Darcy

$$v = -K(x)\nabla p,$$

le tenseur $K(x)$ est la perméabilité.

Ecoulement d'un fluide incompressible en milieu poreux

$$\operatorname{div} v = 0, \quad \text{conservation de la masse,}$$

$$v = -\varphi(x, \nabla p), \quad \text{loi constitutive pour la vitesse de filtration.}$$

Régimes non linéaires

Dans certains cas, on doit considérer des effets non linéaires :

- Loi de Darcy-Forchheimer : En cas de forts gradients de pression

$$-\nabla p = \frac{1}{k} v + \beta |v| v, \iff v = \frac{-2k\nabla p}{1 + \sqrt{1 + 4\beta k^2 |\nabla p|}}.$$

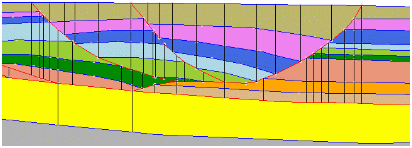
- Loi de puissance : Effets non-newtoniens

$$|v|^{n-1} v = -k\nabla p, \iff v = -|k\nabla p|^{\frac{1}{n}-1}(k\nabla p).$$

Dans tous les cas, la loi $\nabla p \mapsto v = -\varphi(x, \nabla p)$ est monotone

HÉTÉROGÉNÉITÉS, DISCONTINUITÉS, ANISOTROPIE

Exemple de structure souterraine



Chaque couleur représente un milieu poreux différent :

$$-\mathrm{div}\,(\varphi(x, \nabla p)) = f.$$

- $\varphi(x, \cdot)$ peut être linéaire pour certains matériaux.
- $\varphi(x, \cdot)$ peut être non linéaire pour d'autres.
- Certains matériaux sont très perméables, d'autres très imperméables.
- Fortes anisotropies dues à des directions privilégiées dans la structure des pores.

CONDITIONS DE TRANSMISSION

- La pression est continue aux interfaces.
- Le flux de masse $\varphi(x, \nabla p) \cdot \boldsymbol{\nu}$ est continu aux interfaces.

Ecoulements multiphasiques en milieu poreux

- Couplage non-linéaire d'une équation de Darcy avec un problème hyperbolique.
- En pratique on résout successivement via un schéma en temps :
  1) Un problème de Darcy dont la perméabilité est une fonction de la saturation.
  $$-\mathrm{div}\,(K(u)\nabla p) = f,$$
  2) Un problème hyperbolique non linéaire qui fait intervenir la vitesse de Darcy $v = -K(u)\nabla p$ calculée précédemment.
  $$\partial_t(\theta u) + \mathrm{div}\,(f(u)v) = 0.$$
- La première étape relève du problème étudié ici.
- On a besoin d'une bonne approximation des flux $(v \cdot \boldsymbol{\nu})$ dans la seconde étape.

Autres modèles en milieu poreux

Ecoulements multiphasiques en milieu poreux

- Couplage non-linéaire d'une équation de Darcy avec un problème hyperbolique.
- En pratique on résout successivement via un schéma en temps :
  1) Un problème de Darcy dont la perméabilité est une fonction de la saturation.
  $$-\text{div}\,(K(u)\nabla p) = f,$$
  2) Un problème hyperbolique non linéaire qui fait intervenir la vitesse de Darcy $v = -K(u)\nabla p$ calculée précédemment.
  $$\partial_t(\theta u) + \text{div}\,(f(u)v) = 0.$$
- La première étape relève du problème étudié ici.
- On a besoin d'une bonne approximation des flux $(v \cdot \boldsymbol{\nu})$ dans la seconde étape.

Convection-Diffusion d'un polluant

$$\partial_t(\theta c) + \text{div}\,(cv) - \text{div}\,(D(c,v)\nabla c) = 0,$$

où $D(c,v)$ est un tenseur de diffusion/dispersion et v la vitesse de Darcy.

Exemples 1

Equations de Navier-Stokes incompressible multifluide

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \dfrac{\partial \rho v}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho v \otimes v) - 2\mathrm{div}\,(\eta(\rho) D(v)) + \nabla p = \rho f + \mathcal{K}\delta_\Sigma, \\ \mathrm{div}\, v = 0. \end{cases}$$

avec $D(v) = (\nabla v + {}^t\nabla v)/2$.

Equations de Navier-Stokes incompressible multifluide

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \dfrac{\partial \rho v}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho v \otimes v) - 2\mathrm{div}\,(\eta(\rho) D(v)) + \nabla p = \rho f + \mathcal{K}\delta_\Sigma, \\ \mathrm{div}\, v = 0. \end{cases}$$

avec $D(v) = (\nabla v + {}^t\nabla v)/2$.

Après discrétisation en temps

$\rightsquigarrow$ Problème de type Stokes à viscosité variable avec terme source singulier

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t} v^{n+1} - 2\,\mathrm{div}\,(\eta(\rho^n) D(v^{n+1})) + \nabla p^{n+1} = \dfrac{1}{\Delta t} v^n + F^n + \mathcal{K}\delta_\Sigma^n, \\ \mathrm{div}\, v^{n+1} = 0. \end{cases}$$

Exemples 1

Equations de Navier-Stokes incompressible multifluide

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v \cdot \nabla \rho = 0, \\ \dfrac{\partial \rho v}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho v \otimes v) - 2\mathrm{div}\,(\eta(\rho) D(v)) + \nabla p = \rho f + \mathcal{K}\delta_\Sigma, \\ \mathrm{div}\, v = 0. \end{cases}$$

avec $D(v) = (\nabla v + {}^t\nabla v)/2$.

Après discrétisation en temps

$\rightsquigarrow$ Problème de type Stokes à viscosité variable avec terme source singulier

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t} v^{n+1} - 2\,\mathrm{div}\,(\eta(\rho^n) D(v^{n+1})) + \nabla p^{n+1} = \dfrac{1}{\Delta t} v^n + F^n + \mathcal{K}\delta_\Sigma^n, \\ \mathrm{div}\, v^{n+1} = 0. \end{cases}$$

Cas typique :

- ρ prend deux valeurs (pas de zones de mélange).
- η prend donc deux valeurs dont le rapport peut être important.

Modèles Navier-Stokes Oldroyd

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - (1-r)\mathrm{div}\,(2\eta D(v)) + \nabla p - \mathrm{div}\,\sigma = f, \\ \lambda \left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - W(v).\sigma + \sigma.W(v) + (v \cdot \nabla)\sigma \right) + \sigma = 2r\eta D(v), \\ \mathrm{div}\, v = 0, \end{cases}$$

avec $D(v) = (\nabla v + {}^t\nabla v)/2$ et $W(v) = (\nabla v - {}^t\nabla v)/2$.

Exemples 2

Modèles Navier-Stokes Oldroyd

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v - (1-r)\mathrm{div}\,(2\eta D(v)) + \nabla p - \mathrm{div}\,\sigma = f, \\ \lambda\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - W(v).\sigma + \sigma.W(v) + (v\cdot\nabla)\sigma\right) + \sigma = 2r\eta D(v), \\ \mathrm{div}\, v = 0, \end{cases}$$

avec $D(v) = (\nabla v + {}^t\nabla v)/2$ et $W(v) = (\nabla v - {}^t\nabla v)/2$.

Modèle de Smagorinski en turbulence

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v - \mathrm{div}\,(2\eta D(v)) - \mu_h \mathrm{div}\,(|D(v)|D(v)) + \nabla p = f, \\ \mathrm{div}\, v = 0. \end{cases}$$

Exemples 2

Modèles Navier-Stokes Oldroyd

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v - (1-r)\mathrm{div}\,(2\eta D(v)) + \nabla p - \mathrm{div}\,\sigma = f, \\ \lambda\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - W(v).\sigma + \sigma.W(v) + (v\cdot\nabla)\sigma\right) + \sigma = 2r\eta D(v), \\ \mathrm{div}\, v = 0, \end{cases}$$

avec $D(v) = (\nabla v + {}^t\nabla v)/2$ et $W(v) = (\nabla v - {}^t\nabla v)/2$.

Modèle de Smagorinski en turbulence

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v - \mathrm{div}\,(2\eta D(v)) - \mu_h \mathrm{div}\,(|D(v)|D(v)) + \nabla p = f, \\ \mathrm{div}\, v = 0. \end{cases}$$

Modèles d'écoulements non newtoniens (sang, glaciers, ...)

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(\eta(D(v))D(v)) + \nabla p = f, \\ \mathrm{div}\, v = 0, \end{cases}$$

avec $\eta(\sigma) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)e^{-\beta|\sigma|}$ par exemple.

Autres modèles

Elasticité

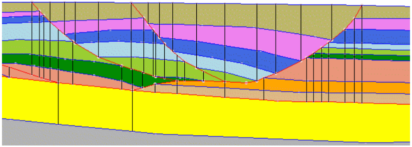
$$\begin{cases} \operatorname{div} \sigma = f, \\ \qquad \sigma = 2\mu(x) D(u) + \lambda(x)(\operatorname{div} u)\mathrm{Id} \end{cases}$$

Modèle en électrocardiologie

(Coudière–Pierre–Turpault '09)

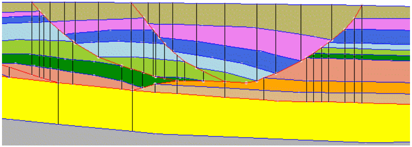
$$\begin{cases} u = u_i - u_e, \\ C(\partial_t u + f(u)) = -\operatorname{div}(G_e \nabla u_e), \quad \text{dans le coeur,} \\ \operatorname{div}((G_i + G_e)\nabla u_e) = -\operatorname{div}(G_i \nabla u), \quad \text{dans le coeur,} \\ \operatorname{div}(G_T \nabla u_T) = 0, \quad \text{dans le thorax,} \\ (G_i \nabla u_e) \cdot \boldsymbol{\nu} = -(G_i \nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \text{à l'interface coeur/thorax,} \\ (G_e \nabla u_e) \cdot \boldsymbol{\nu} = -(G_T \nabla u_T) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad \text{à l'interface coeur/thorax.} \end{cases}$$

Maxwell ...



Propriétés attendues des schémas

- Conservation locale de la masse et consistance des flux.
- Préservation des propriétés qualitatives des EDP (existence, unicité, monotonie, etc ...).
- Préservation des bornes physiques de la solution.
- Bonne précision, même sur des maillages grossiers et avec de fortes anisotropies et hétérogénéités.
- Implémentation "facile" et coût de calcul "raisonnable".



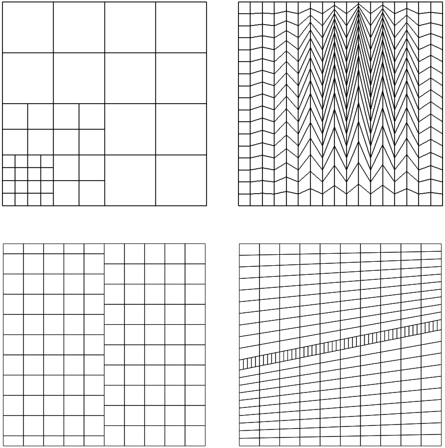
Propriétés attendues des schémas

- Conservation locale de la masse et consistance des flux.
- Préservation des propriétés qualitatives des EDP (existence, unicité, monotonie, etc ...).
- Préservation des bornes physiques de la solution.
- Bonne précision, même sur des maillages grossiers et avec de fortes anisotropies et hétérogénéités.
- Implémentation “facile” et coût de calcul “raisonnable”.

