

# **Méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz**

Franck Boyer - Florence Hubert

Master 2ième année - Mathématiques et Applications

Aix-Marseille université

12 février 2014



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>I</b>	<b>Introduction aux méthodes de Schwarz</b>	<b>1</b>
1	Méthodes avec recouvrement . . . . .	1
1.1	Principe général . . . . .	2
1.2	Exemples en 1D . . . . .	2
1.3	La preuve de convergence originale de Schwarz . . . . .	4
1.4	La preuve variationnelle de P.L. Lions . . . . .	5
1.5	Formalisme algébrique . . . . .	10
2	Méthode sans recouvrement . . . . .	17
2.1	Principe général . . . . .	17
2.2	Exemples en 1D et 2D. Notion de méthode optimale . . . . .	18
2.3	La preuve de convergence . . . . .	19



## Chapitre I

# INTRODUCTION AUX MÉTHODES DE SCHWARZ

---

Basiquement les méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz consiste à remplacer la résolution d'une EDP posée sur un domaine  $\Omega$  potentiellement gros et compliqué par une succession de résolutions de la même EDP sur des sous-domaines de  $\Omega$ , notés  $\Omega_i$ , supposément plus simples, plus petits, etc ...

Evidemment, ceci ne peut se faire tout à fait aisément et il s'agit de procéder à des résolutions itératives sur les sous-domaines, choisies de telle sorte que la solution exacte du problème complet soit obtenue à convergence.

Historiquement ces méthodes ont été introduites pour démontrer d'un point de vue théorique l'existence de solutions au problème de Dirichlet sur des domaines plus complexes que ceux pour lesquels un calcul explicite est possible (disque, carré, ...).

Aujourd'hui, ces méthodes sont plutôt utilisées à des fins numériques (ou bien sur le problème continu avant discrétisation, ou bien directement sur le problème discrétisé, voire même directement sur la matrice du problème) afin d'accélérer la résolution numérique des problèmes, ou même de permettre un calcul parallèle des solutions.

Dans cette courte présentation, on va se baser sur le problème modèle suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

## 1 Méthodes avec recouvrement

On commence par étudier le cas où les sous-domaines de  $\Omega$  se recouvrent, par exemple de l'une des deux façons indiquées dans la figure I.1.

On note  $\gamma_{12}$  (resp.  $\gamma_{21}$ ) la partie du bord de  $\partial\Omega_1$  (resp.  $\partial\Omega_2$ ) qui est contenue dans  $\overline{\Omega}_2$  (resp.  $\overline{\Omega}_1$ ).

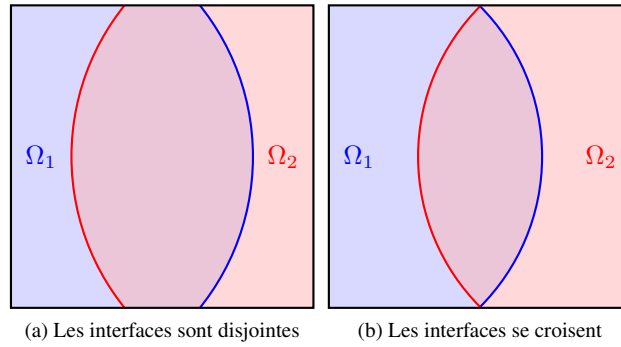


FIGURE I.1: Décomposition du carré unité en deux sous-domaines qui se recouvrent

## 1.1 Principe général

Etant donnée une partition de  $\Omega$  de la forme donnée dans la figure I.1, l'algorithme de Schwarz le plus élémentaire consiste à construire des suites  $(u_n^1)_n \subset H^1(\Omega_1)$  et  $(u_n^2)_n \subset H^1(\Omega_2)$  de la façon suivante

- Choisir des initialisations  $u_0^1$  et  $u_0^2$ .
- Pour tout  $n \geq 0$ , effectuer de façon successive :

- Calcul de  $u_{n+1}^1 \in H^1(\Omega_1)$  solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1}^1 = f, & \text{dans } \Omega_1 \\ u_{n+1}^1 = g, & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, \\ u_{n+1}^1 = u_n^2, & \text{sur } \gamma_{12}. \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

- Calcul de  $u_{n+1}^2 \in H^1(\Omega_2)$  solution du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1}^2 = f, & \text{dans } \Omega_2 \\ u_{n+1}^2 = g, & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ u_{n+1}^2 = u_{n+1}^1, & \text{sur } \gamma_{21}. \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

- S'arrêter à convergence (si celle-ci se produit !), i.e. quand  $u_n^1$  et  $u_n^2$  sont suffisamment proches sur  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  par exemple.

Remarquons que l'étude de la convergence peut toujours se ramener au cas  $f = 0$  et  $g = 0$  en soustrayant la (restriction de la) solution limite recherchée  $u$  de toutes les valeurs de  $u_n^1$  et  $u_n^2$ . Le problème revient donc à savoir si, en partant de données initiales non nulles  $u_0^1$  et  $u_0^2$ , l'algorithme précédent (avec  $f = 0$  et  $g = 0$ ) fournit bien deux suites qui convergent vers 0.

Dans toute la suite nous allons donc supposer  $f = 0$  et  $g = 0$ .

Par ailleurs, on voit que l'algorithme est complètement déterminé par la seule valeur de la donnée initiale  $u_0^2$  sur l'interface  $\gamma_{12}$  et qu'au bout d'une itération complète, on obtient une valeur de la trace de  $u_1^2$  sur  $\gamma_{12}$ . L'algorithme peut donc être compris comme une itération de la fonction qui à une trace sur  $\gamma_{12}$  associe une nouvelle trace sur  $\gamma_{12}$  obtenue en résolvant successivement deux problèmes elliptiques.

## 1.2 Exemples en 1D

On va commencer par essayer de comprendre la situation en dimension 1 d'espace.

### 1.2.1 Le problème de Laplace

On prend donc  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $\Omega_1 = ]0, \gamma_{12}[$  et  $\Omega_2 = ]\gamma_{21}, 1[$ . Si on note  $\alpha$  la valeur de  $u^2(\gamma_{12})$  au début de l'algorithme, on peut calculer aisément

$$u^1(x) = \frac{\alpha x}{\gamma_{12}}, \quad \forall x \in \Omega_1,$$

ce qui donne la valeur de la trace transmise à  $\Omega_2$  :  $u^1(\gamma_{21}) = \frac{\alpha\gamma_{21}}{\gamma_{12}}$  et permet la résolution du problème dans  $\Omega_2$

$$u^2(x) = \frac{\alpha\gamma_{21}}{\gamma_{12}} \frac{1-x}{1-\gamma_{21}}, \quad \forall x \in \Omega_2.$$

On obtient, à la fin de l'itération

$$u^2(\gamma_{12}) = \alpha \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{12}} \frac{1-\gamma_{12}}{1-\gamma_{21}}.$$

Ainsi, l'ensemble de l'algorithme revient à multiplier  $\alpha$  par le nombre

$$k = \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{12}} \frac{1-\gamma_{12}}{1-\gamma_{21}} = 1 - \frac{\gamma_{12}-\gamma_{21}}{\gamma_{12}(1-\gamma_{21})}.$$

On observe que  $0 < k < 1$  dès lors que les deux sous-domaines se recouvrent (i.e.  $\gamma_{21} < \gamma_{12}$ ) et donc que la méthode itérative va converger de façon géométrique de raison  $k$ . Observons aussi que la raison tend vers 1 quand la taille du recouvrement  $\gamma_{12} - \gamma_{21}$  tend vers 0.

Les conclusions de cette étude sont que la convergence a bien lieu mais qu'elle se dégrade de façon importante quand la taille du recouvrement tend vers 0.

De plus, il est clair que si le recouvrement est nul, la méthode est stationnaire et ne peut en aucun cas converger.

### 1.2.2 Un problème un peu plus général. En route vers le 2D.

Pour des raisons qui apparaîtront clairement un peu plus loin il est instructif de procéder aux mêmes calculs mais pour l'opérateur différentiel  $-u'' + \omega^2 u$  au lieu de  $-u''$ .

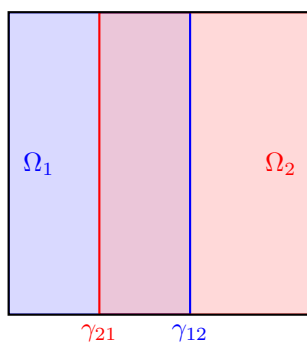
Tous calculs faits, on trouve également une convergence géométrique de la méthode de raison

$$k(\omega) = \frac{\sinh(\omega(1-\gamma_{12})) \sinh(\omega\gamma_{21})}{\sinh(\omega(1-\gamma_{21})) \sinh(\omega\gamma_{12})}.$$

Ce nombre est bien toujours compris entre 0 et 1 ce qui prouve la convergence. Quand  $\omega \rightarrow 0$ , on retrouve le cas précédent mais si on étudie la fonction  $\omega \mapsto k(\omega)$ , alors on observe que c'est une fonction décroissante de  $\omega$  et qui converge vers 0 exponentiellement vite quand  $\omega \rightarrow +\infty$ .

Ainsi, pour un choix de sous-domaines fixé, la méthode converge d'autant plus vite que la fréquence  $\omega$  est grande.

Ceci a des conséquences sur la compréhension de la méthode en dimension 2. Considérons la situation de la figure suivante où  $\Omega$  est le carré unité et  $\Omega_1 = ]0, \gamma_{12}[ \times ]0, 1[$  et  $\Omega_2 = ]\gamma_{21}, 1[ \times ]0, 1[$ .



Dans cette géométrie particulière, on peut effectuer une transformée de Fourier dans la variable  $y$  de  $u^1$  et  $u^2$ , ce qui revient à regarder les équations vérifiées par les quantités

$$v_{1k} : x \mapsto \int_0^1 u^1(x, y) \sin(k\pi y) dy, \quad \text{et} \quad v_{2k} : x \mapsto \int_0^1 u^2(x, y) \sin(k\pi y) dy.$$

On obtient

$$\begin{aligned} -v_{1k}'' + k^2\pi^2 v_{1k} &= 0, \quad \text{dans } ]0, \gamma_{12}[, \\ -v_{2k}'' + k^2\pi^2 v_{2k} &= 0, \quad \text{dans } ]\gamma_{21}, 1[. \end{aligned}$$

On se trouve donc dans la situation décrite ci-dessus avec une fréquence  $\omega = k\pi$  qui dépend donc de  $k$ .

