MASTER Mathématiques 2ème année, 2010-2011, Marseille.
Spécialité EDP et Calcul Scientifique.
Notes de cours autorisées - Durée : 4h

ANALYSE NUMÉRIQUE DES EDP

Approximation numérique des éléments propres d'opérateurs elliptiques

Partie I- Eléments de base de la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints à résolvante compacte :

On se donne deux espaces de Hilbert V et H munis de leurs produits scalaires respectifs $(\cdot,\cdot)_V$ et $(\cdot,\cdot)_H$. On suppose que $V \subset H$, que V est dense dans H et que l'injection canonique de V dans H est compacte (i.e. de toute suite bornée dans V, on peut extraire une sous-suite convergente dans H). Dans toute la suite, on notera $C_1 > 0$ la plus petite constante telle que

$$\forall v \in V, \ \ \|v\|_H \leq C_1 \|v\|_V.$$

Soit $a : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ une forme bilinéaire **symétrique** continue et α-coercive sur V.

1. Pour tout $u \in V$, on note $Au \in V'$, la forme linéaire continue définie par

   $$\langle Au, v\rangle_{V',V} = a(u,v), \ \ \forall v \in V.$$

   Démontrer que l'application $u \in V \mapsto Au \in V'$ est linéaire, continue et bijective et vérifie

   $$\alpha\|u\|_V \leq \|Au\|_{V'} \leq \|a\|\|u\|_V.$$

2. Pour tout $w \in H$, montrer que l'application $v \in V \mapsto (w,v)_H$ est linéaire continue sur V. On la note $\Phi(w)$ de sorte qu'on a

   $$\forall v \in V, \ \ \langle \Phi(w), v\rangle_{V',V} = (w,v)_H.$$

   Montrer que $\|\Phi(w)\|_{V'} \leq C_1\|w\|_H$ et que $\Phi : H \mapsto V'$ est une application injective.

3. On définit maintenant l'application $B : H \mapsto V$ par $B = A^{-1}\Phi$.
   (a) Montrer que B est linéaire continue de H dans V.
   (b) Montrer que B est compacte de H dans H.
   (c) Montrer que

   $$(Bu,v)_H = a(A^{-1}\Phi(u), A^{-1}\Phi(v)) = (Bv,u)_H, \ \ \forall u,v \in H,$$
   $$(Bu,u)_H > 0, \ \ \forall u \in H, u \neq 0.$$

   On **admet** que pour un tel opérateur (auto-adjoint, défini positif et compact), il existe une suite (finie si dim $H < +\infty$) décroissante de nombres strictement positifs $(\mu_k)_{k\geq 1}$ et une suite $(\psi_k)_{k\geq 1}$ d'éléments de H tels que

   $$\begin{cases} B\psi_k = \mu_k\psi_k, \ \ \forall k \geq 1, \\ \text{si dim } V = +\infty \text{ alors } \lim_{k\to\infty}\mu_k = 0, \\ \text{la famille } (\psi_k)_k \text{ est une base Hilbertienne de } H. \end{cases}$$

   Tout élément $u \in H$ s'écrit donc sous la forme

   $$u = \sum_{k\geq 1}(u,\psi_k)_H\psi_k, \qquad (1)$$

   la série étant convergente dans H et nous avons de plus $\|u\|_H^2 = \sum_{k\geq 1}|(u,\psi_k)_H|^2$.

   Enfin, chaque valeur propre est de multiplicité finie (i.e. la suite $(\mu_k)_k$ ne prend qu'un nombre fini de fois chacune de ses valeurs).

4. Démontrer que, pour l'opérateur construit précédemment on a la propriété supplémentaire suivante

$$\forall k \geq 1, \;\; \psi_k \in V,$$

et que si on pose $\lambda_k = \frac{1}{\mu_k}$, on a

$$A\psi_k = \lambda_k \Phi(\psi_k),$$

c'est-à-dire, en d'autres termes,

$$a(\psi_k, v) = \lambda_k (\psi_k, v)_H, \;\; \forall v \in V.$$

En déduire que $(\psi_k/\sqrt{\lambda_k})_k$ est une famille orthonormale dans $\big(V, a(\cdot,\cdot)\big)$.