Contraintes faibles sur les maillages

- Maillages non conformes : grilles adaptées (ou pas !) à la géométrie du problème.
- Raffinement local.
- Cellules très déformées.
- Résultats honorables sur des maillages grossiers.

Exemples académiques de maillages



Partie 1 - Plan

(Eymard, Gallouët, Herbin, ’00→ ’09)

Définition (pas la plus générale)

- Ω un ouvert borné polygonal connexe de $\mathbb{R}^d$.
- Un maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$ est constitué de :
  - une famille finie de sous-domaines compacts, polyhédraux, convexes, non vides de Ω notés κ et appelés **volumes de contrôle** vérifiant
    - Si $\kappa \neq \mathcal{L}$, on a $\mathring{\kappa} \cap \mathring{\mathcal{L}} = \emptyset$.
    - $\overline{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathcal{T}} \kappa$.

(Eymard, Gallouët, Herbin, '00→ '09)

Définition (pas la plus générale)

- Ω un ouvert borné polygonal connexe de $\mathbb{R}^d$.
- Un maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$ est constitué de :
  - une famille finie de sous-domaines compacts, polyhédraux, convexes, non vides de Ω notés $\mathcal{K}$ et appelés **volumes de contrôle** vérifiant
    - Si $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$, on a $\mathring{\mathcal{K}} \cap \mathring{\mathcal{L}} = \emptyset$.
    - $\overline{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \mathcal{K}$.
  - une famille de points $(x_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}}$ tels que
    - Pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$, $x_{\mathcal{K}} \in \mathring{\mathcal{K}}$.
    - Pour tout $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{T}$, $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$, si $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ est de dimension $d-1$, alors c'est une face de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{L}$, notée $\mathcal{K}|\mathcal{L}$ et qui de plus, vérifie la **condition d'orthogonalité**
$$[x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}] \perp \mathcal{K}|\mathcal{L}. \tag{1}$$

(Eymard, Gallouët, Herbin, '00→ '09)

Définition (pas la plus générale)

- Ω un ouvert borné polygonal connexe de $\mathbb{R}^d$.
- Un maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$ est constitué de :
  - une famille finie de sous-domaines compacts, polyhédraux, convexes, non vides de Ω notés $\mathcal{K}$ et appelés **volumes de contrôle** vérifiant
    - Si $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$, on a $\mathring{\mathcal{K}} \cap \mathring{\mathcal{L}} = \emptyset$.
    - $\overline{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \mathcal{K}$.
  - une famille de points $(x_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}}$ tels que
    - Pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$, $x_{\mathcal{K}} \in \mathring{\mathcal{K}}$.
    - Pour tout $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{T}$, $\mathcal{K} \neq \mathcal{L}$, si $\mathcal{K} \cap \mathcal{L}$ est de dimension $d-1$, alors c'est une face de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{L}$, notée $\mathcal{K}|\mathcal{L}$ et qui de plus, vérifie la **condition d'orthogonalité**

$$[x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}] \perp \mathcal{K}|\mathcal{L}. \tag{1}$$

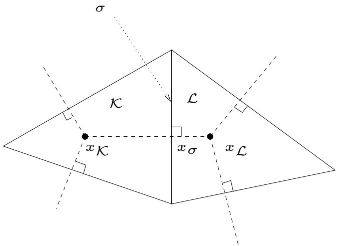
Notations

- Pas du maillage : $\mathrm{size}(\mathcal{T})$
- Ensembles d'arêtes : $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_{ext}$, $\mathcal{E}_{int}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$
- Normales : $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}}$, $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}$, $\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$
- Volumes. Mesures : $|\mathcal{K}|$, $|\sigma|$
- Distances : $d_{\mathcal{K}\sigma}$, $d_{\mathcal{L}\sigma}$, $d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$, d_σ

On considère le problème suivant

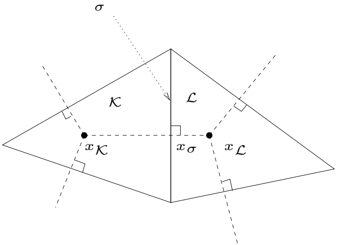
$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

sur un maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$ (ici formé de triangles)



Bilan sur un volume de contrôle $\mathcal{K}$

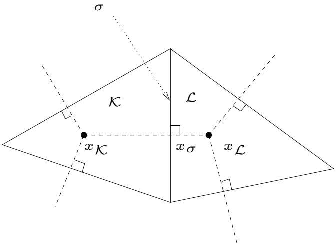
$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{K}} f = \int_{\mathcal{K}} -\Delta u = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{-\int_\sigma \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}}$$



$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

Conservativité locale pour le problème initial

$$\overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -\overline{F}_{\mathcal{L},\sigma}, \quad \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}.$$



$$|\mathcal{K}|f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

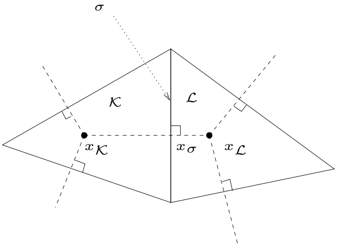
Conservativité locale pour le problème initial

$$\overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -\overline{F}_{\mathcal{L},\sigma}, \quad \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}.$$

Inconnues aux centres

On souhaite obtenir $u_{\mathcal{K}} \sim u(x_{\mathcal{K}})$

Notation : $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.



$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

Conservativité locale pour le problème initial

$$\overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -\overline{F}_{\mathcal{L},\sigma}, \quad \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}.$$

Inconnues aux centres

On souhaite obtenir $u_{\mathcal{K}} \sim u(x_{\mathcal{K}})$

Notation : $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.

Flux numériques

BUT : définir $u^{\mathcal{T}} \mapsto F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})$ qui approche le flux réel $\overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}$

Schéma numérique

Trouver $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que $|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}})$ pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}$.

Cas d'une arête intérieure

$\sigma \in \mathcal{E}_{int}$, $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}$.

$$x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

$$\text{si } x \in \sigma, \qquad (\nabla u(x)) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} + O(\text{size}(\mathcal{T}))$$

$$\Longrightarrow \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -|\sigma| \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} + O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

On pose donc

$$\boxed{F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}.}$$

Cas d'une arête intérieure

$$\sigma \in \mathcal{E}_{int},\ \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L}.$$

$$x_\mathcal{L} - x_\mathcal{K} = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

$$\text{si } x \in \sigma, \qquad (\nabla u(x)) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} + O(\text{size}(\mathcal{T}))$$

$$\Longrightarrow \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -|\sigma| \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} + O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

On pose donc

$$\boxed{F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = -|\sigma| \frac{u_\mathcal{L} - u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}.}$$

Remarque : On a la conservativité du schéma $F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = -F_{\mathcal{L},\sigma}(u^\mathcal{T})$

Notation :

$$F_{\mathcal{K},\mathcal{L}}(u^\mathcal{T}) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = -F_{\mathcal{L},\sigma}(u^\mathcal{T}).$$

Cas d'une arête extérieure $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$.

$$x_\sigma - x_\mathcal{K} = d_{\mathcal{K}\sigma}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}.$$

$$(\nabla u(x))\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \sim \frac{u(x_\sigma)-u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\sigma}} = \frac{0-u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\sigma}} \Leftarrow \text{condition au bord}$$

$$\Longrightarrow \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = -|\sigma|\frac{-u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\sigma}} + O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

On pose donc

$$\boxed{F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = -|\sigma|\frac{-u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}.}$$

Le schéma

On cherche $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que

$$\begin{cases} \forall K \in \mathcal{T}, \quad \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}, \ \text{ si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{-u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \ \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}. \end{cases} \tag{VF4}$$

Le schéma

On cherche $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que

$$\begin{cases} \forall K \in \mathcal{T}, \quad \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}, \quad \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{-u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}. \end{cases} \tag{VF4}$$

Remarques

- Il s'agit d'un système linéaire de N équations à N inconnues (N=nb de volumes de contrôle dans $\mathcal{T}$).
- Pourquoi TPFA ? **Two Point Flux Approximation**
- Pourquoi VF4 ? Stencil de 4 points en 2D sur maillages triangles.
- Sur maillage 2D cartésien uniforme : c'est le schéma à 5 points standard.

Le schéma

On cherche $u^{\mathcal{T}} = (u_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que

$$\begin{cases} \forall K \in \mathcal{T}, \quad \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}, \quad \text{si } \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}, \\ F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -|\sigma| \dfrac{-u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \quad \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}. \end{cases} \tag{VF4}$$

Notations - Approximation constante par morceaux

- On notera $f^{\mathcal{T}} = (f_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$.
- On associe à toute famille $v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, une fonction

$$v^{\mathcal{T}}(x) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} v_{\mathcal{K}} \mathbf{1}_{\mathcal{K}}(x).$$

- On a alors

$$\|v^{\mathcal{T}}\|_{L^\infty} = \sup_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} |v_{\mathcal{K}}|, \quad \|v^{\mathcal{T}}\|_{L^2} = \left(\sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} |\mathcal{K}||v_{\mathcal{K}}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

NOTATIONS

- Pour tout couple $(\mathcal{K},\mathcal{L})$ de volumes de contrôle voisins on note

$$D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}}) = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}.$$

- Pour toute arête intérieure $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ on note $D_\sigma(u^{\mathcal{T}}) = D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}})$, où l'on a choisi une *orientation* $\mathcal{K} \to \mathcal{L}$ une bonne fois pour toutes.
- Pour tout arête extérieure $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$ on note $D_\sigma(u^{\mathcal{T}}) = \frac{-u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}$.

LEMME (INTÉGRATION PAR PARTIES DISCRÈTE)

Soit $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ *une* **éventuelle** *solution de* (VF4), *alors pour tout* $v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$

$$\underbrace{\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| D_\sigma(u^{\mathcal{T}}) D_\sigma(v^{\mathcal{T}})}_{\overset{\text{def}}{=}[u^{\mathcal{T}},v^{\mathcal{T}}]_{1,\mathcal{T}}} = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} |\mathcal{K}| v_{\mathcal{K}} f_{\mathcal{K}} = (v^{\mathcal{T}}, f^{\mathcal{T}})_{L^2}.$$

$\rightsquigarrow$ **La conservativité locale est essentielle ici**

Lemme (Intégration par parties discrète)

Soit $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ *une* **éventuelle** *solution de* (VF4), *alors pour tout* $v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$

$$\underbrace{\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| D_\sigma(u^{\mathcal{T}}) D_\sigma(v^{\mathcal{T}})}_{\stackrel{\text{def}}{=} [u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}]_{1,\mathcal{T}}} = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}} |\kappa| v_\kappa f_\kappa = (v^{\mathcal{T}}, f^{\mathcal{T}})_{L^2}.$$

$\rightsquigarrow$ **La conservativité locale est essentielle ici**

Proposition

La forme bilinéaire

$$(u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \mapsto [u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}}]_{1,\mathcal{T}},$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ *appelé* **produit scalaire H^1_0 discret**. *La norme associée est appelée* **norme H^1_0 discrète** *et notée* $\|\cdot\|_{1,\mathcal{T}}$.