En utilisant les résultats précédents, on observe que le taux de convergence de la méthode à  $k$  fixé est d'autant meilleur que  $k$  est grand, ce qui signifie d'une part que la méthode est bien convergente en 2D (écrire en Fourier la convergence) et que d'autre part les hautes fréquences en  $y$  convergent beaucoup plus vite que les basses fréquences. C'est une propriété fondamentale de ce type de méthodes.

Ainsi, on peut coupler la méthode à un solveur basse fréquence en  $y$ .

### 1.3 La preuve de convergence originale de Schwarz

H. Schwarz a démontré la convergence de cette méthode dans un cadre assez général en utilisant le principe du maximum dont nous rappelons une conséquence ici.

#### Théorème I.1

*Si  $w_1$  est solution de  $\Delta w_1 = 0$  dans  $\Omega_1$  avec  $w_1 = 1$  sur  $\gamma_{12}$  et  $w_1 = 0$  sur  $\partial\Omega_1 \setminus \gamma_{12}$ , alors  $w_1$  est continue sur  $\bar{\Omega}_1$  sauf possiblement sur  $\partial\Omega \cap \gamma_{12}$  et de plus elle ne peut atteindre son maximum à l'intérieur de  $\Omega_1$ .*

On peut dès lors étudier la convergence de la méthode de Schwarz dans le cas de la Figure I.1a.

Soit  $v : \gamma_{12} \rightarrow \mathbb{R}$  la trace sur  $\gamma_{12}$  de la donnée initiale de la composante  $u^2$ .

Par définition de  $u^1$  et de  $w_1$ , nous avons

$$-\|v\|_\infty w_1 \leq u^1 \leq \|v\|_\infty w_1, \quad \text{sur } \partial\Omega_1,$$

et les trois fonctions intervenant dans cette inégalité sont harmoniques dans  $\Omega_1$ . Le principe du maximum implique que nous avons

$$-\|v\|_\infty w_1 \leq u^1 \leq \|v\|_\infty w_1, \quad \text{dans tout } \Omega_1,$$

et en particulier sur l'interface  $\gamma_{21} \subset \Omega_1$  nous avons

$$\sup_{\gamma_{21}} |u^1| \leq \left( \sup_{\gamma_{21}} w_1 \right) \|v\|_\infty.$$

Par le théorème précédent, la fonction  $w_1$  est continue sur le compact  $\gamma_{21}$ , elle y atteint donc son maximum, celui ne pouvant pas être atteint sur le bord (car  $w_1$  est nulle en ces points). Le maximum de  $w_1$  sur  $\gamma_{21}$  est donc atteint à l'intérieur de  $\Omega_1$  et il est donc nécessairement strictement plus petit que 1 sur les interfaces, sinon le principe du maximum impliquerait que  $w_1 = 1$  partout.

In fine, on a obtenu

$$\sup_{\gamma_{21}} |u^1| \leq k_1 \sup_{\gamma_{12}} |v|,$$

avec  $k_1 \in ]0, 1[$ .

De la même manière pour la seconde étape d'une itération de la méthode, on trouve

$$\sup_{\gamma_{12}} |u^2| \leq k_2 \sup_{\gamma_{21}} |u^1|,$$

avec  $k_2 \in ]0, 1[$ .

Tout compte fait, au bout d'une itération de la méthode on a

$$\sup_{\gamma_{12}} |u^2| \leq k_1 k_2 \sup_{\gamma_{12}} |v|,$$

ce qui montre le caractère contractant de la méthode et donc sa convergence géométrique vers 0.

Si les deux interfaces  $\gamma_{12}$  et  $\gamma_{21}$  se touchent de façon non tangentielle (voir la figure I.1b), alors l'argument précédent doit être affiné car les fonctions  $w_1$  et  $w_2$  ne sont plus continues aux points d'intersection.

On peut quand même démontrer que ces fonctions ont un maximum strictement plus petit que 1 mais il faut l'étudier de façon plus précise. La démonstration générale est un peu technique nous allons juste montrer comment l'argument fonctionne dans le cas du demi-espace.



Plus précisément on peut calculer explicitement la fonction  $w_1$  définie sur  $\mathbb{R}_+^2$  et telle que  $w_1(x, 0) = 1$  si  $x < 0$  et  $w_1(x, 0) = 0$  si  $x > 0$ . En effet, la formule explicite est donnée par

$$w_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_x^{+\infty} \frac{y}{t^2 + y^2} dt = -\frac{1}{\pi} f(x/y),$$

où  $f$  est la primitive s'annulant en  $+\infty$  de  $1/(1+t^2)$  (c'est-à-dire  $f(t) = \arctan(t) - \pi/2$ ).

On observe que si  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  de façon non tangentielle à la frontière, c'est-à-dire avec  $x/y \rightarrow \alpha$  pour un certain  $\alpha \in \mathbb{R}$ , alors nous obtenons

$$w_1(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{\pi} f(\alpha),$$

qui est bien une valeur strictement comprise entre 0 et 1.

Le reste de la preuve s'en suit directement.

## 1.4 La preuve variationnelle de P.L. Lions

Commençons par quelques remarques.

- Si  $v^i \in H_0^1(\Omega_i)$ , son prolongement par 0 à tout  $\Omega$  que l'on note encore  $v^i$  vérifie  $u^i \in H_0^1(\Omega)$ . On identifie donc  $H_0^1(\Omega_i)$  à un sous-espace fermé de  $H_0^1(\Omega)$ .
- Par construction des deux étapes (I.2) et (I.3), on peut conventionnellement prolonger  $u_{n+1}^1$  et  $u_{n+1}^2$  à tout  $\Omega$  par les formules suivantes

$$u_{n+1}^1 = \begin{cases} u_{n+1}^1 & \text{dans } \Omega_1, \\ u_n^2 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_1, \end{cases}$$

et

$$u_{n+1}^2 = \begin{cases} u_{n+1}^2 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_{n+1}^1 & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_2. \end{cases}$$

Par définition, ces prolongements sont bien dans  $H^1(\Omega)$ .

- On introduit la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$

intervenant dans la formulation variationnelle du problème étudié.

Si maintenant  $u_n^2 \in H_0^1(\Omega)$  est connu, alors le problème (I.2) admet la formulation variationnelle suivante

$$\text{Trouver } u_{n+1}^1 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } u_{n+1}^1 - u_n^2 \in H_0^1(\Omega_1) \text{ et } a(u_{n+1}^1, v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_1). \quad (\text{I.4})$$

De même, si  $u_{n+1}^1 \in H_0^1(\Omega)$  est connu, le problème (I.3) s'écrit

$$\text{Trouver } u_{n+1}^2 \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } u_{n+1}^2 - u_{n+1}^1 \in H_0^1(\Omega_2) \text{ et } a(u_{n+1}^2, v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega_2). \quad (\text{I.5})$$

Si on définit  $P_i, i = 1, 2$  la projection orthogonale dans l'espace de Hilbert  $H_0^1(\Omega)$  sur le sous-espace fermé  $H_0^1(\Omega_i)$  et  $Q_i = I - P_i$  la projection orthogonale sur l'orthogonal de cet espace, on voit que les deux étapes de l'algorithme s'écrivent désormais

$$\begin{aligned} u_{n+1}^1 &= u_n^2 - P_1(u_n^2) = Q_1(u_n^2), \\ u_{n+1}^2 &= u_{n+1}^1 - P_2(u_{n+1}^1) = Q_2(u_{n+1}^1). \end{aligned}$$

Ainsi, une itération complète de l'algorithme revient à appliquer deux projections successives sur deux sous-espaces fermés de  $H_0^1(\Omega)$ . Tout l'enjeu est donc de déterminer si  $Q_2 Q_1$  est une application contractante ou pas.

**Théorème I.2**

Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux sous-espaces fermés de  $H_0^1(\Omega)$  et  $P_i$  (resp.  $Q_i$ ) les projections orthogonales dans  $H_0^1$  sur  $V_i$  (resp. sur  $V_i^\perp$ ). On suppose que  $V_1 + V_2$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$  (ce qui est équivalent à  $V_1^\perp \cap V_2^\perp = \{0\}$ ).

Soit  $u_2^0 \in H_0^1(\Omega)$  quelconque une initialisation de l'algorithme. On pose, pour tout  $n$ ,

$$u_2^{n+1} = Q_2 Q_1 u_2^n.$$

Alors la suite  $(u_2^n)_n$  tend vers 0 dans  $H_0^1(\Omega)$  (autrement dit l'algorithme de Schwarz converge).

Si de plus on a  $V_1 + V_2 = H_0^1(\Omega)$ , alors la convergence est géométrique : il existe  $0 < k < 1$  tel que

$$\|u_2^n\|_{H_0^1} \leq k^n \|u_2^0\|_{H_0^1}, \quad \forall n \geq 0.$$

**Preuve :**

On écrit tout d'abord, la somme orthogonale

$$u_n^2 = P_1(u_n^2) + Q_1(u_n^2) = (u_n^2 - u_{n+1}^1) + u_{n+1}^1,$$

ce qui donne en passant à la norme

$$\|u_n^2\|_{H_0^1}^2 = \|u_n^2 - u_{n+1}^1\|_{H_0^1}^2 + \|u_{n+1}^1\|_{H_0^1}^2.$$

De la même façon, on a

$$\|u_{n+1}^1\|_{H_0^1}^2 = \|u_{n+1}^1 - u_{n+1}^2\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_{n+1}^2\|_{H_0^1}^2.$$

En particulier la suite des normes  $(\|u_n^2\|_n)$  est décroissante donc convergente et de plus

$$\|u_n^2 - u_{n+1}^1\|_{H_0^1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \quad (\text{I.6})$$

On peut extraire de  $(u_n^2)_n$  une sous-suite faiblement convergente donc on note  $u$  la limite. Comme  $u_n^2 \in V_2^\perp$  pour tout  $n$  et que  $V_2^\perp$  est un fermé faible de  $H_0^1(\Omega)$ , on a immédiatement que  $u \in V_2^\perp$ . Mais on a également que  $u_{n+1}^1 = Q_1 u_n^2$  converge faiblement vers  $Q_1 u$  et d'après (I.6) la différence  $u_{n+1}^1 - u_n^2$  tend vers 0. Ceci montre que  $Q_1 u = u$  et donc en particulier que  $u \in V_1^\perp$ .

