MASTER Mathématiques 2ème année, 2009-2010, Marseille.
Spécialité EDP et Calcul Scientifique.
Notes de cours autorisées - Durée : 4h

ANALYSE NUMÉRIQUE DES EDP

Approximation numérique complète d'un problème parabolique

Soit $T > 0$, Ω un ouvert borné, polygonal, convexe de $\mathbb{R}^2$.
On se donne une fonction $k \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ (en particulier bornée !) et telle que $\inf_\Omega k > 0$, une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty([0,T] \times \overline{\Omega})$ et une fonction $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. On notera $k_{\min} = \inf_\Omega k$ et $k_{\max} = \sup_\Omega k$.
On **admet** qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^\infty([0,T] \times \overline{\Omega})$ au problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u - \text{div}\,(k(x)\nabla u) = f(t,x), \quad \text{pour tout } (t,x) \in [0,T] \times \Omega, \\ u(t,x) = 0, \quad \text{pour tout } (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \text{pour tout } x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Le but de ce problème est l'étude complète d'une méthode numérique de type Euler implicite en temps / éléments finis en espace pour résoudre ce problème.

Notations :

- On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des éléments de $H^1(\Omega)$ dont la trace est nulle au bord. Dans ce problème, on notera $C_P > 0$ la constante dans l'inégalité de Poincaré suivante
$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \ \ \|v\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla v\|_{L^2}.$$
- Dans tout le problème si $(t,x) \mapsto v(t,x)$ est une fonction qui dépend de t et de x, alors pour tout $t \in [0,T]$, $v(t)$ désignera la fonction $v(t,\cdot)$ qui ne dépend donc plus que de la variable x.
- Pour toute fonction $(t,x) \in [0,T] \times \overline{\Omega} \mapsto v(t,x) \in \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$, on note
$$\|v\|_{\mathcal{C}^k} = \max_{\substack{(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2)\in\mathbb{N}^3 \\ \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \leq k}} \left(\|\partial_t^{\alpha_0} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} v\|_{L^\infty(]0,T[\times\Omega)} \right).$$

Partie I- Semi-discrétisation en temps :

On commence par discrétiser le problème par rapport à la variable de temps. Pour cela, on se donne un pas de temps $\Delta t = \frac{T}{M}$ où M est un entier positif. On note $t^n = n\Delta t$ pour $0 \leq n \leq M$ les différents instants de la discrétisation.
On fixe $u^0 = u_0$ et on considère alors le système d'équations suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - \text{div}\,(k(x)\nabla u^{n+1}) = f(t^{n+1}) = f(t^{n+1},\cdot), \quad \text{dans } \Omega, \\ u^{n+1} = 0. \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

On propose la formulation variationnelle suivante de ce problème

$$\text{Trouver } u^{n+1} \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que } c(u^{n+1},v) + \Delta t\, a(u^{n+1},v) = c(u^n + \Delta t f(t^{n+1}),v), \ \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{3}$$

où on a posé

$$\forall u, v \in H^1_0(\Omega), \;\; a(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega k(x)\nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$\forall u, v \in L^2(\Omega), \;\; c(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega uv \, dx.$$

1. Montrer que si $u^n \in H^1_0(\Omega)$ est connu, alors le problème (3) admet une unique solution u^{n+1}. En déduire que l'on définit ainsi de façon unique une suite $(u^n)_{0\leq n\leq M}$ d'éléments de $H^1_0(\Omega)$.
2. Montrer que la fonction u^{n+1} ainsi construite vérifie le problème elliptique (2) au sens des distributions, ainsi que la condition aux limites en un sens que l'on précisera.
3. Pour tout $0 \leq n \leq M-1$, on définit l'erreur de consistance

$$R^{n+1}(x) = \frac{u(t^{n+1},x) - u(t^n,x)}{\Delta t} - \partial_t u(t^{n+1},x)$$

   qui est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne dépend que de la variable x. Démontrer que

$$\|R^{n+1}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Delta t \|u\|_{\mathcal{C}^2},$$

$$\|R^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \Delta t \sqrt{|\Omega|}\, \|u\|_{\mathcal{C}^2},$$

$$\|\nabla R^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\|\partial_{x_1} R^{n+1}\|^2_{L^2} + \|\partial_{x_2} R^{n+1}\|^2_{L^2}} \leq \Delta t \sqrt{2|\Omega|}\, \|u\|_{\mathcal{C}^3}.$$