5. Montrer que $\mathrm{Vect}(\psi_k, k = 1, \ldots)$ est dense dans V et donc que $(\psi_k/\sqrt{\lambda_k})_k$ est une base Hilbertienne de $\big(V, a(\cdot,\cdot)\big)$.

6. En déduire qu'un élément $u \in H$ écrit sous la forme (1) est dans V si et seulement si on a

$$\sum_{k\geq 1} \lambda_k (u, \psi_k)_H^2 < +\infty,$$

et que dans ce cas, la série dans la formule (1) converge dans V.

7. En déduire que

$$\forall u, v \in V, \;\; a(u, v) = \sum_{k\geq 1} \lambda_k (u, \psi_k)_H (v, \psi_k)_H.$$

8. Montrer que pour tout $u \in H$, on a

$$A^{-1}\Phi(u) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_k} (u, \psi_k)_H \psi_k,$$

la série étant convergente dans V.
Indication : On pourra appliquer $a(\cdot, \psi_i)$ aux deux membres de l'égalité pour un $i \geq 1$ quelconque.

9. **Exemple :** Montrer que le cadre général ci-dessus s'applique dans le cas suivant
   - Ω est un ouvert polygonal borné et convexe de $\mathbb{R}^d$.
   - $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$.
   - Pour tous $u, v \in V$, $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$.

   Quelle équation aux dérivées partielles est vérifiée par ψ_k ?

Partie II- Quotient de Rayleigh. Théorème de Courant-Fisher :

Dans toute la suite, pour tout élément $u \in V$ non nul, on note

$$R(u) = \frac{a(u, u)}{(u, u)_H} = \frac{a(u, u)}{\|u\|_H^2},$$

et on rappelle que la suite des valeurs propres $(\lambda_k)_k$ obtenue dans la partie précédente est croissante

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \ldots$$

et qu'elle tend vers l'infini si V est de dimension infinie.
Enfin, pour tout sous-espace E de H, on note $E^\perp$ l'orthogonal de E dans H défini par

$$E^\perp = \big\{u \in H, \text{ tel que } (u, v)_H = 0, \; \forall v \in E\big\}.$$

1. Calculer $R(\psi_k)$ pour tout $k \geq 1$.
2. Exprimer $R(u)$ pour tout $u \in V$, $u \neq 0$ en fonction des coordonnées $(u, \psi_k)_H$ de u dans la base $(\psi_k)_k$.
3. Montrer que pour tout $u \in V$, $u \neq 0$, on a

$$\lambda_1 \leq R(u),$$

En déduire que

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{v\in V \\ v\neq 0}} R(v). \tag{2}$$

4. On suppose que $\dim H < +\infty$ (on a alors nécessairement $V = H$ par densité), on note $N = \dim H$. Montrer que $\lambda_N \geq R(u)$ pour tout $u \in V$, $u \neq 0$ puis en déduire que
$$\lambda_N = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} R(v).$$

5. On revient au cas où la dimension de H est quelconque. Pour tout $k \geq 2$, on note
$$E_k = \text{Vect}(\psi_1, \ldots, \psi_k),$$
et
$$F_k = \text{Vect}(\psi_k, \psi_{k+1}, \ldots).$$
En utilisant la question précédente, montrer que
$$\lambda_k = \sup_{\substack{v \in E_k \\ v \neq 0}} R(v).$$

6. Soit W_k un sous-espace quelconque de V de dimension égale à k.
   (a) Montrer que
   $$F_k^{\perp} = E_{k-1}.$$
   Justifier que l'on peut définir un opérateur linéaire de projection orthogonale (dans H) sur E_{k-1}, qu'on note $\Pi_{E_{k-1}}$.
   (b) Montrer que
   $$W_k \cap \overline{F_k} = \{0\} \Longleftrightarrow \Pi_{E_{k-1}} \text{ est injectif sur } W_k.$$
   En déduire que $W_k \cap \overline{F_k} \neq \{0\}$.
   (c) Soit donc $u \in W_k \cap \overline{F_k}$, $u \neq 0$. Montrer que $u \in V$ et qu'on a
   $$\lambda_k \leq R(u),$$
   en déduire que
   $$\lambda_k \leq \sup_{\substack{v \in W_k \\ v \neq 0}} R(v).$$