On a donc montré que  $u \in V_1^\perp \cap V_2^\perp$  et donc par hypothèse  $u = 0$ .

Ainsi, la suite  $(u_n^2)_n$  a une unique valeur d'adhérence faible qui est 0, ce qui montre la convergence faible de toute la suite vers 0. Il reste à montrer la convergence forte.

Pour cela, on observe que

$$\begin{aligned} \|u_n^2\|_{H_0^1}^2 &= \|(Q_2 Q_1)^n u_2^0\|_{H_0^1}^2 = \langle (Q_1 P_2)^n (Q_2 Q_1)^n u_2^0, u_2^0 \rangle_{H_0^1} \\ &= \langle Q_1 (Q_2 Q_1)^{2n-1} u_2^0, u_2^0 \rangle_{H_0^1} = \langle u_{2n-1}^0, Q_1 u_2^0 \rangle_{H_0^1} \end{aligned}$$

et la convergence faible obtenue plus haut permet de conclure au fait que  $\|u_n^2\|_{H_0^1} \rightarrow 0$ .

Supposons maintenant que  $V_1 + V_2 = H_0^1(\Omega)$ . On va montrer que sous cette hypothèse la norme de tout élément de  $H_0^1(\Omega)$  peut être contrôlée par les normes des deux projections  $P_1 v$  et  $P_2 v$ .

En effet, l'hypothèse implique que l'application

$$\Phi : (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \mapsto v_1 + v_2 \in H_0^1(\Omega),$$

est surjective (et bien entendu linéaire et continue). Le théorème de l'application ouverte implique alors que  $\Phi$  est ouverte ce qui signifie que l'image de tout ouvert de  $V_1 \times V_2$  est ouverte dans  $H_0^1(\Omega)$  ou encore

$$\exists C > 0, \quad B_{H_0^1}(0, C) \subset \Phi(B_{V_1}(0, 1) \times B_{V_2}(0, 1)),$$

ce qui peut également s'écrire

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \exists (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2 \text{ tels que } v = v_1 + v_2, \text{ et } \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \leq \frac{1}{C} \|v\|^2. \quad (\text{I.7})$$

Pour tout  $v \in H_0^1(\Omega)$ , on prend le couple  $(v_1, v_2)$  donné ci-dessus et on écrit

$$\begin{aligned} \|v\|_{H_0^1}^2 &= \langle v, v_1 \rangle_{H_0^1} + \langle v, v_2 \rangle_{H_0^1} \\ &= \langle P_1 v, v_1 \rangle_{H_0^1} + \langle P_2 v, v_2 \rangle_{H_0^1} \\ &\leq \|P_1 v\|_{H_0^1} \|v_1\|_{H_0^1} + \|P_2 v\|_{H_0^1} \|v_2\|_{H_0^1} \\ &\leq C' \|v\|_{H_0^1} \left( \|P_1 v\|_{H_0^1} + \|P_2 v\|_{H_0^1} \right). \end{aligned}$$

On a donc bien montré qu'il existe une constante  $C' > 0$  telle que

$$\|v\|_{H_0^1} \leq C' (\|P_1 v\|_{H_0^1} + \|P_2 v\|_{H_0^1}), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{I.8})$$

On applique maintenant l'inégalité (I.8) à  $Q_1 v$  ce qui donne

$$\|Q_1 v\|_{H_0^1} \leq C' \|P_2 Q_1 v\|_{H_0^1}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En élevant au carré et en utilisant la décomposition orthogonale  $Q_1 v = P_2 Q_1 v + Q_2 Q_1 v$ , on obtient

$$\|Q_1 v\|_{H_0^1}^2 = \|P_2 Q_1 v\|_{H_0^1}^2 + \|Q_2 Q_1 v\|_{H_0^1}^2 \geq \frac{1}{(C')^2} \|Q_1 v\|_{H_0^1}^2 + \|Q_2 Q_1 v\|_{H_0^1}^2,$$

et donc

$$\|Q_2 Q_1 v\|_{H_0^1}^2 \leq \left(1 - \frac{1}{(C')^2}\right) \|Q_1 v\|_{H_0^1}^2.$$

Ceci implique

$$\|Q_2 Q_1 v\|_{H_0^1}^2 \leq \left(1 - \frac{1}{(C')^2}\right) \|v\|_{H_0^1}^2,$$

et donc le caractère contractant de l'application  $Q_2 Q_1$ . ■

Le résultat précédent est relativement abstrait. Pour le traiter dans le cadre donné plus haut on doit vérifier que les espaces  $V_1 = H_0^1(\Omega_1)$  et  $V_2 = H_0^1(\Omega_2)$  vérifient bien l'une ou l'autre des hypothèses proposées.

### Proposition I.3

Quelque soit la décomposition  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , l'espace  $H_0^1(\Omega_1) + H_0^2(\Omega_2)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$ .

#### Preuve :

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  une fonction test, dont on note  $K$  le support (compact dans  $\Omega$ ). On commence par remarquer qu'il existe  $\varepsilon > 0$  tel que

$$K \subset K_1^\varepsilon \cup K_2^\varepsilon,$$

où

$$K_i^\varepsilon = \{x \in \Omega_i, \quad d(x, \partial\Omega_i) \geq \varepsilon\}.$$

En effet, si ça n'était pas le cas on pourrait construire une suite de points de  $K$  telle que

$$d(x_n, \partial\Omega_i) \leq 1/n, \quad \forall i = 1, 2,$$

ce qui, après extraction de sous-suite convergente, impliquerait qu'il existe un élément de  $K$  (et donc de  $\Omega$ ) qui appartient à  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ , ce qui n'est pas possible car  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  et donc  $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 \subset \partial\Omega$ .

Comme  $K_i^\varepsilon$  est un compact contenu dans l'ouvert  $\Omega_i$ , on peut trouver une fonction  $\psi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$  telle que  $\varphi_1 = 1$  sur  $K_i^\varepsilon$ .

On vérifie que l'on peut maintenant écrire

$$\varphi = \frac{\psi_1}{\psi_1 + \psi_2} \varphi + \frac{\psi_2}{\psi_1 + \psi_2} \varphi.$$

Comme  $\psi_1 + \psi_2 \geq 1$  dans  $K$  (qui est le support de  $\varphi$ ), cette écriture donne une décomposition de  $\varphi$  en la somme d'une fonction de  $\mathcal{D}(\Omega_1)$  et d'une fonction de  $\mathcal{D}(\Omega_2)$ .

Ainsi, nous avons montré que

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega_1) + \mathcal{D}(\Omega_2),$$

ce qui implique que  $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega_1) + H_0^1(\Omega_2)$  et donc que ce dernier espace est bien dans  $H_0^1(\Omega)$ . ■

#### Proposition I.4

*On suppose que  $\gamma_{12}$  et  $\gamma_{21}$  ne s'intersectent pas ou bien qu'ils s'intersectent de façon non tangentielle au bord de  $\Omega$ . Alors nous avons l'égalité  $H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega_1) + H_0^1(\Omega_2)$ .*

#### Preuve :

Tout le problème revient à construire deux fonctions  $\psi_i$  ayant de bonnes propriétés de régularité (qu'on va préciser ci-dessous) et telles que

$$\psi_1 + \psi_2 = 1, \text{ dans } \Omega,$$

$$\psi_1 = 0, \text{ en dehors de } \Omega_1,$$

$$\psi_2 = 0, \text{ en dehors de } \Omega_2.$$

- Premier cas : les interfaces  $\gamma_{12}$  et  $\gamma_{21}$  ne s'intersectent pas (le recouvrement est donc suffisamment important). Il est alors facile de construire de tels  $\psi_i$  qui soient réguliers (disons Lipschitziens sur tout  $\Omega$ ).

Dans ce cas, toute fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$  s'écrit sous la forme

$$u = u\psi_1 + u\psi_2,$$

et on vérifie sans peine que  $u\psi_i \in H_0^1(\Omega_i)$  ce qui donne le résultat.

- Second cas : les interfaces  $\gamma_{12}$  et  $\gamma_{21}$  s'intersectent au bord de  $\Omega$ . Il est clair alors que l'on ne peut trouver des  $\psi_i$  réguliers vérifiant les propriétés ci-dessus car les deux dernières conditions impliquent que  $\psi_1 + \psi_2 = 0$  au point d'intersection des interfaces, ce qui contredit la première propriété.

Sous l'hypothèse que les interfaces ne sont pas tangentes, on peut toutefois construire de tels  $\psi_i$  avec la régularité localement Lipschitzienne dans  $\Omega$  et une estimation du gradient de la forme

$$|\nabla\psi_i(x)| \leq \frac{C}{d(x, \partial\Omega)}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Cette dernière estimation étant surtout utile près du point d'intersection, on va étudier ce qui se passe dans le cas simple où  $\Omega$  est un demi-espace et les interfaces sont des droites se coupant en  $(0, 0)$  d'équation  $x = \alpha y$  et  $x = \beta y$ ,  $y > 0$  et  $\alpha < \beta$ .

On définit alors

$$\psi_1(x, y) = \max\left(\min\left(\frac{2}{\alpha - \beta} \left(\frac{x}{y} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right), 1\right), 0\right),$$

et une définition similaire pour  $\psi_2$ .

On voit bien que  $\psi$  est localement Lipschitzienne dans  $\Omega$  et que la norme de son gradient est non nulle uniquement dans le secteur angulaire séparé par les deux interfaces. Dans ce secteur angulaire, le gradient de  $\psi_1$  vaut

$$\nabla\psi_1(x, y) = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Comme dans ce secteur angulaire on a  $|x/y| \leq \max(|\alpha|, |\beta|)$ , on déduit que

$$|\nabla\psi_1(x, y)| \leq C_{\alpha, \beta} \frac{1}{y},$$

ce qui est bien l'estimation recherchée vu que  $y$  est la distance du point  $(x, y)$  au bord du domaine.