4. Pour tout $0 \leq n \leq M$, on définit l'erreur d'approximation au temps t^n par $e^n = u(t^n) - u^n$. Montrer que l'on a

$$\forall 0 \leq n \leq M-1, \; \forall v \in H^1_0(\Omega), \;\; c(e^{n+1}, v) + \Delta t \, a(e^{n+1}, v) = c(e^n + \Delta t R^{n+1}, v).$$

5. En déduire que

$$\forall 0 \leq n \leq M-1, \;\; \|e^{n+1}\|^2_{L^2} + k_{\min}\Delta t \|\nabla e^{n+1}\|^2_{L^2} \leq \|e^n\|_{L^2}\|e^{n+1}\|_{L^2} + \Delta t C_P \|R^{n+1}\|_{L^2}\|\nabla e^{n+1}\|_{L^2},$$

   et enfin que

$$\forall 0 \leq n \leq M-1, \;\; \frac{1}{2}\|e^{n+1}\|^2_{L^2} + \frac{k_{\min}}{2}\Delta t \|\nabla e^{n+1}\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{2}\|e^n\|^2_{L^2} + \Delta t \frac{C_P^2}{2k_{\min}}\|R^{n+1}\|^2_{L^2}.$$

   On pourra utiliser l'inégalité de Young : $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \;\; ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$.
6. Conclure que

$$\sup_{0\leq n\leq M} \|e^n\|_{L^2} \leq \Delta t \; C_P \sqrt{\frac{|\Omega| T}{k_{\min}}}\|u\|_{\mathcal{C}^2}.$$

   Le schéma proposé est donc d'ordre 1 en temps.

Partie II- Discrétisation complète en temps et espace - cadre abstrait :

D'un point de vue pratique, il nous faut maintenant résoudre le problème elliptique (3) à chaque pas de temps. On se propose pour cela d'utiliser une méthode de Galerkin.
On se donne une famille $(V_h)_h$ de sous-espaces de dimension finie de $H^1_0(\Omega)$ et on considère pour tout n le problème suivant

$$\text{Trouver } u_h^{n+1} \in V_h \text{ tel que } c(u_h^{n+1}, v) + \Delta t \, a(u_h^{n+1}, v_h) = c(u_h^n + \Delta t f(t^{n+1}), v_h), \;\; \forall v_h \in V_h, \qquad (4)$$

Pour chaque $h > 0$, on se donne un $u_h^0 \in V_h$ (qui est censé approcher u_0).

1. Si $u_h^0 \in V_h$ est donné, démontrer qu'il existe une unique suite $(u_h^n)_n$ d'éléments de V_h qui vérifie les équations (4).
2. Pour toute fonction $w \in H_0^1(\Omega)$, montrer qu'il existe un unique élément de V_h noté $\mathcal{P}_h w$ qui vérifie

$$\forall v_h \in V_h, \;\; a(\mathcal{P}_h w, v_h) = a(w, v_h), \;\; \forall v_h \in V_h.$$

Montrer qu'on a l'estimation

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \;\; \|\nabla \mathcal{P}_h w\|_{L^2} \leq \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \|\nabla w\|_{L^2}.$$

L'opérateur $\mathcal{P}_h : H_0^1(\Omega) \mapsto V_h$ ainsi contruit est appelé *projecteur elliptique sur V_h par rapport à a.*

Dans la suite, on suppose que $\mathcal{P}_h$ vérifie la propriété : il existe $M_1 > 0$, indépendant de h, tel que

$$\forall w \in H_0^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}), \;\; \begin{cases} \|\mathcal{P}_h w - w\|_{L^2} \leq M_1 h^2 \|w\|_{\mathcal{C}^2} \\ |\mathcal{P}_h w - w|_{H^1} \leq M_1 h \|w\|_{\mathcal{C}^2}. \end{cases} \tag{5}$$