Théorème

Pour toute donnée $f \in L^2(\Omega)$, le schéma (VF4) *admet une unique solution $u^{\mathcal{T}}$ et on a*

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}\|f^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}\|f\|_{L^2}.$$

Théorème

Pour toute donnée $f \in L^2(\Omega)$, le schéma (VF4) *admet une unique solution $u^{\mathcal{T}}$ et on a*

$$\|u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq \|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}\|f^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \|u^{\mathcal{T}}\|_{L^2}\|f\|_{L^2}.$$

Pour obtenir une estimation H_0^1 discrète exploitable, on utilise le

Théorème (Inégalité de Poincaré discrète)

Pour tout maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$, on a

$$\forall v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}, \quad \|v^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|v^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}.$$

▸ Preuve de l'inégalité de Poincaré

Matrice du système

- Elle est symétrique définie positive (Cf. l'intégation par parties discrète).
- C'est une M-matrice $\Rightarrow$ principe du maximum discret vérifié

$$f^{\mathcal{T}} \geq 0 \Longrightarrow u^{\mathcal{T}} \geq 0.$$

En effet, la ligne κ de la matrice s'écrit

$$\sum_{\mathcal{L} \in V_{\mathcal{K}}} \underbrace{\tau_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}_{\geq 0}(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) = |\kappa| f_{\mathcal{K}}.$$

Matrice du système

- Elle est symétrique définie positive (Cf. l'intégation par parties discrète).
- C'est une M-matrice $\Rightarrow$ principe du maximum discret vérifié

$$f^{\mathcal{T}} \geq 0 \Longrightarrow u^{\mathcal{T}} \geq 0.$$

En effet, la ligne $\mathcal{K}$ de la matrice s'écrit

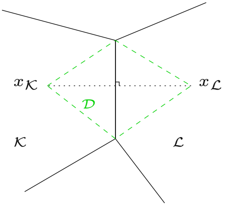
$$\sum_{\mathcal{L} \in V_{\mathcal{K}}} \underbrace{\tau_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}_{\geq 0}(u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) = |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}}.$$

Implémentation du schéma

- Parcours du maillage par arêtes et non par volumes de contrôle.
- Informations géométriques utilisées : $|\sigma|$, $d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$, $|\mathcal{K}|$.
- La seule méthode de quadrature utilisée (éventuellement) est pour le terme source.
- Estimation de l'erreur de quadrature $f^{\mathcal{T}} \mapsto u^{\mathcal{T}}$, $g^{\mathcal{T}} \mapsto v^{\mathcal{T}}$

$$\|u^{\mathcal{T}} - v^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq C_\Omega \|u^{\mathcal{T}} - v^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C_\Omega^2 \|f^{\mathcal{T}} - g^{\mathcal{T}}\|_{L^2}.$$

Cellule diamant



Gradient discret

Pour tout $v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on définit ($d =$ dimension)

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \quad \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} = \begin{cases} d \dfrac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = d D_\sigma(u^{\mathcal{T}}) \boldsymbol{\nu}, & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{int}, \\ d \dfrac{0 - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} = d D_\sigma(u^{\mathcal{T}}) \boldsymbol{\nu}, & \text{si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}, \end{cases}$$

$$\nabla^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}} \in (L^2(\Omega))^2.$$

Lien avec la norme H_0^1 discrète

$$\|v^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 = \frac{1}{d} \|\nabla^{\mathcal{T}} v^{\mathcal{T}}\|_{L^2}^2.$$

Théorème (Compacité faible)

Soit $(\mathcal{T}_n)_n$ *une suite de maillages orthogonaux admissibles avec* $\text{size}(\mathcal{T}_n) \to 0$ *et* $(u^{\mathcal{T}_n})_n$ *une famille de fonctions discrètes définies sur chacun des maillages telle que*

$$\sup_n \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} < +\infty.$$

Alors :

- *Il existe une fonction* $u \in L^2(\Omega)$, *et une sous-suite* $(u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}})_n$ *qui converge* **fortement** *vers* u *dans* $L^2(\Omega)$.

THÉORÈME (COMPACITÉ FAIBLE)

Soit $(\mathcal{T}_n)_n$ *une suite de maillages orthogonaux admissibles avec* $\text{size}(\mathcal{T}_n) \to 0$ *et* $(u^{\mathcal{T}_n})_n$ *une famille de fonctions discrètes définies sur chacun des maillages telle que*

$$\sup_n \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} < +\infty.$$

Alors :

- *Il existe une fonction* $u \in L^2(\Omega)$*, et une sous-suite* $(u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}})_n$ *qui converge* **fortement** *vers* u *dans* $L^2(\Omega)$*.*

De plus,

- *La fonction* u *est dans* $H_0^1(\Omega)$*.*
- *La suite des gradients discrets* $(\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}})_n$ *converge* **faiblement** *vers* ∇u *dans* $(L^2(\Omega))^d$*.*

▸ Preuve du Théorème de compacité

Théorème (Convergence du schéma VF4)

Soit $f \in L^2(\Omega)$ *et* $u \in H^1_0(\Omega)$*, l'unique solution du problème continu.*

Soit $(\mathcal{T}_n)_n$ *une famille de maillages orthogonaux admissibles avec* $\mathrm{size}(\mathcal{T}_n) \to 0$.

Pour tout n*, on note* $u^{\mathcal{T}_n} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_n}$ *l'unique solution du schéma sur le maillage* $\mathcal{T}_n$ *pour la donnée* f.

Théorème (Convergence du schéma VF4)

Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u \in H^1_0(\Omega)$, l'unique solution du problème continu.

Soit $(\mathcal{T}_n)_n$ une famille de maillages orthogonaux admissibles avec $\mathrm{size}(\mathcal{T}_n) \to 0$.

Pour tout n, on note $u^{\mathcal{T}_n} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_n}$ l'unique solution du schéma sur le maillage $\mathcal{T}_n$ pour la donnée f.
On a :

- *La suite $(u^{\mathcal{T}_n})_n$ converge* **fortement** *vers u dans $L^2(\Omega)$.*
- *La suite $(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})_n$ converge* **faiblement** *vers ∇u dans $(L^2(\Omega))^d$.*

De plus, si $d \geq 2$, la convergence **forte** *des gradients n'a lieu que si $f = u = 0$.*

Preuve de la convergence de VF4

Préalables

- Convergence du schéma : pas d'hypothèse de régularité sur u.
- Pour les estimations d'erreur on va supposer que $u \in H^2(\Omega)$.

Préalables

- Convergence du schéma : pas d'hypothèse de régularité sur u.
- Pour les estimations d'erreur on va supposer que $u \in H^2(\Omega)$.

Principe de l'analyse

- On souhaite comparer $u^{\mathcal{T}}$ avec la projection $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u = (u(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}}$ de la solution exacte sur le maillage. On définit l'erreur

$$e^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u - u^{\mathcal{T}}.$$

Préalables

- Convergence du schéma : pas d'hypothèse de régularité sur u.
- Pour les estimations d'erreur on va supposer que $u \in H^2(\Omega)$.

Principe de l'analyse

- On souhaite comparer $u^{\mathcal{T}}$ avec la projection $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u = (u(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}}$ de la solution exacte sur le maillage. On définit l'erreur

$$e^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}^{\mathcal{T}} u - u^{\mathcal{T}}.$$

- On compare le flux numérique calculé sur $\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u$ avec le flux exact

$$|\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

Il vient (pour $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$)

$$R_{\mathcal{K},\sigma}(u) = \frac{u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|} \int_{\sigma} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx.$$

$$|\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- On soustrait le bilan de flux exact

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u),$$

et le schéma numérique

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^{\mathcal{T}}).$$

On obtient

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(e^{\mathcal{T}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u). \qquad (\star)$$

$$|\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- On obtient

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(e^{\mathcal{T}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u). \qquad (\star)$$

$$|\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u) - \overline{F}_{\mathcal{K},\sigma}.$$

- On obtient

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(e^{\mathcal{T}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| R_{\mathcal{K},\sigma}(u). \qquad (\star)$$

- On multiplie $(\star)$ par $e_{\mathcal{K}}$ et on somme sur $\mathcal{K}$.
- L'erreur de consistance est conservative $R_{\mathcal{K},\sigma}(u) = -R_{\mathcal{L},\sigma}(u)$ donc on trouve

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 = [e^{\mathcal{T}}, e^{\mathcal{T}}]_{1,\mathcal{T}} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| D_\sigma(e^{\mathcal{T}})^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| R_\sigma(u) D_\sigma(e^{\mathcal{T}}).$$

- Par Cauchy-Schwarz on trouve

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| |R_\sigma(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| |R_\sigma(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème (Estimation d'erreur - Version 1)

Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, il existe C ne dépendant que de Ω telle que

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C\mathrm{size}(\mathcal{T})\|D^2u\|_{L^\infty},$$

$$\|u - u^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq C\mathrm{size}(\mathcal{T})\|D^2u\|_{L^\infty}.$$

Estimation de l'erreur de consistance

$$\text{Si } u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \quad |R_\sigma(u)| \leq C\|D^2u\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}).$$

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| |R_\sigma(u)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème (Estimation d'erreur - Version 2)

Si $u \in H^2(\Omega)$, il existe C ne dépendant que de Ω et $\mathrm{reg}(\mathcal{T})$ telle que

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|e^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \leq C\mathrm{size}(\mathcal{T})\|D^2u\|_{L^2},$$

$$\|u - u^{\mathcal{T}}\|_{L^2} \leq C\mathrm{size}(\mathcal{T})\|D^2u\|_{L^2}.$$

Estimation de l'erreur de consistance

$$\text{Si } u \in H^2(\Omega), \quad |R_\sigma(u)| \leq C\mathrm{size}(\mathcal{T}) \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} |D^2u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

Preuve

où C ne dépend que la constante de régularité du maillage

$$\mathrm{reg}(\mathcal{T}) = \sup_{\sigma\in\mathcal{E}} \left(\frac{|\sigma|}{d_{\mathcal{K}\sigma}} + \frac{|\sigma|}{d_{\mathcal{L}\sigma}} \right).$$

- Bien qu'on ait (pour des familles régulières de maillages)

$$\|\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u - u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} 0,$$

  on a **jamais** (sauf si $u = f = 0$)

$$\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} \nabla u.$$

- Bien qu'on ait (pour des familles régulières de maillages)

$$\|\mathbb{P}^{\mathcal{T}} u - u^{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} 0,$$

on a **jamais** (sauf si $u = f = 0$)

$$\nabla^{\mathcal{T}} u^{\mathcal{T}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} \nabla u.$$

- En pratique on observe un phénomène de super-convergence

$$\|e^{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \sim C \text{size}(\mathcal{T})^2,$$

comme pour les schémas éléments finis (Aubin–Nitschze).