Muni de ces deux fonctions, on peut alors toujours écrire

$$u = u\psi_1 + u\psi_2,$$

mais il faut s'assurer que  $u\psi_1 \in H_0^1(\Omega_1)$ . Par construction cette fonction est dans  $H_{loc}^1(\Omega)$  et nulle en dehors de  $\Omega_1$ . Il reste à voir qu'elle est dans  $H^1$  jusqu'au bord de  $\Omega$ . Ceci provient du calcul suivant

$$\nabla(u\psi_1) = \psi_1 \nabla u + u \nabla \psi_1,$$

qui donne

$$|\nabla(u\psi_1)(x)|^2 \leq C|\nabla u(x)|^2 + C \frac{|u(x)|^2}{d(x, \partial\Omega)^2},$$

et on peut utiliser l'inégalité de Hardy qui nous dit que pour toute fonction  $u \in H_0^1(\Omega)$ , la fonction  $u/d(\cdot, \partial\Omega)$  est dans  $L^2(\Omega)$  et vérifie

$$\left\| \frac{u}{d} \right\|_{L^2}^2 \leq C \|u\|_{H^1}^2.$$

Ceci conclut la preuve du fait que  $u\psi_1$  est dans  $H_0^1(\Omega)$  et donne le résultat attendu. ■

La preuve de convergence proposée donne une estimation de vitesse de convergence qui dépend de la meilleure constante qui apparaît dans (I.7). Il est donc potentiellement instructif d'estimer cette constante. Dans le cas 1D, on peut faire le calcul explicite et vérifier que la constante explose de façon inverse à la taille de l'overlap.

Soit donc  $\Omega = ]0, 1[$ ,  $\Omega_1 = ]0, \gamma_{12}[$  et  $\Omega_2 = ]\gamma_{21}, 1[$ . On se donne  $v \in H_0^1(\Omega)$  et on veut décomposer  $v$  en  $v_1 + v_2$  avec  $v_i \in H_0^1(\Omega_i)$ . Cela implique immédiatement que

$$v_1 = v, \text{ sur } \Omega_1 \setminus \Omega_2 = ]0, \gamma_{21}[,$$

$$v_2 = v, \text{ sur } \Omega_2 \setminus \Omega_1 = ]\gamma_{12}, 1[.$$

De plus, dans la zone de recouvrement  $\Delta = ]\gamma_{21}, \gamma_{12}[$ , si on note  $w$  la fonction affine qui vaut 0 en  $\gamma_{12}$  et qui coïncide avec  $v$  en  $\gamma_{21}$ , nous pouvons écrire  $v_1$  et  $v_2$  sous la forme

$$v_1 = w + \varphi, \quad v_2 = v - w - \varphi, \quad \text{avec } \varphi \in H_0^1(\Delta).$$

Il s'agit maintenant de minimiser la fonctionnelle strictement convexe

$$F : \varphi \in H_0^1(\Delta) \mapsto \int_{\Delta} |v_1'|^2 + |v_2'|^2 dx = \int_{\Delta} |w' + \varphi'|^2 + |v' - w' - \varphi'|^2 dx.$$

Un tel minimiseur  $\varphi$  existe et est unique et satisfait l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dx}(w' + \varphi') + \frac{d}{dx}(\varphi' + w' - v') = 0, \quad \text{dans } \Delta,$$

et comme  $w$  est affine, il reste

$$2\varphi'' = v'', \quad \text{dans } \Delta,$$

ce qui prouve que  $2\varphi - v$  doit être affine. Les conditions aux limites sur  $\varphi$  fournissent la solution

$$\varphi = \frac{1}{2} \left( v - \frac{x - \gamma_{12}}{\gamma_{21} - \gamma_{12}} v(\gamma_{21}) + \frac{x - \gamma_{21}}{\gamma_{21} - \gamma_{12}} v(\gamma_{12}) \right),$$

et la valeur du minimum

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \int_{\Delta} \left| v'/2 + \frac{1}{2} \frac{v(\gamma_{12}) + v(\gamma_{21})}{\gamma_{21} - \gamma_{12}} \right|^2 + \left| v'/2 - \frac{1}{2} \frac{v(\gamma_{12}) + v(\gamma_{21})}{\gamma_{21} - \gamma_{12}} \right|^2 dx \\ &= \int_{\Delta} \frac{1}{2} |v'|^2 + \frac{1}{2} \left| \frac{v(\gamma_{12}) + v(\gamma_{21})}{\gamma_{21} - \gamma_{12}} \right|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Delta} |v'|^2 dx + \frac{|v(\gamma_{12}) + v(\gamma_{21})|^2}{|\gamma_{12} - \gamma_{21}|}. \end{aligned}$$

On cherche donc maintenant la meilleure constante  $C > 0$  telle que

$$\frac{|v(\gamma_{12}) + v(\gamma_{21})|^2}{|\gamma_{21} - \gamma_{12}|} \leq C \int_{\Omega} |v'|^2 dx. \quad (\text{I.9})$$

Les valeurs de  $v$  aux bornes de  $\Delta$  étant fixés, la fonction  $v$  qui minimise le second membre est la fonction affine par morceaux  $\bar{v}$ , nulle en 0 et 1 et coïncidant avec  $v$  en  $\gamma_{12}$  et  $\gamma_{21}$ .

Tous calculs faits, on trouve

$$\int_0^1 |\bar{v}'|^2 dx = \frac{|v(\gamma_{21})|^2}{\gamma_{21}} + \frac{|v(\gamma_{12})|^2}{\gamma_{12}} + \frac{|v(\gamma_{12}) - v(\gamma_{21})|^2}{|\gamma_{12} - \gamma_{21}|}.$$

On voit ainsi qu'en prenant des  $v$  telles que  $v(\gamma_{12}) = v(\gamma_{21})$ , la constante  $C$  dans (I.9) vérifie

$$C \approx \frac{1}{|\gamma_{12} - \gamma_{21}|},$$

ce qui montre bien l'explosion de cette constante quand la taille du recouvrement tend vers 0.

## 1.5 Formalisme algébrique

Le preuve de convergence variationnelle donnée plus haut peut en fait être vue comme un cas particulier d'un algorithme plus général que nous allons décrire ici.

Ce formalisme contient beaucoup de méthodes différentes (Schwarz, multigrilles, etc ...).

Soit  $H$  un espace de Hilbert (éventuellement de dimension finie). On considère un problème linéaire du type

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H,$$

où  $a$  et  $L$  vérifient les hypothèses du théorème de Lax-Milgram (avec  $a$  symétrique pour simplifier ici). On introduit l'opérateur  $A$  et le vecteur  $b$  représentant  $a$  et  $L$  dans le produit scalaire de  $H$  :

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle, \quad \langle b, v \rangle = L(v), \quad \forall u, v \in H.$$

Au vu des hypothèses, la matrice  $A$  est symétrique définie positive. Le problème à résoudre s'écrit alors

$$\text{Trouver } u \in H \text{ tel que } Au = b. \quad (\text{I.10})$$

On suppose donnée une décomposition de l'espace  $H$  en sous-espaces fermés  $H_1, \dots, H_J$  (non nécessairement en somme directe). On note  $I_k : H_k \rightarrow H$  l'injection canonique et  $I'_k$  son adjoint, c'est-à-dire la projection sur  $H_k$  définie par

$$\langle I_k v_k, v \rangle = \langle v_k, I'_k v \rangle, \quad \forall v_k \in H_k, \forall v \in H.$$

La restriction de l'opérateur initial sur le sous-espace  $H_k$  est définie par

$$A_k = I'_k A I_k,$$

et comme  $A$  est SDP, on vérifie aisément que  $A_k$  est SDP dans  $H_k$ .

L'idée des méthodes présentées consiste à utiliser la résolution (éventuellement approchée) sur les sous-espaces  $H_k$  pour construire des méthodes itératives de résolution de (I.10).

Pour ce faire, on note  $R_k : H_k \rightarrow H_k$  un opérateur *résolution* dans  $H_k$  qui a vocation à être une approximation de  $A_k^{-1}$ , et qui d'ailleurs peut être égal à  $A_k^{-1}$  comme on l'a vu précédemment. On suppose que  $R_k$  est SDP dans  $H_k$  et que  $R_k A_k$  est diagonalisable (cet opérateur est  $A_k$ -SDP).

On va de plus typiquement supposer que  $\rho(I - R_k A_k) < 1$  (ceci ayant au moins un sens en dimension finie) de sorte que, à  $k$  fixé, la méthode itérative

$$u_k^{n+1} = u_k^n - R_k (A_k u_k^n - I'_k f), \quad \forall n \geq 0,$$

converge vers la solution de  $A_k u_k = I'_k f$ .

L'algorithme est alors le suivant : si on suppose une approximation  $u^n \in H$  de la solution de (I.10) connue, alors on effectue successivement :

- Poser  $u_0^n = u^n$ .

- Pour  $k = 1, \dots, J$  :

- Calculer la projection du résidu sur  $H_k$

$$r_k = I_k'(f - Au_{k-1}^n).$$

- Calculer le correcteur, c'est-à-dire résoudre la contribution du résidu sur  $H_k$

$$c_k = R_k r_k.$$

- Mettre à jour la solution approchée

$$u_k^n = u_{k-1}^n + I_k c_k.$$

- Définir la solution approchée en fin d'itération

$$u^{n+1} = u_J^{n+1}.$$

Comme  $f = Au$ , on peut récrire complètement l'algorithme en fonction de l'erreur  $e^n = u^n - u$ .

- Pour  $k = 1, \dots, J$  :

- Calculer la projection du résidu sur  $H_k$

$$r_k = -I_k' A e_{k-1}^n.$$

- Calculer le correcteur, c'est-à-dire résoudre la contribution du résidu sur  $H_k$

$$c_k = R_k r_k.$$

- Mettre à jour l'erreur

$$e_k^n = e_{k-1}^n + I_k c_k.$$

- Définir l'erreur finale

$$e^{n+1} = e_J^{n+1}.$$

Ceci s'écrit encore

$$e_k^n = (I - I_k R_k I_k' A) e_{k-1}^n, \quad \forall k.$$

Si on pose  $T_k = I_k R_k I_k' A$ , l'évolution de l'erreur au cours des itérations s'écrit donc

$$e^{n+1} = (I - T_J) \cdots (I - T_1) e^n, \quad \forall n \geq 0.$$

Ainsi l'étude de la convergence de la méthode se ramène à l'étude de la norme et du spectre d'opérateurs de la forme

$$E = (I - T_J) \cdots (I - T_1),$$

appelés opérateurs de propagation de l'erreur. On comprend mieux sous cette forme pourquoi la méthode s'appelle ici *méthode multiplicative*.