7. Montrer finalement la première formule de Courant-Fischer
$$\forall k \geq 1, \;\; \lambda_k = \inf_{\substack{W_k \subset V \\ \dim W_k = k}} \left(\sup_{\substack{v \in W_k \\ v \neq 0}} R(v) \right). \tag{3}$$
On remarquera que l'$\inf$ et le $\sup$ sont en réalité des minimum et maximum atteints respectivement pour $W_k = E_k$ et $v = \psi_k$.

Partie III- Approximation par la méthode de Galerkin - convergence des valeurs propres :

On se donne une famille V_h de sous-espaces de V de dimension finie notée N_h. On suppose que l'on a la propriété d'approximation suivante
$$\forall u \in V, \;\; d_V(u, V_h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0,$$
où on a défini la distance de u à V_h dans V par
$$d_V(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V.$$

On peut appliquer toute l'analyse des deux premières parties avec le couple d'espaces $(V_h, (\cdot, \cdot)_V)$ et $(V_h, (\cdot, \cdot)_H)$ (algébriquement identiques mais avec des structures hilbertiennes différentes). Les différentes hypothèses que nous avons faites sont automatiquement vérifiées dans ce nouveau contexte et on peut donc en déduire l'existence, pour tout $h > 0$, de valeurs propres notées
$$0 < \lambda_{1,h} \leq \ldots \leq \lambda_{N_h,h},$$

et d'une base hilbertienne de $(V_h, (\cdot,\cdot)_H)$ (même euclidienne car on est en dimension finie) formée de vecteurs propres associés notées $\psi_{k,h} \in V_h$.
On a donc les propriétés suivantes

$$\forall h > 0,\ \ \forall k, l \in \{1, \dots, N_h\},\ \ (\psi_{k,h}, \psi_{l,h})_H = \delta_{kl},$$

$$\forall h > 0,\ \ \forall k \in \{1, \dots, N_h\},\ \ a(\psi_{k,h}, v_h) = \lambda_{k,h}(\psi_{k,h}, v_h)_H,\ \ \forall v_h \in V_h.$$

L'objectif de la suite du problème est l'étude de la convergence quand h tend vers 0 des $\lambda_{k,h}$ et $\psi_{k,h}$ vers λ_k et ψ_k respectivement.

1. Montrer, en utilisant (3), que

$$\forall h > 0, \forall k \in \{1, \dots, N_h\},\ \ \lambda_k \le \lambda_{k,h}.$$

2. *Le projecteur elliptique sur V_h :*
   (a) Montrer que pour tout $u \in V$, il existe un unique $\mathcal{P}_h u \in V_h$ vérifiant

   $$a(\mathcal{P}_h u, v_h) = a(u, v_h),\ \ \forall v_h \in V_h.$$

   (b) Démontrer que l'on a

   $$\|u - \mathcal{P}_h u\|_V \le \frac{\|a\|}{\alpha} d_V(u, V_h).$$

   (c) Si E est un sous-espace de V, on définit

   $$\varepsilon_h(E) = \sup_{\substack{v \in E \\ \|v\|_H = 1}} d_V(v, V_h).$$

   Montrer que si dim $E < +\infty$, alors $\varepsilon_h(E) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$.

3. On fixe dans toute la suite un entier $k \ge 1$ et on ne considère que des valeurs de $h > 0$ telles que $N_h \ge k$ (ce qui est possible car on a clairement $N_h \to \infty$).
   Montrer que pour tout $u \in E_k$, on a

   $$\|u - \mathcal{P}_h u\|_V \le \frac{\|a\|}{\alpha} \varepsilon_h(E_k) \|u\|_H.$$