$\rightsquigarrow$ C'est encore un problème ouvert dans le cas général.

Problème isotrope hétérogène

On veut résoudre

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(k(x)\nabla u) = f, \quad \text{dans } \Omega, \\ \quad u = 0, \quad \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

avec $k \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $\inf_\Omega k > 0$.

Problème isotrope hétérogène

On veut résoudre

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\,(k(x)\nabla u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

avec $k \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ et $\inf_\Omega k > 0$.

Schéma VF4

- Structure générale inchangée

$$\forall \mathcal{K} \in \mathcal{T}, \quad |\mathcal{K}| f_\mathcal{K} = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}),$$

  il faut bien sûr changer la définition des flux :

$$F_{\mathcal{K},\sigma}(u^\mathcal{T}) = |\sigma| k_\sigma \frac{u_\mathcal{L} - u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}.$$

- QUESTION : Que prendre pour k_σ ?

Théorème

Si on construit les k_σ de telle sorte que

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} k_\sigma \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \xrightarrow[\text{size}(\mathcal{T})\to 0]{} k, \quad \textit{dans } L^2(\Omega),$$

alors le schéma converge.

Théorème

Si on construit les k_σ de telle sorte que

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} k_\sigma \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \xrightarrow[\mathrm{size}(\mathcal{T})\to 0]{} k, \quad \textit{dans } L^2(\Omega),$$

alors le schéma converge.

- OK (sans autre hypothèse) si on prend

$$k_\sigma = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_{\mathcal{D}} k(x)\,dx.$$

- Si le maillage est tel que k est Lip. sur chaque diamant

$$k_\sigma = \frac{1}{|\sigma|}\int_{\sigma} k(x)\,dx, \quad \text{ou} \quad k_\sigma = k(x_{\mathcal{D}}), x_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}.$$

- Si le maillage est tel que k est Lip. sur chaque volume de contrôle

$$k_\sigma = \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}k_{\mathcal{K}} + d_{\mathcal{L}\sigma}k_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}, \text{avec } k_{\mathcal{K}} = \frac{1}{|\mathcal{K}|}\int_{\mathcal{K}} k(x)\,dx, \text{ ou } k_{\mathcal{K}} = k(x_{\mathcal{K}}).$$

Le cas régulier

Proposition

Si k est Lipschitzienne sur $\overline{\Omega}$ et que u est H^2 sur chaque diamant, alors on a convergence à l'ordre 1 comme pour le problème de Laplace.

▸ Estimation coeff reg VF4

LE CAS RÉGULIER PAR MORCEAUX

- Si k est seulement Lipschitzienne sur chaque volume de contrôle, on perd la convergence à l'ordre 1.
- On peut retrouver cette convergence optimale en choisissant

$$k_\sigma = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\dfrac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \dfrac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}}.$$

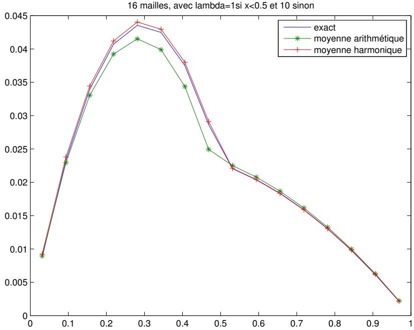
EXEMPLE 1D

- $k_\sigma =$ moy. arithmétique

  ordre $\frac{1}{2}$

- $k_\sigma =$ moy. harmonique

  ordre 1



D'OÙ VIENT CETTE FORMULE DE MOYENNE HARMONIQUE ?

- La solution u est continue (au sens des traces sur les arêtes).
- Le gradient de u **n'est pas** continu.
- Mais, le flux total $k(x)\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ est continu (faiblement) aux arêtes.

D'où vient cette formule de moyenne harmonique ?

- La solution u est continue (au sens des traces sur les arêtes).
- Le gradient de u **n'est pas** continu.
- Mais, le flux total $k(x)\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ est continu (faiblement) aux arêtes.
- On introduit une inconnue artificielle sur l'arête u_σ.
- On définit les flux venant de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{L}$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{K}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \quad F_{\mathcal{L},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{L}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}.$$

D'où vient cette formule de moyenne harmonique ?

- La solution u est continue (au sens des traces sur les arêtes).
- Le gradient de u **n'est pas** continu.
- Mais, le flux total $k(x)\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ est continu (faiblement) aux arêtes.
- On introduit une inconnue artificielle sur l'arête u_σ.
- On définit les flux venant de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{L}$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{K}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \quad F_{\mathcal{L},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{L}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}.$$

- On demande la conservativité locale

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = -F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

D'OÙ VIENT CETTE FORMULE DE MOYENNE HARMONIQUE ?

- La solution u est continue (au sens des traces sur les arêtes).
- Le gradient de u **n'est pas** continu.
- Mais, le flux total $k(x)\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}$ est continu (faiblement) aux arêtes.
- On introduit une inconnue artificielle sur l'arête u_σ.
- On définit les flux venant de $\mathcal{K}$ et de $\mathcal{L}$

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{K}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}}, \quad F_{\mathcal{L},\sigma} = |\sigma| k_{\mathcal{L}} \frac{u_\sigma - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}.$$

- On demande la conservativité locale

$$F_{\mathcal{K},\sigma} = -F_{\mathcal{L},\sigma}.$$

- On en déduit la valeur de u_σ puis le flux numérique

$$\Longrightarrow u_\sigma = \frac{\frac{k_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}} u_{\mathcal{K}} + \frac{k_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}} u_{\mathcal{L}}}{\frac{k_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}} + \frac{k_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}},$$

$$\Longrightarrow F_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = |\sigma| \left(\frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_{\mathcal{K}}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_{\mathcal{L}}}} \right) \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}$$

▸ Estimation consistance

Second membre H^{-1}

$$-\Delta u = f,$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$. On écrit $f = \operatorname{div} G$ avec $G \in (L^2(\Omega))^d$.

- **Principe :** On remplace la moyenne de f par

$$f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathcal{K}|} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{\int_\sigma G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}\, dx}_{\text{pas défini !}}.$$

Second membre non régulier

Second membre H^{-1}

$$-\Delta u = f,$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$. On écrit $f = \operatorname{div} G$ avec $G \in (L^2(\Omega))^d$.

- **Principe :** On remplace la moyenne de f par

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \, dx.$$

Second membre non régulier

Second membre H^{-1}

$$-\Delta u = f,$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$. On écrit $f = \operatorname{div} G$ avec $G \in (L^2(\Omega))^d$.

- **Principe :** On remplace la moyenne de f par

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \, dx.$$

- **Convergence :**

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}) = \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_n} \varphi(x_{\mathcal{K}}) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right).$$

Second membre H^{-1}

$$-\Delta u = f,$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$. On écrit $f = \operatorname{div} G$ avec $G \in (L^2(\Omega))^d$.

- **Principe :** On remplace la moyenne de f par

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \, dx.$$

- **Convergence :**

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} |\sigma| (\varphi(x_{\mathcal{K}}) - \varphi(x_{\mathcal{L}})) \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right).$$

Second membre H^{-1}

$$-\Delta u = f,$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$. On écrit $f = \operatorname{div} G$ avec $G \in (L^2(\Omega))^d$.

- **Principe :** On remplace la moyenne de f par

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \, dx.$$

- **Convergence :**

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}) = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \underbrace{\frac{|\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{d}}_{=|\mathcal{D}|} d \frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right)$$

Second membre H^{-1}

$$-\Delta u = f,$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$. On écrit $f = \operatorname{div} G$ avec $G \in (L^2(\Omega))^d$.

- **Principe :** On remplace la moyenne de f par

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \, dx.$$

- **Convergence :**

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}) = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \int_{\mathcal{D}} \left(d \frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) \cdot G(x) \, dx.$$

Second membre H^{-1}

$$-\Delta u = f,$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$. On écrit $f = \operatorname{div} G$ avec $G \in (L^2(\Omega))^d$.

- **Principe :** On remplace la moyenne de f par

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \, dx.$$

- **Convergence :**

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}) = -\int_{\Omega} (\nabla^{\mathcal{T}_n} \mathbb{P}^{\mathcal{T}_n} \varphi) \cdot G(x) \, dx$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} -\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot G(x) \, dx = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

SECOND MEMBRE H^{-1}

$$-\Delta u = f,$$

avec $f \in H^{-1}(\Omega)$. On écrit $f = \operatorname{div} G$ avec $G \in (L^2(\Omega))^d$.

- **Principe :** On remplace la moyenne de f par

$$|\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} |\sigma| \frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} G(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \, dx.$$

- **Convergence :**

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}) = -\int_{\Omega} (\nabla^{\mathcal{T}_n} \mathbb{P}^{\mathcal{T}_n} \varphi) \cdot G(x) \, dx$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} -\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot G(x) \, dx = \langle f, \varphi \rangle_{H^{-1}, H_0^1}.$$

- **Remarques :**
  - Le schéma dépend du choix de G.
  - Estimation d'erreur par interpolation pour des $u \in H^s(\Omega)$, $1 < s < 2$.

D'autres situations possibles

- **Sauts de flux :** Si $f = \rho(x)\delta_\Gamma$ où Γ est une courbe polygonale et si le maillage suit cette courbe.

$$|\mathcal{K}| f_\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K} \\ \sigma \subset \Gamma}} |\sigma| \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{d_{\mathcal{K}\sigma} + d_{\mathcal{L}\sigma}} \rho(x_\sigma).$$

D'autres situations possibles

- **Sauts de flux :** Si $f = \rho(x)\delta_\Gamma$ où Γ est une courbe polygonale et si le maillage suit cette courbe.

$$|\mathcal{K}| f_\mathcal{K} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{E}_\mathcal{K}\\ \sigma\subset\Gamma}} |\sigma| \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{d_{\mathcal{K}\sigma}+d_{\mathcal{L}\sigma}} \rho(x_\sigma).$$

- **Sauts de flux et d'inconnue :**
  On définit

$$F_{\mathcal{K},\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} |\sigma| \frac{u_{\mathcal{K},\sigma}-u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K}\sigma}},$$

$$F_{\mathcal{L},\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} |\sigma| \frac{u_{\mathcal{L},\sigma}-u_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{L}\sigma}}.$$

  On impose

$$u_{\mathcal{L},\sigma} - u_{\mathcal{K},\sigma} = S_\sigma \leftarrow \text{donnée du saut de } u$$

$$F_{\mathcal{L},\sigma} + F_{\mathcal{K},\sigma} = \tilde{S}_\sigma \leftarrow \text{donnée du saut de flux.}$$

  De ces deux égalités, on tire les valeurs de $u_{\mathcal{K},\sigma}$ et $u_{\mathcal{L},\sigma}$ en fonction de $u_\mathcal{K}, u_\mathcal{L}$ et des données S_σ et $\tilde{S}_\sigma$.