### Remarque I.5

Ce formalisme inclut par exemple les méthodes de Gauss-Seidel par blocs.

Nous aurons besoin d'introduire les opérateurs intermédiaires

$$E_j = (I - T_j) \cdots (I - T_1), \quad \forall 1 \leq j \leq J,$$

avec  $E_0 = I$  par convention.

On vérifie aisément par récurrence que

$$E_{j-1} - E_j = T_j E_{j-1}, \quad I - E_j = \sum_{i=1}^j T_i E_{i-1}. \quad (\text{I.11})$$

### Lemme I.6

Pour tout  $k$ , le projecteur  $A$ -orthogonal (i.e. pour le produit scalaire défini par  $A$ ) sur  $H_k$  s'exprime sous la forme

$$P_k = I_k (I'_k A I_k)^{-1} I'_k A = I_k (A_k)^{-1} I'_k A.$$

### Preuve :

On vérifie aisément que  $P_k^2 = P_k$  et que  $P_k I_k = I_k$ , ce qui prouve que l'image de  $P_k$  est égale à  $H_k$ .

De plus, on vérifie aussi que  $P_k$  est  $A$ -orthogonal et donc que  $P_k$  est bien le projecteur  $A$ -orthogonal sur  $H_k$ . ■

Ainsi, si on considère un solveur exact sur les sous-espaces  $R_k = A_k^{-1}$ , les opérateurs  $T_k$  définis plus haut ne sont autres que les projecteurs  $P_k$ , et on retrouve essentiellement le cadre de la preuve de Lions ci-dessus.

Dans le cas général, on va supposer qu'il existe  $0 < \omega_0 \leq \omega_1 < 2$  tels que

$$\omega_0 \langle Av_k, v_k \rangle \leq \langle AR_k A_k v_k, v_k \rangle \leq \omega_1 \langle Av_k, v_k \rangle, \quad \forall v_k \in H_k. \quad (\text{I.12})$$

Cette hypothèse implique que

$$\rho(I - R_k A_k) \leq \max(|1 - \omega_0|, |1 - \omega_1|) < 1.$$

### Lemme I.7

Les opérateurs  $T_k$  sont  $A$ -autoadjoints et  $A$ -positifs et vérifient

$$\rho(T_k) \leq \|T_k\|_A \leq \omega_1 < 2.$$

### Preuve :

Comme  $R_k$  et  $A_k$  sont SDP, on montre aisément les propriétés de symétrie et positivité de  $T_k$ .

De plus, la deuxième inégalité de (I.12) montre que les valeurs propres de  $R_k A_k$  (qui sont réelles car cet opérateur est  $A$ -symétrique) sont positives et bornées par  $\omega_1$ . Il en est donc de même de l'opérateur symétrique équivalent  $R_k^{1/2} A_k R_k^{1/2}$ . On a donc

$$\langle R_k^{1/2} A_k R_k^{1/2} v_k, v_k \rangle \leq \omega_1 \langle v_k, v_k \rangle,$$

et ainsi, en posant  $w_k = R_k^{1/2} v_k$ , on trouve

$$\langle A_k w_k, w_k \rangle \leq \omega_1 \langle R_k^{-1} w_k, w_k \rangle, \quad \forall w_k \in H_k.$$

On peut maintenant calculer

$$\begin{aligned} \langle AT_k v, T_k v \rangle &= \langle A I_k R_k I'_k A v, I_k R_k I'_k A v \rangle \\ &= \langle I'_k A I_k R_k I'_k A v, R_k I'_k A v \rangle \\ &= \langle A_k R_k I'_k A v, R_k I'_k A v \rangle \\ &\leq \omega_1 \langle R_k^{-1} R_k I'_k A v, R_k I'_k A v \rangle \\ &= \omega_1 \langle I'_k A v, R_k I'_k A v \rangle \\ &= \omega_1 \langle A I_k R_k I'_k A v, v \rangle \\ &= \omega_1 \langle AT_k v, v \rangle. \end{aligned} \quad (\text{I.13})$$



Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\langle AT_k v, T_k v \rangle \leq \omega_1^2 \langle Av, v \rangle,$$

ce qui montre bien que la  $A$ -norme de  $T_k$  est plus petite que  $\omega_1$ . ■

Démontrons maintenant la convergence de la méthode sous l'hypothèse que les espaces  $H_k$  sont suffisamment gros dans  $H$ .

### **Théorème I.8**

*Supposons que la somme  $\sum_{k=1}^J H_k$  est dense dans  $H$ , alors la méthode itérative précédente est convergente (quelque soit le choix des opérateurs de résolution locale  $R_k$  satisfaisant les hypothèses (I.12)).*

### **Preuve :**

On a vu que l'erreur évolue selon les formules suivantes (avec  $e_0^n = e^n$  et  $e_J^n = e^{n+1}$ )

$$e_k^n = (I - T_k)e_{k-1}^n, \quad \forall k = 1, \dots, J,$$

ou encore de façon globale

$$e^{n+1} = (I - T_J) \cdots (I - T_1)e^n.$$

On remarque que pour tout  $k$  et  $n$  nous avons

$$\begin{aligned} \|e_{k-1}^n\|_A^2 - \|(I - T_k)e_{k-1}^n\|_A^2 &= \|(I - T_k)e_{k-1}^n + T_k e_{k-1}^n\|_A^2 - \|(I - T_k)e_{k-1}^n\|_A^2 \\ &= \|T_k e_{k-1}^n\|_A^2 + 2\langle (I - T_k)e_{k-1}^n, T_k e_{k-1}^n \rangle_A \\ &= 2\langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A - \|T_k e_{k-1}^n\|_A^2. \end{aligned}$$

Si on utilise (I.13), et la définition de l'erreur au cran suivant  $e_k^n = (I - T_k)e_{k-1}^n$ , on arrive à l'inégalité

$$\|e_{k-1}^n\|_A^2 - \|e_k^n\|_A^2 \geq (2 - \omega_1) \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A. \quad (\text{I.14})$$

Comme  $\omega_1 < 2$ , le terme de droite est positif et on en déduit que la norme de l'erreur décroît à chaque étape du calcul (sur chaque sous-domaine) et donc, plus globalement on a la décroissance de  $(\|e^n\|_A)_n$ .

On en déduit en particulier que cette suite de nombres positifs est convergente et donc bornée. Si on revient à (I.14), on a de plus la convergence des séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A, \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, J. \quad (\text{I.15})$$

D'après (I.13) et la formule  $e_k^n - e_{k-1}^n = T_k e_{k-1}^n$ , on déduit que les séries

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|e_k^n - e_{k-1}^n\|^2, \quad \text{convergent pour tout } k = 1, \dots, J.$$

En particulier, la série suivante converge

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|e^{n+1} - e^n\|_A^2,$$

et donc en particulier

$$\|e^{n+1} - e^n\|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{I.16})$$

Comme  $(e^n)_n$  est  $A$ -bornée (donc bornée), on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente

$$e^{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e.$$

Par continuité de tous les opérateurs mis en jeu, on déduit

$$e_k^{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (I - T_k) \cdots (I - T_1)e, \text{ pour tout } k = 1, \dots, J.$$

On note  $e_k$  cette limite.

Grâce à la convergence des séries (I.15) on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A = 0,$$

et donc  $\langle T_k e_{k-1}, e_{k-1} \rangle_A = 0$ .

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle T_k (e_{k-1}^n - e_{k-1}), e_{k-1}^n - e_{k-1} \rangle_A \\ &= \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1}^n \rangle_A - 2 \langle T_k e_{k-1}^n, e_{k-1} \rangle_A + \langle T_k e_{k-1}, e_{k-1} \rangle_A \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} - \langle T_k e_{k-1}, e_{k-1} \rangle_A. \end{aligned}$$

D'après (I.13), on déduit que  $T_k e_{k-1} = 0$  pour tout  $k$ .

La limite faible  $e$  vérifie donc

$$T_1 e = 0, \quad T_2 (I - T_1) e = 0, \quad \dots, \quad T_k (I - T_{k-1}) \cdots (I - T_1) e = 0,$$

ce qui implique

$$T_k e = 0, \quad \forall k = 1, \dots, J.$$

Revenons à la définition de  $T_k = I'_k R_k I_k A$  et prenons le produit scalaire de  $T_k e = 0$  par  $Ae$

$$0 = \langle I_k R_k I'_k A e, A e \rangle = \langle R_k I'_k A e, I'_k A e \rangle,$$

et donc  $I'_k A e = 0$  pour tout  $k$ , ou encore

$$Ae \perp H_k, \quad \forall k \in \{1, \dots, J\}.$$

Ainsi,  $Ae$  est orthogonal à la somme des espaces  $H_k$  et par l'hypothèse de densité, cela implique  $Ae = 0$  et donc  $e = 0$ .

Ainsi la seule valeur d'adhérence faible possible pour la suite  $(e^n)_n$  est 0, ce qui montre la convergence faible de toute la suite.