4. Montrer que pour tout $u \in V$ et tout $i \ge 1$, on a

   $$(\psi_i, u - \mathcal{P}_h u)_H = \frac{1}{\lambda_i} a(\psi_i - \mathcal{P}_h \psi_i, u - \mathcal{P}_h u),$$

   puis en déduire que si $u \in E_k$, on a

   $$(u, u - \mathcal{P}_h u)_H = \sum_{i=1}^{k} \frac{(u, \psi_i)_H}{\lambda_i} a(\psi_i - \mathcal{P}_h \psi_i, u - \mathcal{P}_h u) = a\left((\mathrm{Id} - \mathcal{P}_h) A^{-1} \Phi(u), (\mathrm{Id} - \mathcal{P}_h) u\right).$$

5. Etablir que pour tout $u \in E_k$, on a

   $$|(u, u - \mathcal{P}_h u)_H| \le \frac{\|a\|^3}{\alpha^2 \lambda_1} (\varepsilon_h(E_k))^2 \|u\|_H^2.$$

6. Pour tout $h > 0$, on note

   $$\sigma_{h,k} = \sup_{\substack{u \in E_k \\ \|u\|_H = 1}} \Big| 2(u, u - \mathcal{P}_h u)_H - (u - \mathcal{P}_h u, u - \mathcal{P}_h u)_H \Big|.$$

   (a) Montrer en utilisant les questions précédentes que

   $$\forall h > 0,\ \ \sigma_{h,k} \le \left(\frac{2\|a\|^3}{\alpha^2 \lambda_1} + \frac{\|a\|^2 C_1^2}{\alpha^2} \right) (\varepsilon_h(E_k))^2.$$

(b) En déduire qu'il existe $h_0 > 0$ (dépendant de k, a, V, H) tel que pour tout

$$\forall h < h_0, \ \ \sigma_{h,k} \leq \frac{1}{2}. \tag{4}$$

7. On suppose dorénavant que $h < h_0$.
   (a) On veut montrer que $\mathcal{P}_h$ est injectif sur E_k. Pour cela, montrer que s'il existe $u \in E_k \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{P}_h u = 0$, alors on a $\sigma_{h,k} \geq 1$ et conclure.
   (b) En déduire que
   $$\lambda_{k,h} \leq \sup_{\substack{v \in E_k \\ v \neq 0}} R(\mathcal{P}_h v).$$
   (c) Montrer que pour tout $v \in V$, on a $a(\mathcal{P}_h v, \mathcal{P}_h v) \leq a(v, v)$.
   (d) Montrer que pour tout $v \in E_k$ on a
   $$(\mathcal{P}_h v, \mathcal{P}_h v)_H \geq (1 - \sigma_{h,k})(v, v)_H.$$
   (e) Montrer enfin que
   $$\lambda_{k,h} \leq \frac{\lambda_k}{1 - \sigma_{h,k}},$$
   puis qu'il existe donc $C > 0$ (indépendante de h et de k) telle que
   $$\forall h < h_0, \ \ \lambda_k \leq \lambda_{k,h} \leq \lambda_k \left(1 + C\left(\varepsilon_h(E_k)\right)^2\right).$$
   En déduire la convergence de $\lambda_{k,h}$ vers λ_k quand h tend vers 0.
8. **Exemple :** On reprend l'exemple de la question 9 de la partie I. On rappelle que sous ces hypothèses, l'opérateur $-\Delta$ jouit des propriétés de régularité elliptique évoquées en cours.
   On suppose de plus que V_h est le sous-espace de $H^1_0(\Omega)$ constitué de fonctions $\mathbb{P}^1$ par morceaux sur un maillage simplicial géométriquement conforme du domaine Ω dont le pas est noté $h > 0$.
   (a) Montrer que $E_k \subset H^2(\Omega)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de $h > 0$ et de k telle que
   $$\forall u \in E_k, \ \ \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\lambda_k |u|_{L^2(\Omega)}.$$
   (b) En déduire qu'il existe $C' > 0$ indépendant de h et k telle que
   $$\varepsilon_h(E_k) \leq C'\lambda_k h.$$
   (c) En déduire l'estimation d'erreur suivante [1]
   $$\forall h < h_0, \ \ |\lambda_k - \lambda_{k,h}| \leq C'\lambda_k^3 h^2.$$
   (d) On note $(\varphi_{h,i})_{1 \leq i \leq N_h}$ la base de V_h constituée des fonctions de forme associées à chacun des degrés de liberté de la discrétisation.
   Montrer que les $(\lambda_{k,h})_k$ sont exactement les valeurs propres d'une certaine matrice C_h qu'on exprimera explicitement à l'aide de la matrice de rigidité A_h et de la matrice de masse M_h associées au problème étudié. (On rappellera les définitions de ces deux matrices).
   Comment déterminer les $\psi_{k,h}$ en fonction des éléments propres de cette matrice ?