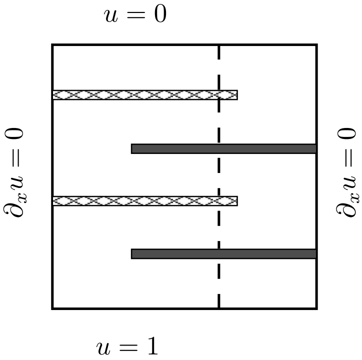
(Angot–B.–Hubert, '09)

ECOULEMENT EN MILIEU POREUX FRACTURÉ

$$\begin{cases} \operatorname{div} v = 0, & \text{Conservation de la masse,} \\ v = -K(x)\nabla p, & \text{Loi de Darcy.} \end{cases}$$

Matrice poreuse : $K(x) = \mathrm{Id}$.
Fractures de gauche : $K(x) = 10^{-2}\mathrm{Id}$.
Fractures de droite :

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 10^2 & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{pmatrix}.$$



Domaine $\Omega =]0,1[^2$, Epaisseur des fractures : $b_f = 10^{-2}$

(Angot–B.–Hubert, '09)

Modèle asymptotique

- Les fractures sont modélisées par des segments.
- Dans la matrice poreuse on résout la loi de Darcy standard.
- Sur chaque fracture Σ on écrit une loi de Darcy moyennée.

$$
\left\{
\begin{aligned}
\overline{\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}}_{|\Sigma} &= -K_{f,n}\frac{[\![u]\!]_\Sigma}{b_f},\\
u_f &= \overline{u}_{|\Sigma},\\
-\partial_s(b_f K_{f,\tau}\partial_s u_f) &= -[\![\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu}]\!]_\Sigma.
\end{aligned}
\right.
$$

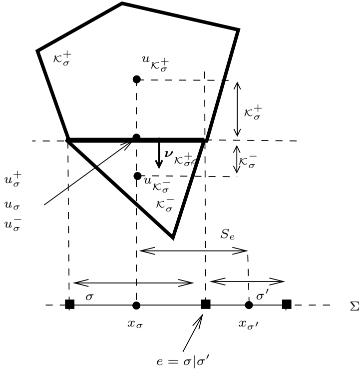
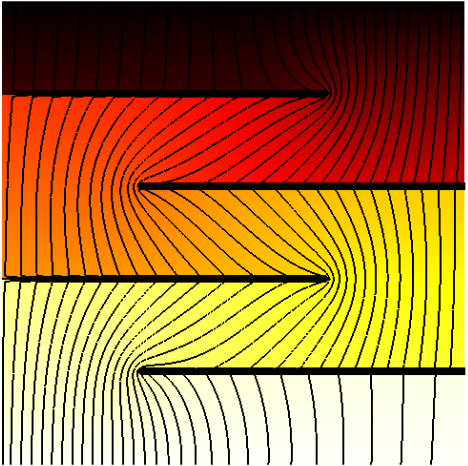


Schéma de type VF4

(Angot–B.–Hubert, '09)

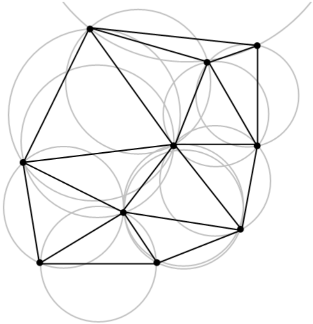


- Les maillages cartésiens : les volumes de contrôle sont des parallèlipipèdes rectangles et $x_\mathcal{K}$ est le centre de gravité.

- Les maillages cartésiens :
- Les maillages triangles conformes :

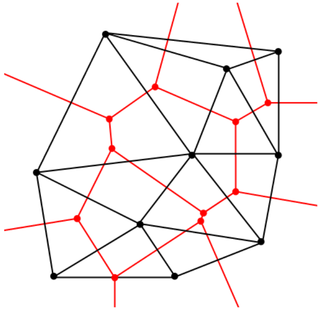
  On prend $x_\mathcal{K}$ =centre du cercle circonscrit ; **MAIS :**
  - $x_\mathcal{K} \in \mathcal{K}$ n'est pas garanti (même $x_\mathcal{K} \in \Omega$ n'est pas certain).
  - On peut avoir $x_\mathcal{K} = x_\mathcal{L}$ pour $\mathcal{K} \neq \mathcal{L} \Rightarrow d_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = 0$!
  - Généralisation possible au cas où

    $$(x_\mathcal{L} - x_\mathcal{K}) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} > 0 \quad \Leftrightarrow \text{Condition de Delaunay}$$



  - Pour presque toute famille de points dans le plan, il existe une unique triangulation de Delaunay correspondant.

- Construction duale :
  Diagramme de Voronoï d'un ensemble de points.



- Il existe des algorithmes assez efficaces de triangulation de Delaunay et de construction du diagramme de Voronoï.

Limitations de VF4

- Sur un maillage triangle non conforme : la condition d'orthogonalité est impossible à remplir.
- Sur un maillage quadrangle non cartésien : Idem

Limitations de VF4

- Sur un maillage triangle non conforme : la condition d'orthogonalité est impossible à remplir.
- Sur un maillage quadrangle non cartésien : Idem
- Dans le cas anisotrope homogène :

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f,$$

la condition devient la A-orthogonalité

$$x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} \mathbin{/\!/} A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Longleftrightarrow A^{-1}(x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) \perp \sigma.$$

$\rightsquigarrow$ Le choix du maillage dépend du problème à résoudre.

- Sur un maillage triangle non conforme : la condition d'orthogonalité est impossible à remplir.
- Sur un maillage quadrangle non cartésien : Idem
- Dans le cas anisotrope homogène :

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f,$$

la condition devient la A-orthogonalité

$$x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} \mathbin{/\!\!/} A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Longleftrightarrow A^{-1}(x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) \perp \sigma.$$

$\rightsquigarrow$ Le choix du maillage dépend du problème à résoudre.
- Dans le cas anisotrope hétérogène :

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = f,$$

la condition va dépendre de x ...

Limitations de VF4

- Sur un maillage triangle non conforme : la condition d'orthogonalité est impossible à remplir.
- Sur un maillage quadrangle non cartésien : Idem
- Dans le cas anisotrope homogène :

$$-\mathrm{div}\,(A\nabla u) = f,$$

  la condition devient la A-orthogonalité

$$x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} \,/\!\!/\, A\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \Longleftrightarrow A^{-1}(x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) \perp \sigma.$$

  $\rightsquigarrow$ Le choix du maillage dépend du problème à résoudre.
- Dans le cas anisotrope hétérogène :

$$-\mathrm{div}\,(A(x)\nabla u) = f,$$

  la condition va dépendre de x ...
- Pour des problèmes non linéaires :

$$-\mathrm{div}\,(\varphi(\nabla u)) = f,$$

  il est impossible d'approcher le flux par un schéma à deux points.

Limitations de VF4

Le gradient discret VF4 n'est pas bon

- Il n'approche correctement le gradient que dans une direction.
- La convergence du gradient est toujours en un sens faible.

Limitations de VF4

Le gradient discret VF4 n'est pas bon

- Il n'approche correctement le gradient que dans une direction.
- La convergence du gradient est toujours en un sens faible.

BILAN :
Il faut utiliser plus de 2 inconnues pour approcher les flux
$\approx$ approcher le gradient de la solution dans toutes les directions

- Schémas cell-centered : On utilise les inconnues sur les mailles voisines.
- Schémas primal/dual : On utilise de nouvelles inconnues aux sommets (maillage dual).
- Schémas mimétiques/hybrides/mixtes : On utilise des inconnues aux arêtes.

Fin de la première partie !

Preuve de l'inégalité de Poincaré

- On suppose Ω convexe (pour simplifier).
- On fixe une vecteur unitaire $\xi \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $x \in \Omega$ on note $y(x)$ la *projection* de x sur $\partial\Omega$ dans la direction ξ.
- Pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}$, on note

$$\chi_\sigma(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x,y] \cap \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } [x,y] \cap \sigma = \emptyset. \end{cases}$$

Preuve de l'inégalité de Poincaré

- On suppose Ω convexe (pour simplifier).
- On fixe une vecteur unitaire $\xi \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $x \in \Omega$ on note $y(x)$ la *projection* de x sur $\partial\Omega$ dans la direction ξ.
- Pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}$, on note

$$\chi_\sigma(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x,y] \cap \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } [x,y] \cap \sigma = \emptyset. \end{cases}$$

- On note

$$\tilde{\Omega} = \Big\{ x \in \Omega, \quad [x, y(x)] \text{ ne rencontre aucun sommet} \\ \text{et ne contient aucune arête} \Big\}.$$

On vérifie que $\tilde{\Omega}^c$ est de mesure nulle dans Ω.

Preuve de l'inégalité de Poincaré

- On suppose Ω convexe (pour simplifier).
- On fixe une vecteur unitaire $\xi \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $x \in \Omega$ on note $y(x)$ la *projection* de x sur $\partial\Omega$ dans la direction ξ.
- Pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}$, on note

$$\chi_\sigma(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x,y] \cap \sigma \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } [x,y] \cap \sigma = \emptyset. \end{cases}$$

- On note

$$\tilde{\Omega} = \Big\{ x \in \Omega, \quad [x, y(x)] \text{ ne rencontre aucun sommet} \\ \text{et ne contient aucune arête} \Big\}.$$

  On vérifie que $\tilde{\Omega}^c$ est de mesure nulle dans Ω.
- Soit maintenant $\kappa \in \mathcal{T}$ et $x \in \kappa \cap \tilde{\Omega}$.
  En parcourant le segment $[x, y(x)]$, on rencontre un nombre fini de volumes de contrôle noté $(\kappa_i)_{1 \leq i \leq m}$ avec $\kappa_1 = \kappa$ et κ_m est un volume de contrôle du bord.

- On a donc une somme télescopique

$$u_{\mathcal{K}} = u_{\mathcal{K}_1} = \sum_{i=1}^{m-1} (u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}) + u_{\mathcal{K}_m},$$

$$|u_{\mathcal{K}}| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}| + |0 - u_{\mathcal{K}_m}|,$$

- Il vient

$$\boxed{|u_{\mathcal{K}}| \leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})| \chi_\sigma(x, y(x)).}$$

- On a donc une somme télescopique

$$u_K = u_{K_1} = \sum_{i=1}^{m-1} (u_{K_i} - u_{K_{i+1}}) + u_{K_m},$$

$$|u_K| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |u_{K_i} - u_{K_{i+1}}| + |0 - u_{K_m}|,$$

- Il vient

$$\boxed{|u_K| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma \sqrt{c_\sigma} \frac{1}{\sqrt{c_\sigma}} |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})| \chi_\sigma(x, y(x)).}$$

avec $c_\sigma = |\boldsymbol{\nu}_\sigma \cdot \xi|$ (qui est non nul car $x \in \tilde{\Omega}$).