Il reste à montrer la convergence forte. Pour cela on utilise le lemme suivant

### **Lemme I.9**

Soit  $S : H \rightarrow H$  un opérateur  $A$ -contractant au sens suivant

$$\|Sx\|_A \leq \|x\|_A, \quad \forall x \in H.$$

On a alors

$$|\langle x, y \rangle_A - \langle Sx, Sy \rangle_A| \leq \frac{1}{2} \|x\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y\|_A^2 - \frac{1}{2} \|Sx\|_A^2 - \frac{1}{2} \|Sy\|_A^2, \quad \forall x, y \in H.$$

### **Preuve (du lemme):**

- On commence par écrire

$$\langle x, y \rangle_A = \frac{1}{2} \|x\|_A^2 + \frac{1}{2} \|y\|_A^2 - \frac{1}{2} \|x - y\|_A^2,$$

$$\langle Sx, Sy \rangle_A = \frac{1}{2} \|Sx\|_A^2 + \frac{1}{2} \|Sy\|_A^2 - \frac{1}{2} \|S(x - y)\|_A^2.$$

Comme  $\|S(x - y)\|_A \leq \|x - y\|_A$ , et par soustraction, on obtient

$$\langle x, y \rangle_A - \langle Sx, Sy \rangle_A \geq -\frac{1}{2} \|x\|_A^2 - \frac{1}{2} \|y\|_A^2 + \frac{1}{2} \|Sx\|_A^2 + \frac{1}{2} \|Sy\|_A^2.$$

- Ensuite on écrit

$$\langle x, y \rangle_A = -\frac{1}{2}\|x\|_A^2 - \frac{1}{2}\|y\|_A^2 + \frac{1}{2}\|x + y\|_A^2,$$

$$\langle Sx, Sy \rangle_A = -\frac{1}{2}\|Sx\|_A^2 - \frac{1}{2}\|Sy\|_A^2 + \frac{1}{2}\|S(x + y)\|_A^2.$$

Comme  $\|S(x + y)\|_A \leq \|x + y\|_A$ , et par soustraction, on obtient

$$\langle Sx, Sy \rangle_A - \langle x, y \rangle_A \leq \frac{1}{2}\|x\|_A^2 + \frac{1}{2}\|y\|_A^2 - \frac{1}{2}\|Sx\|_A^2 - \frac{1}{2}\|Sy\|_A^2.$$

- La combinaison des deux inégalités précédentes donne le résultat attendu. ■

On applique ce résultat plusieurs fois par récurrence à  $E$  pour obtenir, pour tout  $n, m, p$

$$|\langle e^n, e^{n+m} \rangle_A - \langle e^{n+p}, e^{n+m+p} \rangle_A| \leq \frac{1}{2}\|e^n\|_A^2 + \frac{1}{2}\|e^{n+m}\|_A^2 - \frac{1}{2}\|e^{n+p}\|_A^2 - \frac{1}{2}\|e^{n+m+p}\|_A^2.$$

On a déjà vu que la suite  $(\|e^n\|_A)$  est convergente, on note  $l$  sa limite. Il s'agit de montrer que  $l = 0$ . L'inégalité précédente montre que pour tout  $m \geq 0$ , la suite

$$(\langle e^n, e^{n+m} \rangle_A)_n, \text{ est de Cauchy dans } \mathbb{R}, \text{ uniformément par rapport à } m.$$

Ceci montre que ces suites convergent, vers une limite notée  $l_m$ , et ce de manière uniforme par rapport à  $m$ . Donc nous avons

$$l_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} l.$$

Par ailleurs, en utilisant la borne sur  $(e^n)_n$  et (I.16), nous avons pour tout  $m$

$$|\langle e^n, e^{n+m} \rangle_A - \langle e^n, e^{n+m+1} \rangle_A| \leq \|e^n\|_A \|e^{n+m} - e^{n+m+1}\|_A \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ceci montre que  $l_m = l_{m+1}$  pour tout  $m$ .

Mais en utilisant la convergence faible de  $e^n$  vers 0, on peut aussi écrire

$$\langle e^n, e^{n+m} \rangle_A \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0,$$

et le théorème de double passage à la limite nous permet de conclure que  $l = 0$ , ce qui donne bien la convergence forte des approximations. ■

On peut maintenant conclure cette section en montrant une estimation d'erreur pour la méthode dans le cas où la somme des espaces  $H_k$  est égale à  $H$ .

### **Théorème I.10**

*On suppose que  $H = \sum_{k=1}^J H_k$ . Alors il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que*

*Pour tout  $v \in H$ , il existe  $v_1 \in H_1, \dots, v_J \in H_J$  tels que  $v = \sum_{k=1}^J v_k$  et  $\sum_{k=1}^J \|v_k\|_A^2 \leq C_0 \|v\|_A^2$ .*

*Par ailleurs, ceci implique que la méthode de Schwarz converge de façon géométrique : il existe une constante  $k < 1$  telle que*

$$\|e_n\|_A \leq \|e_0\|_A k^n.$$

### **Preuve :**

L'existence de la constante  $C_0$ , comme on l'a déjà vu, est une conséquence du théorème de l'application ouverte et donc du fait que les espaces  $H_k$  sont fermés et que leur somme est l'espace entier.

- On va tout d'abord montrer une estimation sur les opérateurs  $R_k^{-1}$ . On écrit  $v = \sum_{k=1}^J v_k$  comme dans l'hypothèse et on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^J \langle R_k^{-1} v_k, v_k \rangle &= \sum_{k=1}^J \langle A_k A_k^{-1} R_k^{-1} v_k, v_k \rangle \\
&\leq \sum_{k=1}^J \langle A_k v_k, v_k \rangle \frac{\langle A_k A_k^{-1} R_k^{-1} v_k, v_k \rangle}{\langle A_k v_k, v_k \rangle} \\
&\leq \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=1}^J \langle A_k v_k, v_k \rangle \\
&= \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=1}^J \langle A I_k v_k, I_k v_k \rangle \\
&= \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=1}^J \|I_k v_k\|_A^2 \\
&\leq \frac{C_0}{\omega_0} \|v\|_A^2.
\end{aligned}$$

On a utilisé ici l'hypothèse spectrale (I.12).

- On peut maintenant démontrer une inégalité du type *Lemme de Lions* qui consiste à estimer la norme d'un élément de  $H$  en fonction des normes de  $T_k v$ .

Soit  $v = \sum_{k=1}^J I_k v_k \in H$ , nous avons

$$\|v\|_A^2 = \sum_{k=1}^J \langle v, I_k v_k \rangle_A = \sum_{k=1}^J \langle I_k' A v, v_k \rangle = \sum_{k=1}^J \langle R_k I_k' A v, R_k^{-1} v_k \rangle.$$

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire  $\langle R_k \cdot, \cdot \rangle$  pour obtenir

$$\|v\|_A^2 \leq \left( \sum_{k=1}^J \langle R_k R_k^{-1} v_k, R_k^{-1} v_k \rangle \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=1}^J \langle R_k I_k' A v, I_k' A v \rangle \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En appliquant l'estimation sur les  $R_k^{-1}$  obtenue précédemment, il vient

$$\|v\|_A^2 \leq \left( \frac{C_0}{\omega_0} \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_A \left( \sum_{k=1}^J \langle I_k R_k I_k' A v, v \rangle_A \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Par définition de  $T_k = I_k R_k I_k' A$ , on obtient

$$\|v\|_A^2 \leq \frac{C_0}{\omega_0} \left( \sum_{k=1}^J \langle T_k v, v \rangle_A \right). \quad (\text{I.17})$$

- Pour  $1 \leq k \leq J$ , on écrit (en utilisant (I.11))

$$\langle T_k v, v \rangle_A = \langle T_k v, E_{k-1} v \rangle_A + \sum_{i=1}^{k-1} \langle T_k v, T_i E_{i-1} v \rangle_A.$$

Ensuite, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le semi-produit scalaire  $\langle T_k \cdot, \cdot \rangle_A$ , et (I.13) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\langle T_k v, v \rangle_A &\leq \langle T_k v, v \rangle_A^{\frac{1}{2}} \langle T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v \rangle_A^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{k-1} \langle T_k v, T_i v \rangle_A^{\frac{1}{2}} \langle T_i E_{i-1} v, T_i E_{i-1} v \rangle_A^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \langle T_k v, v \rangle_A^{\frac{1}{2}} \left( \langle T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v \rangle_A^{\frac{1}{2}} + \omega \sum_{i=1}^{k-1} \langle T_i E_{i-1} v, E_{i-1} v \rangle_A^{\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Si on simplifie et qu'on élève au carré, il vient

$$\langle T_k v, v \rangle_A \leq 2 \left( \langle T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v \rangle_A + \omega^2 (k-1) \sum_{i=1}^{k-1} \langle T_i E_{i-1} v, E_{i-1} v \rangle_A \right).$$

En sommant sur  $k$  et en réorganisant les termes, il vient

$$\sum_{k=1}^J \langle T_k v, v \rangle_A \leq [2 + \omega^2 J(J-1)] \sum_{k=1}^J \langle T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v \rangle_A. \quad (\text{I.18})$$

- L'inégalité (I.14), peut se récrire sous la forme plus générale suivante

$$\|v\|_A^2 - \|Ev\|_A^2 = \|v\|_A^2 - \|E_J v\|_A^2 \geq (2 - \omega_1) \sum_{k=1}^J \langle T_k E_{k-1} v, E_{k-1} v \rangle_A.$$

Avec (I.18), on obtient

$$\|v\|_A^2 - \|Ev\|_A^2 \geq \frac{2 - \omega_1}{2 + \omega^2 J(J-1)} \left( \sum_{k=1}^J \langle T_k v, v \rangle_A \right),$$

et maintenant on utilise (I.17) pour obtenir

$$\|v\|_A^2 - \|Ev\|_A^2 \geq \frac{2 - \omega_1}{2 + \omega^2 J(J-1)} \frac{\omega_0}{C_0} \|v\|_A^2.$$

Si on note  $C_1 = \frac{2 - \omega_1}{2 + \omega^2 J(J-1)} \frac{\omega_0}{C_0}$ , on a donc montré

$$\|Ev\|_A^2 \leq (1 - C_1) \|v\|_A^2, \quad \forall v \in H,$$

ce qui montre bien le caractère contractant de l'opérateur d'erreur avec la constante de contraction

$$k = 1 - C_1 < 1.$$

■

## 2 Méthode sans recouvrement

### 2.1 Principe général

Il s'agit maintenant de proposer des méthodes de décomposition de domaines qui fonctionnent dans le cas où les sous-domaines ne se recouvrent pas. On se convainc aisément qu'une méthode à base de conditions aux limites de Dirichlet (ou de Neumann) n'a aucune chance de fonctionner. C'est pourquoi P.L.Lions a proposé une version de ces méthodes basées sur des conditions de transmission de type Fourier. Plus exactement, étant connues les approximations  $u_n^i$  sur tous les sous-domaines, on calcule les nouvelles approximations  $u_{n+1}^i$  en calculant la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u_{n+1}^i = f, \text{ dans } \Omega_i \\ u_{n+1}^i = g, \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i, \\ \frac{\partial u_{n+1}^i}{\partial \nu_{ij}} + \lambda u_{n+1}^i = \underbrace{\frac{\partial u_n^j}{\partial \nu_{ij}} + \lambda u_n^j}_{= -\frac{\partial u_n^j}{\partial \nu_{ji}}}, \text{ sur } \gamma_{ij}. \end{array} \right. \quad (\text{I.19})$$

Dans ces équations  $\lambda$  est un paramètre strictement positif fixé. On discutera de sa valeur un peu plus tard.