Partie IV- Convergence des fonctions propres - Cas d'une valeur propre simple :

On reprend les mêmes notations que dans la partie précédente dont on pourra bien entendu utiliser les résultats. On fixe $k \geq 1$ et on souhaite maintenant montrer que $(\psi_{k,h})_h$ converge vers ψ_k quand h tend vers 0.
On supposera dans cette partie que λ_k est une valeur propre simple de l'opérateur étudié, c'est-à-dire que $\lambda_k \neq \lambda_j$ pour tout $j \neq k$. Le cas d'une valeur propre multiple est traité dans la dernière partie.
Les vecteurs propres $\psi_{k,h}$ étant définis au signe près, on supposera (quitte à changer $\psi_{k,h}$ en $-\psi_{k,h}$) que l'on a

$$(\mathcal{P}_h \psi_k, \psi_{k,h})_H \geq 0. \tag{5}$$

1. La puissance de λ_k dans cette estimation n'est pas optimale en général.

1. Montrer qu'il existe $\rho_k > 0$ et $h_0 > 0$ (dépendant de k) tels que
$$\forall j \neq k, \quad \frac{\lambda_k}{|\lambda_k - \lambda_{j,h}|} \leq \rho_k.$$
2. En utilisant la formule $a(\psi_k - \mathcal{P}_h\psi_k, \psi_{j,h}) = 0$ (on justifiera cette formule), montrer que
$$(\mathcal{P}_h\psi_k, \psi_{j,h})_H = \frac{\lambda_k}{\lambda_{j,h} - \lambda_k}(\psi_k - \mathcal{P}_h\psi_k, \psi_{j,h})_H.$$
3. On définit maintenant
$$\beta_h = (\mathcal{P}_h\psi_k, \psi_{k,h})_H.$$
Montrer que
$$\|\mathcal{P}_h\psi_k - \beta_h\psi_{k,h}\|_H^2 = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N_h} \frac{\lambda_k^2}{(\lambda_{j,h} - \lambda_k)^2}|(\psi_k - \mathcal{P}_h\psi_k, \psi_{j,h})_H|^2.$$
4. En déduire que, pour $h < h_0$, on a
$$\|\mathcal{P}_h\psi_k - \beta_h\psi_{k,h}\|_H^2 \leq \rho_k^2 \sum_{j=1}^{N_h} |(\psi_k - \mathcal{P}_h\psi_k, \psi_{j,h})_H|^2 \leq \rho_k^2\|\psi_k - \mathcal{P}_h\psi_k\|_H^2,$$
et donc que
$$\|\psi_k - \beta_h\psi_{k,h}\|_H \leq (1 + \rho_k)C_1\varepsilon_h(E_k).$$
5. En utilisant (5), montrer que
$$\|\psi_{k,h} - \beta_h\psi_{k,h}\|_H \leq \|\psi_k - \beta_h\psi_{k,h}\|_H,$$
puis aboutir à la conclusion que
$$\|\psi_k - \psi_{k,h}\|_H \leq 2(1 + \rho_k)C_1\varepsilon_h(E_k),$$
et donc que $\psi_{k,h}$ converge vers ψ_k dans H quand $h \to 0$.
6. On veut maintenant obtenir une estimation d'erreur en norme V. Pour cela, montrer que
$$a(\psi_k - \psi_{k,h}, \psi_k - \psi_{k,h}) = \lambda_k\|\psi_k - \psi_{k,h}\|_H^2 + \lambda_{k,h} - \lambda_k,$$
et en déduire l'existence de $C > 0$ telle que
$$\|\psi_k - \psi_{k,h}\|_V \leq C\sqrt{\lambda_k}(1 + \rho_k)\varepsilon_h(E_k).$$
En déduire la convergence de $\psi_{k,h}$ vers ψ_k dans V dans le cas général.
7. **Exemple :** On revient à nouveau à l'exemple traité dans la question 9 de la partie I et la question 8 de la partie III.
   (a) Montrer que les estimations obtenues s'écrivent alors pour $h > 0$ assez petit :
   $$\|\psi_k - \psi_{k,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + \rho_k)\lambda_k h,$$
   $$\|\psi_k - \psi_{k,h}\|_{H^1(\Omega)} \leq C(1 + \rho_k)\lambda_k^{\frac{3}{2}} h.$$
   (b) Pourquoi l'estimation en norme H^1 est satisfaisante mais pas l'estimation en norme L^2 ?
   (c) En reprenant les questions 4 et 5 dans ce cas particulier, montrer que l'estimation en norme L^2 peut être améliorée de la façon suivante
   $$\|\psi_k - \psi_{k,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq C(1 + \rho_k)\lambda_k^2 h^2.$$