Preuve de l'inégalité de Poincaré

- On a donc une somme télescopique

$$u_\mathcal{K} = u_{\mathcal{K}_1} = \sum_{i=1}^{m-1} (u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}) + u_{\mathcal{K}_m},$$

$$|u_\mathcal{K}| \leq \sum_{i=1}^{m-1} |u_{\mathcal{K}_i} - u_{\mathcal{K}_{i+1}}| + |0 - u_{\mathcal{K}_m}|,$$

- Il vient

$$\boxed{|u_\mathcal{K}| \leq \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma \sqrt{c_\sigma} \frac{1}{\sqrt{c_\sigma}} |D_\sigma(u^\mathcal{T})| \chi_\sigma(x, y(x)).}$$

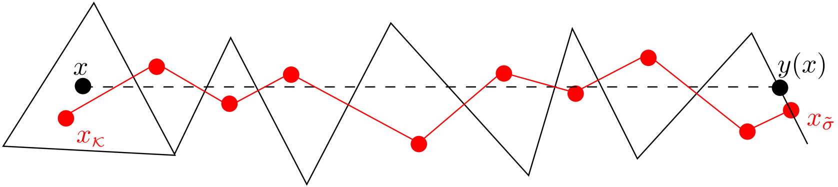
avec $c_\sigma = |\boldsymbol{\nu}_\sigma \cdot \xi|$ (qui est non nul car $x \in \tilde{\Omega}$).

- Par Cauchy-Schwarz (rappel : $x \in \mathcal{K}$)

$$|u_\mathcal{K}|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x, y(x)) \right) \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2 \chi_\sigma(x, y(x)) \right).$$

$$|u_\mathcal{K}|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x,y(x))\right)\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2\chi_\sigma(x,y(x))\right).$$

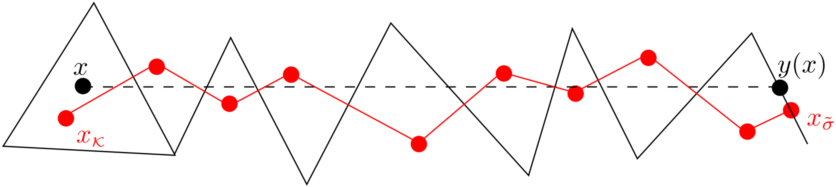
Estimation du premier terme Soit $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_{ext}$ telle que $y(x) \in \tilde{\sigma}$.



$$\sum_{i=1}^{m-1}(x_{\mathcal{K}_i} - x_{\mathcal{K}_{i+1}}) + x_{\mathcal{K}_m} - x_{\tilde{\sigma}} = x_\mathcal{K} - x_{\tilde{\sigma}},$$

$$|u_{\mathcal{K}}|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x,y(x))\right)\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2\chi_\sigma(x,y(x))\right).$$

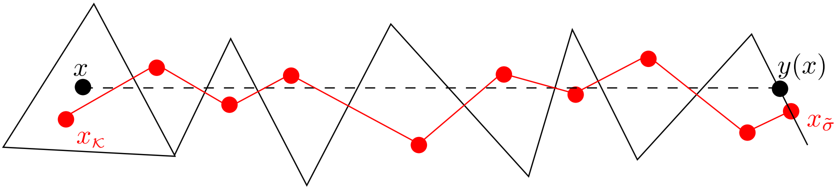
Estimation du premier terme Soit $\tilde{\sigma}\in\mathcal{E}_{ext}$ telle que $y(x)\in\tilde{\sigma}$.



$$\sum_{i=1}^{m-1}(x_{\mathcal{K}_i}-x_{\mathcal{K}_{i+1}})\cdot\xi + (x_{\mathcal{K}_m}-x_{\tilde{\sigma}})\cdot\xi = (x_{\mathcal{K}}-x_{\tilde{\sigma}})\cdot\xi,$$

$$|u_{\mathcal{K}}|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x, y(x))\right)\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2\chi_\sigma(x, y(x))\right).$$

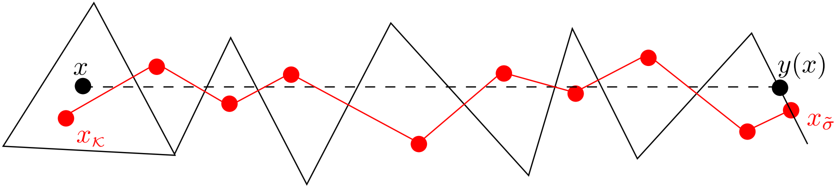
Estimation du premier terme Soit $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_{ext}$ telle que $y(x) \in \tilde{\sigma}$.



$$-\sum_{i=1}^{m-1} d_{\mathcal{K}_i\mathcal{K}_{i+1}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}_i\mathcal{K}_{i+1}}\cdot\xi - d_{\mathcal{K}_m\tilde{\sigma}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}_m\tilde{\sigma}}\cdot\xi = (x_{\mathcal{K}} - x_{\tilde{\sigma}})\cdot\xi,$$

$$|u_{\mathcal{K}}|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x, y(x))\right)\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2\chi_\sigma(x, y(x))\right).$$

Estimation du premier terme Soit $\tilde{\sigma} \in \mathcal{E}_{ext}$ telle que $y(x) \in \tilde{\sigma}$.



$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma c_\sigma \chi_\sigma(x, y(x)) = \left|(x_{\mathcal{K}} - x_{\tilde{\sigma}}) \cdot \xi\right| \leq \mathrm{diam}(\Omega).$$

$$\forall \kappa \in \mathcal{T}, \forall x \in \kappa \cap \tilde{\Omega}, \quad |u_\kappa|^2 \leq \mathrm{diam}(\Omega) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2 \chi_\sigma(x, y(x)) \right).$$

$$\forall \kappa \in \mathcal{T}, \forall x \in \kappa \cap \tilde{\Omega}, \quad |u_\kappa|^2 \leq \mathrm{diam}(\Omega) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2 \chi_\sigma(x, y(x)) \right).$$

On intègre sur $\kappa \cap \tilde{\Omega}$ par rapport à x, puis on somme sur $\kappa \in \mathcal{T}$

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}} |\kappa| |u_\kappa|^2 \leq \mathrm{diam}(\Omega) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T}})|^2 \left(\int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x))\, dx \right),$$

$$\forall \kappa \in \mathcal{T}, \forall x \in \kappa \cap \tilde{\Omega}, \quad |u_\kappa|^2 \leq \text{diam}(\Omega) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2 \chi_\sigma(x, y(x)) \right).$$

On intègre sur $\kappa \cap \tilde{\Omega}$ par rapport à x, puis on somme sur $\kappa \in \mathcal{T}$

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}} |\kappa| |u_\kappa|^2 \leq \text{diam}(\Omega) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2 \left(\int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x))\, dx \right),$$

Evaluation de l'intégrale

$$\int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x))\, dx \leq \text{diam}(\Omega) |\sigma| c_\sigma.$$

Preuve de l'inégalité de Poincaré

$$\forall \kappa \in \mathcal{T}, \forall x \in \kappa \cap \tilde{\Omega}, \quad |u_\kappa|^2 \leq \operatorname{diam}(\Omega) \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2 \chi_\sigma(x, y(x)) \right).$$

On intègre sur $\kappa \cap \tilde{\Omega}$ par rapport à x, puis on somme sur $\kappa \in \mathcal{T}$

$$\sum_{\kappa \in \mathcal{T}} |\kappa| |u_\kappa|^2 \leq \operatorname{diam}(\Omega) \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2 \left(\int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x))\, dx \right),$$

Evaluation de l'intégrale

$$\int_\Omega \chi_\sigma(x, y(x))\, dx \leq \operatorname{diam}(\Omega) |\sigma| c_\sigma.$$

Conclusion

$$\|u^\mathcal{T}\|_{L^2}^2 = \sum_{\kappa \in \mathcal{T}} |\kappa| |u_\kappa|^2 \leq \operatorname{diam}(\Omega)^2 \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\sigma| d_\sigma |D_\sigma(u^\mathcal{T})|^2 = \operatorname{diam}(\Omega)^2 \|u^\mathcal{T}\|_{1,\mathcal{T}}^2.$$

Retour

- Soit $u^n \in L^2(\mathbb{R}^2)$ le prolongement par 0 de $u^{\mathcal{T}_n} \in L^2(\Omega)$.
- On va utiliser le théorème de Kolmogorov, pour cela il suffit d'obtenir une estimation sur les translatées

$$\|u^n(\cdot + \eta) - u^n\|_{L^2} \xrightarrow[\eta \to 0]{} 0, \quad \text{unif. par rapport à } n.$$

- Soit $u^n \in L^2(\mathbb{R}^2)$ le prolongement par 0 de $u^{\mathcal{T}_n} \in L^2(\Omega)$.
- On va utiliser le théorème de Kolmogorov, pour cela il suffit d'obtenir une estimation sur les translatées

$$\|u^n(\cdot + \eta) - u^n\|_{L^2} \xrightarrow[\eta \to 0]{} 0, \quad \text{unif. par rapport à } n.$$

- On fixe $\eta \in \mathbb{R}^2$ non nul. Par sommes télescopiques on a

$$|u^n(x+\eta) - u^n(x)| \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} d_\sigma |D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n})| \chi_\sigma(x, x+\eta),$$

et par Cauchy-Schwarz

$$|u^n(x+\eta) - u^n(x)|^2 \leq \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_\sigma(x, x+\eta) d_\sigma c_\sigma \right) \times \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \chi_\sigma(x, x+\eta) \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \right),$$

avec $c_\sigma = |\boldsymbol{\nu}_\sigma \cdot \frac{\eta}{|\eta|}|$.

$$|u^n(x+\eta)-u^n(x)|^2 \leq \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \chi_\sigma(x,x+\eta)d_\sigma c_\sigma\right) \times \left(\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \chi_\sigma(x,x+\eta)\frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2\right),$$

avec $c_\sigma = |\boldsymbol{\nu}\cdot\frac{\eta}{|\eta|}|$.

ESTIMATION DU PREMIER TERME

- On peut se ramener au cas où $[x,x+\eta]\subset\Omega$.
- Soient alors $\mathcal{K},\mathcal{L}\in\mathcal{T}$ tels que $x\in\mathcal{K}$ et $x+\eta\in\mathcal{L}$, on a alors

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \chi_\sigma(x,x+\eta)d_\sigma c_\sigma &= \left|(x_\mathcal{L}-x_\mathcal{K})\cdot\frac{\eta}{|\eta|}\right| \leq |x_\mathcal{L}-x_\mathcal{K}|\\ &\leq |x_\mathcal{L}-(x+\eta)|+|(x+\eta)-x|+|x-x_\mathcal{K}|\\ &\leq |\eta|+2\mathrm{size}(\mathcal{T}_n).\end{aligned}$$

- On intègre en $x\in\mathbb{R}^2$

$$|u^n(x+\eta)-u^n(x)|^2 \leq C(|\eta|+\text{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \left(\chi_\sigma(x, x+\eta) \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \right),$$

- On intègre en $x \in \mathbb{R}^2$

$$\|u^n(\cdot+\eta)-u^n\|_{L^2}^2 \leq C(|\eta|+\text{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma} |D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\sigma(x, x+\eta)\, dx \right)$$

$$|u^n(x+\eta)-u^n(x)|^2 \leq C(|\eta|+\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \left(\chi_\sigma(x,x+\eta)\frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \right),$$

- On intègre en $x \in \mathbb{R}^2$

$$\|u^n(\cdot+\eta)-u^n\|_{L^2}^2 \leq C(|\eta|+\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\sigma(x,x+\eta)\,dx \right)$$

- Calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\sigma(x,x+\eta)\,dx = |\eta||\sigma|c_\sigma.$$

$$|u^n(x+\eta)-u^n(x)|^2 \leq C(|\eta|+\text{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \left(\chi_\sigma(x,x+\eta)\frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \right),$$

- On intègre en $x \in \mathbb{R}^2$

$$\|u^n(\cdot+\eta)-u^n\|_{L^2}^2 \leq C(|\eta|+\text{size}(\mathcal{T}_n)) \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \frac{d_\sigma}{c_\sigma}|D_\sigma(u^{\mathcal{T},n})|^2 \left(\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\sigma(x,x+\eta)\,dx \right)$$

- Calcul de l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^2} \chi_\sigma(x,x+\eta)\,dx = |\eta||\sigma|c_\sigma.$$

Conclusion

$$\|u^n(\cdot+\eta)-u^n\|_{L^2}^2 \leq C|\eta|(|\eta| + \underbrace{\text{size}(\mathcal{T}_n)}_{\leq \text{diam}(\Omega)}) \underbrace{\|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n}^2}_{\text{borné}}.$$

$\exists$ une sous-suite $u^{\varphi(n)} \longrightarrow u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ avec $u = 0$ en dehors de Ω.