En plus de ne pas nécessiter de recouvrement entre les sous-domaines, cette méthode est donc entièrement parallélisable puisque la résolution sur les sous-domaines se fait de façon simultanée.

## 2.2 Exemples en 1D et 2D. Notion de méthode optimale

### 2.2.1 Le cas 1D

On pose  $\Omega = ]0, 1[$  et  $\Omega_1 = ]0, \gamma[$ ,  $\Omega_2 = ]\gamma, 1[$  (ici il n'y a qu'une interface ...). Comme précédemment, on peut soustraire la solution exacte des solutions approchées et donc se ramener au cas  $f = 0$ ,  $g = 0$ .

On peut voir la méthode proposée comme une itération permettant de résoudre les équations  $(u^i)'' = 0$  dans  $\Omega_i$  avec les conditions de transmission

$$\begin{aligned}(u^1)'(\gamma) + \lambda u^1(\gamma) &= (u^2)'(\gamma) + \lambda u^2(\gamma), \\ -(u^2)'(\gamma) + \lambda u^2(\gamma) &= -(u^1)'(\gamma) + \lambda u^1(\gamma).\end{aligned}$$

Ces équations montrent bien que  $u^1 = u^2$  en  $\gamma$  et que  $(u^1)' = (u^2)'$  en  $\gamma$ , et donc que la réunion de  $u^1$  et  $u^2$  forme une solution de l'équation homogène sur tout  $\Omega$  qui ne peut être que 0.

Ainsi, on peut considérer la méthode comme une itération sur les données de Fourier  $g_n^1$  et  $g_n^2$ .

Ces données étant connues, on peut calculer  $u^1$  par les équations

$$(u_{n+1}^1)'' = 0, \quad u_{n+1}^1(0) = 0, \quad (u_{n+1}^1)'(\gamma) + \lambda u_{n+1}^1(\gamma) = g_n^2,$$

ce qui donne

$$u_{n+1}^1(x) = \frac{g_n^2}{1 + \lambda\gamma} x,$$

et permet de calculer le flux  $g_{n+1}^1$  qui sera passé au second domaine à l'itération suivante

$$g_{n+1}^1 = -(u_{n+1}^1)'(\gamma) + \lambda u_{n+1}^1(\gamma) = \frac{\lambda\gamma - 1}{\lambda\gamma + 1} g_n^2.$$

De la même façon on trouve

$$g_{n+1}^2 = \frac{\lambda(1 - \gamma) - 1}{\lambda(1 - \gamma) + 1} g_n^1.$$

Ainsi, l'itération s'écrit globalement sous la forme

$$\begin{pmatrix} g_{n+1}^1 \\ g_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda\gamma - 1}{\lambda\gamma + 1} \\ \frac{\lambda(1 - \gamma) - 1}{\lambda(1 - \gamma) + 1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_n^1 \\ g_n^2 \end{pmatrix}.$$

La convergence de la méthode est assurée si on montre que le rayon spectral de la matrice d'itération est plus petit que 1, ce qui est bien le cas ici.

On voit même que pour les choix particuliers suivants du paramètre

$$\lambda = \frac{1}{\gamma}, \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{1}{1 - \gamma},$$

la matrice d'itération est nilpotente et donc que la méthode converge en 2 itérations.

### 2.2.2 Le cas 2D

Si on étudie tout d'abord l'équation 1D suivante  $-u'' + \omega^2 u = 0$ , l'analyse précédente montre que la matrice d'itérations de la méthode s'écrit

$$A_{\omega, \lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\lambda \sinh(\omega(1-\gamma)) - \omega \cosh(\omega(1-\gamma))}{\lambda \sinh(\omega(1-\gamma)) + \omega \cosh(\omega(1-\gamma))} \\ \frac{\lambda \sinh(\omega\gamma) - \omega \cosh(\omega\gamma)}{\lambda \sinh(\omega\gamma) + \omega \cosh(\omega\gamma)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme on l'a vu cette équation modélise une situation 2D dans laquelle on a préalablement effectué une transformation de Fourier en  $y$ .

Pour un paramètre  $\lambda$  fixé, le taux de convergence de la méthode est piloté par le plus grand rayon spectral de  $A_{\omega, \lambda}$  pour toutes les valeurs de  $\omega$  présentes dans le système.

Si on imagine qu'on a discrétisé le système dans la variable  $y$  selon un maillage de pas  $h$ , la plus grande fréquence dans le système est de l'ordre  $\sim 1/h$ .

On peut alors chercher le paramètre optimal en résolvant le problème suivant

$$\inf_{\lambda > 0} \left( \sup_{\omega \in [0, 1/h]} \rho(A_{\omega, \lambda}) \right).$$

On peut montrer que ce paramètre optimal est alors de l'ordre de  $C/\sqrt{h}$ .

### 2.3 La preuve de convergence

#### **Théorème I.11**

*Les suites  $(u_n^i)_n$  obtenues par la méthode de Schwarz sans recouvrement vérifient*

$$u_n^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u|_{\Omega_i}, \text{ dans } H^1(\Omega_i) \text{ pour tout } i.$$

#### **Preuve :**

Remarquons tout d'abord que, quitte à soustraire la solution  $u$  du problème limite, il suffit de montrer le résultat pour  $u = 0$ ,  $f = 0$  et  $g = 0$ . C'est-à-dire de montrer la convergence faible vers 0 des approximations dans le cas  $f = 0$  et  $g = 0$ .

En guise de préliminaire, écrivons l'équation vérifiée par  $u_{n+1}^i - u_{n-1}^i$  sur le domaine  $\Omega_i$ . Celle-ci s'écrit

$$\begin{cases} -\Delta(u_{n+1}^i - u_{n-1}^i) = 0, & \text{dans } \Omega_i, \\ u_{n+1}^i - u_{n-1}^i = 0, & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i, \\ \frac{\partial(u_{n+1}^i - u_{n-1}^i)}{\partial\nu_{ij}} + \lambda(u_{n+1}^i - u_{n-1}^i - 2u_n^j) = 0, & \text{sur } \gamma_{ij}. \end{cases} \quad (\text{I.20})$$

- On commence par multiplier l'équation (I.20) par  $u_{n+1}^i - u_{n-1}^i$  et intégrer par parties

$$\int_{\Omega_i} |\nabla(u_{n+1}^i - u_{n-1}^i)|^2 dx + \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_{n+1}^i - u_n^j|^2 dx = \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_{n-1}^i - u_n^j|^2 dx.$$

On somme sur  $i$  et sur  $n$  pour obtenir

$$\sum_{n \geq 0} \sum_i \int_{\Omega_i} |\nabla(u_{n+1}^i - u_{n-1}^i)|^2 dx < +\infty, \quad (\text{I.21})$$

et la borne

$$\sup_{n \geq 0} \left( \sum_{i \neq j} \int_{\gamma_{ij}} |u_{n+1}^i - u_n^j|^2 dx \right) < +\infty. \quad (\text{I.22})$$

- Sur tous les domaines  $\Omega_i$  qui touchent le bord de  $\Omega$ , de sorte que  $u_{n+1}^i - u_{n-1}^i$  est nul sur une partie du bord de  $\Omega_i$  et on peut utiliser l'inégalité de Poincaré dans  $\Omega_i$  pour majorer les normes  $L^2(\Omega_i)$  par la norme du gradient.

Pour les domaines qui ne touchent pas le bord, on utilise les conditions de transmission et le lemme suivant

#### **Lemme I.12**

*Pour tout domaine  $O$  et  $\gamma_0 \subset \partial O$  d'intérieur non vide dans  $\partial O$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $u \in H^1(O)$  telle que  $\Delta u \in L^2(O)$  on a*

$$\|u\|_{H^1(O)} \leq C \left( \|\nabla u\|_{L^2(O)} + \|\Delta u\|_{L^2(O)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial \nu} + \lambda u \right\|_{H^{-1/2}(\gamma_0)} \right).$$

Ceci permet de proche en proche d'obtenir des estimations des normes  $L^2(\Omega_i)$  sur tous les domaines.

On déduit ainsi de (I.21) l'inégalité

$$\sum_{n \geq 0} \sum_i \int_{\Omega_i} |u_{n+1}^i - u_{n-1}^i|^2 dx < +\infty, \quad (\text{I.23})$$

puis par le théorème de traces

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{i \neq j} \int_{\gamma_{ij}} |u_{n+1}^i - u_{n-1}^i|^2 dx < +\infty. \quad (\text{I.24})$$

- Maintenant on multiplie (I.20) par  $u_{n+1}^i$  et on intègre par parties

$$\int_{\Omega_i} \nabla(u_{n+1}^i - u_{n-1}^i) \cdot \nabla u_{n+1}^i dx + \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} (u_{n+1}^i + u_{n-1}^i - 2u_n^j) u_{n+1}^i dx.$$

On utilise les formules algébriques suivantes

$$\nabla(u_{n+1}^i - u_{n-1}^i) \cdot \nabla u_{n+1}^i = \frac{1}{2} |\nabla u_{n+1}^i|^2 - \frac{1}{2} |\nabla u_{n-1}^i|^2 + \frac{1}{2} |\nabla(u_{n+1}^i - u_{n-1}^i)|^2,$$

$$(u_{n+1}^i + u_{n-1}^i - 2u_n^j) u_{n+1}^i = \frac{1}{2} |u_{n+1}^i|^2 + \frac{1}{2} |u_{n-1}^i|^2 - |u_n^j|^2 + |u_{n+1}^i - u_n^j|^2 - \frac{1}{2} |u_{n+1}^i - u_{n-1}^i|^2.$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} |\nabla u_{n+1}^i|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_{n+1}^i|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_{n-1}^i|^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} |\nabla(u_{n+1}^i - u_{n-1}^i)|^2 dx + \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_{n+1}^i - u_n^j|^2 \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} |\nabla u_{n-1}^i|^2 dx + \lambda \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_n^j|^2 dx \\ & + \frac{\lambda}{2} \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_{n+1}^i - u_{n-1}^i|^2 dx. \end{aligned}$$