Partie V- Convergence des fonctions propres - Cas d'une valeur propre multiple :

On suppose maintenant que λ_k est une valeur propre multiple de multiplicité $m \geq 2$, c'est-à-dire que l'on a
$$\lambda_{k-1} < \lambda_k = \ldots = \lambda_{k+m-1} < \lambda_{k+m}.$$

1. Expliquer pourquoi la convergence $\psi_{k,h} \xrightarrow[h\to 0]{} \psi_k$ est certainement fausse en général. On va néanmoins montrer la convergence des fonctions propres en un sens adéquat.
2. Montrer qu'il existe $\rho_k > 0$ et $h_0 > 0$ tels que

$$\forall j \notin \{k, \dots, k+m-1\}, \;\; \frac{\lambda_k}{|\lambda_k - \lambda_{j,h}|} \leq \rho_k.$$

3. Dans toute la suite on fixe $l \in \{0, \dots, m-1\}$. On note alors

$$\forall p \in \{0, \dots, m-1\}, \;\; \beta_h^{l,p} = (\mathcal{P}_h \psi_{k+l}, \psi_{k+p,h})_H,$$

puis

$$\widetilde{\psi}_{k+l,h} = \sum_{p=0}^{m-1} \beta_h^{l,p} \psi_{k+p,h}.$$

On va montrer maintenant, en s'inspirant de la partie précédente, que $\widetilde{\psi}_{k+l,h}$ converge vers ψ_{k+l}.

(a) Montrer que

$$\|\mathcal{P}_h \psi_{k+l} - \widetilde{\psi}_{k+l,h}\|_H^2 \leq \rho_h^2 \|\psi_{k+l} - \mathcal{P}_h \psi_{k+l}\|_H^2,$$

puis en déduire l'estimation en norme H

$$\|\psi_{k+l} - \widetilde{\psi}_{k+l,h}\|_H \leq C_1 (1+\rho_k) \varepsilon_h(E_{k+m-1}).$$

(b) Montrer que l'on a

$$\forall p \in \{0, \dots, m-1\}, \;\; |\beta_h^{l,p}| \leq 1.$$

(c) Montrer que

$$a(\psi_{k+l} - \widetilde{\psi}_{k+l,h}, \psi_{k+l} - \widetilde{\psi}_{k+l,h}) = \lambda_k \|\psi_{k+l} - \widetilde{\psi}_{k+l,h}\|_H^2 - \sum_{p=0}^{m-1} \left(\beta_h^{l,p}\right)^2 (\lambda_k - \lambda_{k+p,h}).$$

En déduire qu'il existe $C > 0$ indépendant de $h > 0$ telle que

$$\|\psi_{k+l} - \widetilde{\psi}_{k+l,h}\|_V \leq C \sqrt{\lambda_k} (1+\rho_k) \varepsilon_h(E_{k+m-1}).$$

FIN DU PROBLÈME