- Par hypothèse, on a

$$\sup_n \|\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}\|_{L^2} < +\infty,$$

- Il existe donc $G \in (L^2(\Omega))^2$ tel que (modulo une autre sous-suite)

$$\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightharpoonup[n\to\infty]{} G.$$

On veut montrer que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla u = G$.

- Par hypothèse, on a

$$\sup_n \|\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}\|_{L^2} < +\infty,$$

- Il existe donc $G \in (L^2(\Omega))^2$ tel que (modulo une autre sous-suite)

$$\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightharpoonup[n\to\infty]{} G.$$

On veut montrer que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla u = G$.

- Soit $\Phi \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2))^2$ (**on ne suppose pas $\Phi = 0$ sur $\partial\Omega$**)

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega u^{\mathcal{T}_n} (\operatorname{div} \Phi)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega u\, (\operatorname{div} \Phi)\, dx.$$

- Par hypothèse, on a

$$\sup_n \|\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}\|_{L^2} < +\infty,$$

- Il existe donc $G \in (L^2(\Omega))^2$ tel que (modulo une autre sous-suite)

$$\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} G.$$

On veut montrer que $u \in H_0^1(\Omega)$ et $\nabla u = G$.

- Soit $\Phi \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2))^2$ (**on ne suppose pas $\Phi = 0$ sur $\partial\Omega$**)

$$I_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega u^{\mathcal{T}_n} (\operatorname{div} \Phi)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega u\, (\operatorname{div} \Phi)\, dx.$$

- Mais on a aussi

$$I_n = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} u_{\mathcal{K}}^n \left(\int_{\mathcal{K}} \operatorname{div} \Phi\, dx \right) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} u_{\mathcal{K}}^n \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \left(\int_\sigma \Phi \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma}\, dx \right).$$

- Sommons par arête

$$I_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} (u_{\mathcal{K}}^n - u_{\mathcal{L}}^n) \left(\int_\sigma \Phi \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} u_{\mathcal{K}}^n \left(\int_\sigma \Phi \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right).$$

- Sommons par arête

$$I_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} (u_{\mathcal{K}}^n - u_{\mathcal{L}}^n) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \cdot \left(\int_\sigma \Phi \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} u_{\mathcal{K}}^n \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \cdot \left(\int_\sigma \Phi \right).$$

- Sommons par arête

$$I_n = \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \frac{|\sigma| d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{d} \left(d \frac{u^n_{\mathcal{K}} - u^n_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right) + \sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{ext}} \frac{|\sigma| d_{\mathcal{K}\sigma}}{d} \left(d \frac{u^n_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}\sigma}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\sigma} \right) \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Comme Φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \left| \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right) - \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \Phi \right) \right| \leq C \|\nabla \Phi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Comme Φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \left| \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right) - \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \Phi \right) \right| \leq C \|\nabla \Phi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

- Comme $(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})_n$ est bornée dans L^2, on a

$$I_n = -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \Phi \right) + O_\Phi(\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Comme Φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \left| \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right) - \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \Phi \right) \right| \leq C \|\nabla \Phi\|_\infty \text{size}(\mathcal{T}_n).$$

- Comme $(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})_n$ est bornée dans L^2, on a

$$I_n = -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \int_{\mathcal{D}} \Phi + O_\Phi(\text{size}(\mathcal{T}_n)).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \Phi\right).$$

- Comme Φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \left| \left(\frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \Phi\right) - \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_{\mathcal{D}} \Phi\right)\right| \leq C \|\nabla\Phi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

- Comme $(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})_n$ est bornée dans L^2, on a

$$I_n = -\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \Phi \, dx + O_\Phi(\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)).$$

- Sommons par arête

$$I_n = -\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} |\mathcal{D}| \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right).$$

- Comme Φ est $\mathcal{C}^\infty$

$$\forall \sigma \in \mathcal{E}, \left| \left(\frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma \Phi \right) - \left(\frac{1}{|\mathcal{D}|} \int_{\mathcal{D}} \Phi \right) \right| \leq C \|\nabla \Phi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

- Comme $(\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n})_n$ est bornée dans L^2, on a

$$I_n = -\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \Phi \, dx + O_\Phi(\mathrm{size}(\mathcal{T}_n)).$$

- Bilan, pour tout $\Phi \in (\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2))^2$

$$I_n \xrightarrow[n \to \infty]{} -\int_\Omega G \cdot \Phi \, dx, \quad \text{et} \quad I_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \int_\Omega u \, \mathrm{div} \, \Phi \, dx.$$

Retour

Estimation d'énergie

$$\forall n \geq 0, \quad \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} \leq \operatorname{diam}(\Omega)\|f\|_{L^2}.$$

PREUVE DE CONVERGENCE VF4

ESTIMATION D'ÉNERGIE

$$\forall n \geq 0, \quad \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} \leq \mathrm{diam}(\Omega)\|f\|_{L^2}.$$

THÉORÈME DE COMPACITÉ $\Rightarrow$ Il existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tq

$$u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} \nabla u \text{ dans } (L^2(\Omega))^2.$$

ESTIMATION D'ÉNERGIE

$$\forall n \geq 0, \quad \|u^{\mathcal{T}_n}\|_{1,\mathcal{T}_n} \leq \text{diam}(\Omega)\|f\|_{L^2}.$$

THÉORÈME DE COMPACITÉ $\Rightarrow$ Il existe $u \in H^1_0(\Omega)$ tq

$$u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^2(\Omega),$$

$$\nabla^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} u^{\mathcal{T}_{\varphi(n)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \nabla u \text{ dans } (L^2(\Omega))^2.$$

CE QU'IL RESTE À FAIRE

- On va montrer que u vérifie la formulation faible du problème $-\Delta u = f$.
- Par unicité on en déduit que les convergences ci-dessus ont lieu pour toute la suite $(u^{\mathcal{T}_n})_n$.

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Intégration par parties discrète avec $v^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} d_\sigma|\sigma| D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}_n}) \frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}).$$

Remarque : Pour n assez grand, les termes de bord sont nuls.

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Intégration par parties discrète avec $v^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} d_\sigma|\sigma| D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}_n}) \frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}).$$

Remarque : Pour n assez grand, les termes de bord sont nuls.

Par définition du gradient discret

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \underbrace{\frac{d_\sigma|\sigma|}{d}}_{=|\mathcal{D}|} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\right) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}).$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Intégration par parties discrète avec $v^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}^{\mathcal{T}}\varphi$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} d_\sigma |\sigma| D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}_n}) \frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} \varphi(x_{\mathcal{K}}).$$

Remarque : Pour n assez grand, les termes de bord sont nuls.

Par définition du gradient discret

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \int_{\mathcal{D}} \nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} \int_{\mathcal{K}} f(x)\varphi(x_{\mathcal{K}})\, dx.$$

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \mathbb{P}^\mathcal{T}\varphi \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi(x_\mathcal{K}))_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}.$$

Intégration par parties discrète avec $v^\mathcal{T} = \mathbb{P}^\mathcal{T}\varphi$

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} d_\sigma|\sigma| D_{\mathcal{K}\mathcal{L}}(u^{\mathcal{T}_n}) \frac{\varphi(x_\mathcal{L}) - \varphi(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_\mathcal{K} \varphi(x_\mathcal{K}).$$

Remarque : Pour n assez grand, les termes de bord sont nuls.

Par définition du gradient discret

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}_{int}} \int_\mathcal{D} \nabla_\mathcal{D}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \left(\nabla\varphi(x) + \underbrace{\left(\frac{\varphi(x_\mathcal{L}) - \varphi(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} - (\nabla\varphi(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}})\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_1^n(x)} \right) dx$$

$$= \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}} \int_\mathcal{K} f(x) \left(\varphi(x) + \underbrace{(\varphi(x_\mathcal{K}) - \varphi(x))}_{\stackrel{\text{def}}{=} R_2^n(x)} \right) dx.$$

Bilan

$$\int_{\Omega} \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \nabla \varphi(x)\, dx - \int_{\Omega} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$
$$= - \int_{\Omega} \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot R_1^n(x)\, dx + \int_{\Omega} f(x) R_2^n(x)\, dx.$$

Bilan

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \nabla \varphi(x)\, dx - \int_\Omega f(x)\, \varphi(x)\, dx \\
= - \int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot R_1^n(x)\, dx + \int_\Omega f(x) R_2^n(x)\, dx.
\end{aligned}
$$

$$
|R_1^n(x)| = \left| \frac{\varphi(x_{\mathcal{L}}) - \varphi(x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} - (\nabla\varphi(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}) \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right| \leq C \|D^2 \varphi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).
$$

$$
|R_2^n(x)| = |\varphi(x_{\mathcal{K}}) - \varphi(x)| \leq \|D\varphi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).
$$

Bilan

$$\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot \nabla\varphi(x)\,dx - \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$= -\int_\Omega \nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} \cdot R_1^n(x)\,dx + \int_\Omega f(x) R_2^n(x)\,dx.$$

$$|R_1^n(x)| = \left| \frac{\varphi(x_\mathcal{L}) - \varphi(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} - (\nabla\varphi(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}})\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right| \leq C\|D^2\varphi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

$$|R_2^n(x)| = |\varphi(x_\mathcal{K}) - \varphi(x)| \leq \|D\varphi\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}_n).$$

On peut donc passer à la limite

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_\Omega f\varphi\,dx. \qquad (\star)$$

Par densité, $(\star)$ est encore vraie pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, d'où le résultat.