On somme maintenant sur  $i$  et on introduit

$$A_n = \sum_i \int_{\Omega_i} |\nabla u_n^i|^2 dx,$$

$$B_n = \lambda \sum_i \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_n^i|^2 dx,$$

$$C_n = \lambda \sum_i \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_{n+1}^i - u_n^j|^2 dx,$$

$$D_n = \frac{\lambda}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_{n+1}^i - u_{n-1}^i|^2 dx.$$

Il vient

$$\frac{1}{2} A_{n+1} + \frac{1}{2} (B_{n+1} + B_{n-1}) + C_n \leq \frac{1}{2} A_{n-1} + B_n + D_n,$$

ou encore

$$\frac{1}{2} A_{n+1} + \frac{1}{2} (B_{n+1} - B_n) + C_n \leq \frac{1}{2} A_{n-1} + \frac{1}{2} (B_n - B_{n-1}) + D_n.$$



Si on somme cette inégalité entre  $n = 1$  et  $N$ , on trouve

$$\frac{1}{2}(A_{N+1} + A_N) + \frac{1}{2}(B_{N+1} - B_N) + \sum_{n=1}^N C_n \leq \frac{1}{2}(A_0 + A_1) + \frac{1}{2}(B_1 - B_0) + \sum_{n=1}^N D_n. \quad (\text{I.25})$$

On calcule

$$\begin{aligned} B_{N+1} - B_N &= \lambda \sum_{i \neq j} \int_{\gamma_{ij}} |u_{N+1}^i|^2 - |u_N^j|^2 dx \\ &= \lambda \sum_{i \neq j} \int_{\gamma_{ij}} (u_{N+1}^i - u_N^j)(u_{N+1}^i + u_N^j) dx, \end{aligned}$$

d'où

$$|B_{N+1} - B_N| \leq \lambda \sqrt{C_N} \left( \sum_{i \neq j} \int_{\gamma_{ij}} |u_{N+1}^i|^2 + |u_N^j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais par l'inégalité de Poincaré (pour les sous-domaines touchant le bord) et une utilisation répétée du lemme I.12 pour les autres, on a l'estimation des traces

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} |u_n^i|^2 dx &\leq C \sum_i \sum_{j \neq i} \|u_n^i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \\ &\leq M \left( \sum_i \|\nabla u_n^i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

Ceci montre qu'il existe une constante  $M$  ne dépendant que des données vérifiant

$$|B_{N+1} - B_N| \leq M \sqrt{C_N} (1 + \sqrt{A_N + A_{N+1}}).$$

Grâce à l'inégalité (I.22) qui montre que la suite  $(C_n)_n$  est bornée, on conclut finalement que

$$|B_{N+1} - B_N| \leq \tilde{M} (1 + \sqrt{A_N + A_{N+1}}).$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\frac{1}{2} |B_{N+1} - B_N| \leq \frac{\tilde{M} + \tilde{M}^2}{2} + \frac{1}{4} (A_N + A_{N+1}),$$

et donc (I.25) donne

$$\frac{1}{4} (A_{N+1} + A_N) + \sum_{n=1}^N C_n \leq \frac{\tilde{M} + \tilde{M}^2}{2} + \frac{1}{2} (A_0 + A_1) + \frac{1}{2} (B_1 - B_0) + \sum_{n=1}^N D_n. \quad (\text{I.27})$$

Enfin, d'après (I.24), la série de terme général  $D_n$  est convergente et donc, in fine, on a montré

$$\begin{aligned} \sup_{N \geq 1} A_N &< +\infty, \\ \sum_{n \geq 1} C_n &< +\infty. \end{aligned}$$

Avec (I.26), on a donc finalement montré en particulier que

$$(u_n^i)_n \text{ est bornée dans } H^1(\Omega_i) \text{ pour tout } i,$$

et

$$\|u_{n+1}^i - u_n^j\|_{L^2(\gamma_{ij})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{I.28})$$

- Des considérations précédentes, on déduit que les suites

$$(u_n^1)_n, \dots, (u_n^J)_n, \text{ et } (u_{n+1}^1)_n, \dots, (u_{n+1}^J)_n,$$

sont toutes bornées dans les Sobolev respectifs et on peut donc extraire une même sous-suite et trouver des  $u^i, \tilde{u}^i \in H^1(\Omega_i)$  tels que

$$\begin{aligned} u_{\varphi(n)}^i &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} u^i, \text{ dans } H^1(\Omega_i) \\ u_{\varphi(n)+1}^i &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{u}^i, \text{ dans } H^1(\Omega_i). \end{aligned}$$

De plus, d'après (I.23), nous avons également

$$u_{\varphi(n)+2}^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u^i, \text{ dans } H^1(\Omega_i).$$

Il est clair que les  $u^i$  et  $\tilde{u}^i$  satisfont l'équation  $-\Delta u^i = -\Delta \tilde{u}^i = 0$  dans chaque  $\Omega_i$  ainsi que les conditions de Dirichlet sur  $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$ . De plus, d'après (I.28), on a les égalités

$$u^i = \tilde{u}^j, \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall i \neq j. \quad (\text{I.29})$$

En passant à la limite (faible) dans la condition de Fourier sur chaque interface, on trouve également

$$\frac{\partial u^i}{\partial \nu_{ij}} = \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial \nu_{ij}}, \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall i \neq j. \quad (\text{I.30})$$

Par passage à la limite dans les équations,  $u^i$  et  $\tilde{u}^i$  sont solutions, dans chaque sous-domaine, des problèmes

$$\begin{aligned} -\Delta u^i &= 0, \quad \frac{\partial u^i}{\partial \nu_{ij}} = \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial \nu_{ij}}, \\ -\Delta \tilde{u}^i &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \nu_{ij}} = \frac{\partial u^j}{\partial \nu_{ij}}. \end{aligned}$$

On soustrait ces deux équations, on multiplie par  $u^i - \tilde{u}^i$  et on intègre par parties, on trouve

$$0 = \int_{\Omega_i} |\nabla(u^i - \tilde{u}^i)|^2 dx - \sum_{j \neq i} \int_{\gamma_{ij}} \left( \frac{\partial u^i}{\partial \nu_{ij}} - \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \nu_{ij}} \right) (u^i - \tilde{u}^i) dx, \quad \forall i \in \{1, \dots, J\}.$$

En sommant sur  $i$  et en regroupant les termes de chaque interface

$$0 = \sum_i \int_{\Omega_i} |\nabla(u^i - \tilde{u}^i)|^2 dx - \sum_{i < j} \int_{\gamma_{ij}} \left[ \left( \frac{\partial u^i}{\partial \nu_{ij}} - \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial \nu_{ij}} \right) (u^i - \tilde{u}^i) + \left( \frac{\partial u^j}{\partial \nu_{ji}} - \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial \nu_{ji}} \right) (u^j - \tilde{u}^j) \right] dx.$$

On utilise alors les conditions de transmissions obtenues à la limite (I.29) et (I.30) (et on remarque que les normales  $\nu_{ij}$  et  $\nu_{ji}$  sont opposées) pour conclure que chacun des termes d'interface dans cette somme est nul.

On conclut de tout cela que  $u^i = \tilde{u}^i$  pour tout  $i$ . A la lumière des ces égalités, on constate que les conditions de transmission (I.29) (I.30) deviennent

$$u^i = u^j, \text{ et } \frac{\partial u^i}{\partial \nu_{ij}} = \frac{\partial u^j}{\partial \nu_{ij}} \text{ sur } \gamma_{ij}, \forall i \neq j.$$

Ainsi, la fonction  $v$  définie sur  $\Omega$  en recollant les fonctions  $u^i$  est bien dans  $H_0^1(\Omega)$  (raccord continu aux interfaces) et vérifie l'équation  $-\Delta v = 0$  dans  $\Omega$  (raccord des flux). Ceci prouve donc que  $v = 0$ .

Par unicité de cette valeur d'adhérence faible, on a bien établi les convergences

$$u_n^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ dans } H^1(\Omega_i) \text{ pour tout } i.$$

■

# BIBLIOGRAPHIE

---

- [Gan08] Martin J. Gander, *Schwarz methods over the course of time*, Electron. Trans. Numer. Anal. **31** (2008), 228–255, <http://www.unige.ch/~gander/Preprints/SchwarzHistorical.pdf>. MR 2569603 (2011a :65440)
- [Gan09] ———, *Schwarz methods over the course of time*, <http://www.unige.ch/~gander/Preprints/SchwarzTalk.pdf>, 2009.
- [Hol94] Michael Holst, *Algebraic schwarz methods*, <http://ccom.ucsd.edu/~mholst/pubs/dist/Hols94c.pdf>, 1994.
- [Lio88] P.-L. Lions, *On the Schwarz alternating method. I*, First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Paris, 1987), SIAM, Philadelphia, PA, 1988, [http://www.ddm.org/DD01/On\\_the\\_Schwarz\\_Alternating\\_Method\\_I.pdf](http://www.ddm.org/DD01/On_the_Schwarz_Alternating_Method_I.pdf), pp. 1–42. MR 972510 (90a :65248)
- [Lio89] ———, *On the Schwarz alternating method. II. Stochastic interpretation and order properties*, Domain decomposition methods (Los Angeles, CA, 1988), SIAM, Philadelphia, PA, 1989, [http://www.ddm.org/DD02/On\\_the\\_Schwarz\\_Alternating\\_Method\\_2\\_Stochastic\\_Interpretation\\_and\\_Order\\_properties.pdf](http://www.ddm.org/DD02/On_the_Schwarz_Alternating_Method_2_Stochastic_Interpretation_and_Order_properties.pdf), pp. 47–70. MR 992003 (90e :65140)
- [Lio90] ———, *On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains*, Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Houston, TX, 1989), SIAM, Philadelphia, PA, 1990, [http://www.ddm.org/DD03/On\\_the\\_Schwarz\\_Alternating\\_Method\\_III\\_A\\_Variant\\_for\\_Nonoverlapping\\_Subdomains\\_\(Lions\).pdf](http://www.ddm.org/DD03/On_the_Schwarz_Alternating_Method_III_A_Variant_for_Nonoverlapping_Subdomains_(Lions).pdf), pp. 202–223. MR 1064345 (91g :65226)
- [TW05] Andrea Toselli and Olof Widlund, *Domain decomposition methods—algorithms and theory*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 34, Springer-Verlag, Berlin, 2005. MR 2104179 (2005g :65006)