Non convergence forte des gradients

D'après la formule d'intégration par parties discrète, on a

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| |D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n})|^2 = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_\mathcal{K} u^n_\mathcal{K} = \int_\Omega f(x) u^{\mathcal{T}_n}\, dx.$$

Comme $\nabla_\mathcal{D}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} = d D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n}) \boldsymbol{\nu}_\sigma$, on en déduit

$$\frac{1}{d} \sum_{\sigma\in\mathcal{E}} \underbrace{\frac{d_\sigma |\sigma|}{d}}_{=|\mathcal{D}|} |\nabla_\mathcal{D}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}|^2 = \int_\Omega f(x) u^{\mathcal{T}_n}\, dx.$$

Non convergence forte des gradients

D'après la formule d'intégration par parties discrète, on a

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma |\sigma| |D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n})|^2 = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}| f_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}}^n = \int_\Omega f(x) u^{\mathcal{T}_n}\, dx.$$

Comme $\nabla_{\mathcal{D}}^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n} = d D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n}) \boldsymbol{\nu}_\sigma$, on en déduit

$$\frac{1}{d} \|\nabla^{\mathcal{T}_n} u^{\mathcal{T}_n}\|_{L^2}^2 = \int_\Omega f(x) u^{\mathcal{T}_n}\, dx.$$

Non convergence forte des gradients

D'après la formule d'intégration par parties discrète, on a

$$\sum_{\sigma\in\mathcal{E}} d_\sigma|\sigma||D_\sigma(u^{\mathcal{T}_n})|^2 = \sum_{\mathcal{K}\in\mathcal{T}_n} |\mathcal{K}|f_\mathcal{K}u^n_\mathcal{K} = \int_\Omega f(x)u^{\mathcal{T}_n}\,dx.$$

Comme $\nabla^{\mathcal{T}_n}_{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}_n} = dD_\sigma(u^{\mathcal{T}_n})\boldsymbol{\nu}_\sigma$, on en déduit

$$\frac{1}{d}\|\nabla^{\mathcal{T}_n}u^{\mathcal{T}_n}\|^2_{L^2} = \int_\Omega f(x)u^{\mathcal{T}_n}\,dx.$$

On passe à la limite dans le terme de droite et on trouve

$$\lim_{n\to\infty}\|\nabla^{\mathcal{T}_n}u^{\mathcal{T}_n}\|^2_{L^2} = d\int_\Omega f(x)u(x)\,dx = d\|\nabla u\|^2_{L^2}.$$

$\rightsquigarrow$ Si $u\neq 0$ et $d\geq 2$, on n'a donc pas convergence forte des gradients.

Retour

$$R_\sigma(u) = \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx.$$

- Formules de Taylor avec reste intégral (pour $u \in \mathcal{C}^2$ et $x \in \sigma$)

$$u(x_\mathcal{L}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{L}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\,dt,$$

$$u(x_\mathcal{K}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{K}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{K}-x)).(x_\mathcal{K}-x)^2\,dt.$$

$$R_\sigma(u) = \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx.$$

- Formules de Taylor avec reste intégral (pour $u \in \mathcal{C}^2$ et $x \in \sigma$)

$$u(x_\mathcal{L}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{L}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\,dt,$$

$$u(x_\mathcal{K}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{K}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{K}-x)).(x_\mathcal{K}-x)^2\,dt.$$

- On soustrait et on utilise $x_\mathcal{L} - x_\mathcal{K} = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$

$$\begin{aligned} u(x_\mathcal{L})-u(x_\mathcal{K}) = d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\,dt \\ - \int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{K}-x)).(x_\mathcal{K}-x)^2\,dt. \end{aligned}$$

$$R_\sigma(u) = \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma \nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx.$$

- Formules de Taylor avec reste intégral (pour $u \in \mathcal{C}^2$ et $x \in \sigma$)

$$u(x_\mathcal{L}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{L}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\,dt,$$

$$u(x_\mathcal{K}) = u(x)+\nabla u(x)\cdot(x_\mathcal{K}-x)+\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{K}-x)).(x_\mathcal{K}-x)^2\,dt.$$

- Bilan :

$$R_\sigma(u) = \underbrace{\frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|\sigma|}\int_\sigma\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\,dtdx}_{=T_1}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|\sigma|}\int_\sigma\int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{K}-x)).(x_\mathcal{K}-x)^2\,dt\,dx}_{=T_2}.$$

$$T_1 = \frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|\sigma|}\int_\sigma \int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\,dtdx.$$

$$T_1 = \frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|\sigma|}\int_\sigma \int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_{\mathcal{L}}-x)).(x_{\mathcal{L}}-x)^2\,dtdx.$$

Inégalité de Jensen

$$|T_1|^2 \leq \frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^2|\sigma|}\int_\sigma \int_0^1 |1-t|^2|D^2u(x+t(x_{\mathcal{L}}-x))|^2|x_{\mathcal{L}}-x|^4\,dtdx.$$

$$T_1 = \frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}|\sigma|}\int_\sigma \int_0^1 (1-t)D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x)).(x_\mathcal{L}-x)^2\,dtdx.$$

Inégalité de Jensen

$$|T_1|^2 \leq \frac{1}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^2|\sigma|}\int_\sigma \int_0^1 |1-t|^2|D^2u(x+t(x_\mathcal{L}-x))|^2|x_\mathcal{L}-x|^4\,dtdx.$$

Changement de variable

$$(t,x)\in[0,1]\times\sigma \mapsto y = x+t(x_\mathcal{L}-x)\in \mathcal{D}_\mathcal{L}.$$

Le Jacobien vaut $(1-t)(x_\mathcal{L}-x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = (1-t)d_{\mathcal{L}\sigma}$.

$$[T_1|^2 \leq \frac{\mathrm{d}_\mathcal{D}^4}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}^2 d_{\mathcal{L},\sigma}|\sigma|}\int_{\mathcal{D}_\mathcal{L}} |D^2u(y)|^2\,dy \leq C(\mathrm{reg}(\mathcal{T}))\frac{\mathrm{size}(\mathcal{T})^2}{|\mathcal{D}|}\int_\mathcal{D} |D^2u(y)|^2\,dy.$$

Retour

$$R_\sigma(u) = k_\sigma \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx.$$

Nouveau terme dans l'estimation

$$|R_\sigma(u)| \leq \left| k_\sigma - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\,dx \right| \left| \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right| + O(\mathrm{size}(\mathcal{T})).$$

$$R_\sigma(u) = k_\sigma \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

Nouveau terme dans l'estimation

$$|R_\sigma(u)| \leq \left| k_\sigma - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\, dx \right| \left| \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} \right| + O(\text{size}(\mathcal{T})).$$

- Pour n'importe lequel des choix de k_σ on a

$$\left| k_\sigma - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\, dx \right| \leq C\|\nabla k\|_\infty \text{size}(\mathcal{T}).$$

$$R_\sigma(u) = k_\sigma \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx.$$

Nouveau terme dans l'estimation

$$|R_\sigma(u)| \leq \left| k_\sigma - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\,dx\right| \left|\frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}\right| + O(\mathrm{size}(\mathcal{T})).$$

- Pour n'importe lequel des choix de k_σ on a

$$\left| k_\sigma - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\,dx\right| \leq C\|\nabla k\|_\infty \mathrm{size}(\mathcal{T}).$$

- Avec des formules de Taylor on trouve aussi

$$\left|\frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}\right| \leq C\left(\frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_\mathcal{D} |\nabla u|^2 + |D^2 u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Retour

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

“CONTINUITÉ” DU FLUX EXACT

$$\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx \stackrel{\text{def}}{=} k_\mathcal{K}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx = k_\mathcal{L}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma k(x) \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x) \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx \stackrel{\text{def}}{=} k_\mathcal{K} \int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx = k_\mathcal{L} \int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx.$$

Formules de Taylor pour $x \in \sigma$

ATTENTION : u n'est pas régulière mais $u_{|\mathcal{K}}$ et $u_{|\mathcal{L}}$ le sont.

$$u(x_\mathcal{K}) = u(x) + \nabla u_{|\mathcal{K}}(x) \cdot (x_\mathcal{K} - x) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2),$$

$$u(x_\mathcal{L}) = u(x) + \nabla u_{|\mathcal{L}}(x) \cdot (x_\mathcal{L} - x) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2).$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

"CONTINUITÉ" DU FLUX EXACT

$$\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx \stackrel{\text{def}}{=} k_\mathcal{K}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx = k_\mathcal{L}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

FORMULES DE TAYLOR pour $x \in \sigma$

$$u(x_\mathcal{K}) = u(x) + \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot(-d_{\mathcal{K}\sigma}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + x_\sigma - x) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2),$$
$$u(x_\mathcal{L}) = u(x) + \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot(d_{\mathcal{L}\sigma}\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + x_\sigma - x) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2).$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx \overset{\text{def}}{=} k_\mathcal{K}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx = k_\mathcal{L}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

Formules de Taylor pour $x \in \sigma$

$$u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K}) = d_{\mathcal{L}\sigma}\nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + d_{\mathcal{K}\sigma}\nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + O(\text{size}(\mathcal{T})^2).$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|} \int_\sigma k(x) \nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x)\nabla u(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx \overset{\text{def}}{=} k_\mathcal{K} \int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx = k_\mathcal{L} \int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \, dx.$$

Formules de Taylor pour $x \in \sigma$

$$u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K}) = \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}} \left(k_\mathcal{L} \nabla u_{|\mathcal{L}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) + \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} \left(k_\mathcal{K} \nabla u_{|\mathcal{K}}(x) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

"CONTINUITÉ" DU FLUX EXACT

$$\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx \stackrel{\text{def}}{=} k_\mathcal{K}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx = k_\mathcal{L}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx.$$

FORMULES DE TAYLOR pour $x \in \sigma$

$$u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K}) = \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}\left(k_\mathcal{L}\nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\right) + \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}}\left(k_\mathcal{K}\nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\right) + O(\text{size}(\mathcal{T})^2)$$

ON INTÈGRE SUR σ

$$|\sigma|(u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})) = \left(\frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}} + \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}}\right)\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\, dx + O(\text{size}(\mathcal{T})^2).$$

$$R_\sigma(u) = \frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}} + \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} - \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot \boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx.$$

"Continuité" du flux exact

$$\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx \stackrel{\text{def}}{=} k_\mathcal{K}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx = k_\mathcal{L}\int_\sigma \nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx.$$

Formules de Taylor pour $x\in\sigma$

$$u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K}) = \frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}}\Big(k_\mathcal{L}\nabla u_{|\mathcal{L}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\Big) + \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}}\Big(k_\mathcal{K}\nabla u_{|\mathcal{K}}(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\Big) + O(\mathrm{size}(\mathcal{T})^2)$$

On intègre sur σ

$$\frac{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}}{\frac{d_{\mathcal{L}\sigma}}{k_\mathcal{L}} + \frac{d_{\mathcal{K}\sigma}}{k_\mathcal{K}}} \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\mathcal{K})}{d_{\mathcal{K}\mathcal{L}}} = \frac{1}{|\sigma|}\int_\sigma k(x)\nabla u(x)\cdot\boldsymbol{\nu}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}\,dx + O(\mathrm{size}(\mathcal{T})).$$

Retour