Pour tout n et h, on définit $e_h^n = u(t^n) - u_h^n$ l'erreur totale entre la solution exacte et la solution approchée au temps t^n. On écrit cette erreur sous la forme

$$e_h^n = \underbrace{(u(t^n) - \mathcal{P}_h u(t^n))}_{=\bar{e}_h^n} + \underbrace{(\mathcal{P}_h u(t^n) - u_h^n)}_{=\widetilde{e}_h^n},$$

et on va étudier séparément ces deux termes.
3. Pour tout $n \geq 0$, on pose $S^n = \mathcal{P}_h(\partial_t u(t^n)) - \partial_t u(t^n)$. Montrer qu'il existe $M_2 > 0$ indépendant de u, de h et de Δt tel que

$$\forall n \in \{0, \ldots, M\}, \;\; \|S^n\|_{L^2} \leq M_2 h^2 \|u\|_{\mathcal{C}^3}.$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \{0, \ldots, M-1\}$, on a

$$c(\widetilde{e}_h^{n+1}, v_h) + \Delta t \, a(\widetilde{e}_h^{n+1}, v_h) = c(\widetilde{e}_h^n, v_h) + \Delta t \, c(\mathcal{P}_h R^{n+1}, v_h) + \Delta t \, c(S^{n+1}, v_h).$$

5. En déduire, toujours pour $n \in \{0, \ldots, M-1\}$, l'inégalité

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{e}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \Delta t k_{\min} \|\nabla \widetilde{e}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|\widetilde{e}_h^n\|_{L^2}^2 + \Delta t C_P^2 \frac{k_{\max}}{k_{\min}} \|\nabla R^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla \widetilde{e}_h^{n+1}\|_{L^2} + \Delta t C_P \|S^{n+1}\|_{L^2} \|\nabla \widetilde{e}_h^{n+1}\|_{L^2}.$$

6. Montrer ensuite que

$$\frac{1}{2}\|\widetilde{e}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\Delta t k_{\min} \|\nabla \widetilde{e}_h^{n+1}\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}\|\widetilde{e}_h^n\|_{L^2}^2 + \Delta t C_P^4 \frac{k_{\max}^2}{k_{\min}^3} \|\nabla R^{n+1}\|_{L^2}^2 + \Delta t C_P^2 \frac{1}{k_{\min}} \|S^{n+1}\|_{L^2}^2.$$

7. Conclure enfin que

$$\sup_{n \leq M} \|\widetilde{e}_h^n\|_{L^2}^2 \leq \|\widetilde{e}_h^0\|_{L^2}^2 + 2T C_P^4 \frac{k_{\max}^2}{k_{\min}^3} \Delta t^2 |\Omega| \|u\|_{\mathcal{C}^3}^2 + 2T C_P^2 \frac{M_2^2}{k_{\min}} h^4 \|u\|_{\mathcal{C}^3}^2.$$

8. Montrer maintenant que

$$\sup_{n \leq M} \|\bar{e}_h^n\|_{L^2}^2 \leq M_1^2 h^4 \|u\|_{\mathcal{C}^2}^2.$$

9. Conclure qu'il existe une constante $M_3 > 0$ indépendante de Δt et h telle que

$$\sup_{n \leq M} \|e_h^n\|_{L^2} \leq M_3(\Delta t + h^2 + \|\widetilde{e}_h^0\|_{L^2}).$$

   Comment construiriez-vous u_h^0 en pratique ?

   Le schéma étudié est donc d'ordre 1 en temps et d'ordre 2 en espace en norme L^2.

10. On revient dans cette dernière question à l'étude du projecteur elliptique.
    (a) Montrer, en utilisant les résultats du cours que l'on a

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad |\mathcal{P}_h w - w|_{H^1} \leq \frac{k_{\max}}{k_{\min}} d(w, V_h),$$

    où $d(w, V_h) = \inf_{w_h \in V_h} |w - w_h|_{H^1}$.

    (b) On suppose maintenant qu'il existe $C > 0$ indépendante de h, telle que $\forall w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\ d(w, V_h) \leq Ch\|w\|_{H^2}$, en déduire que la seconde inégalité de (5) est vraie.

    (c) Toujours en utilisant un résultat du cours, montrer que

$$\forall w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \quad \|\mathcal{P}_h w - w\|_{L^2} \leq C' h^2 \|w\|_{H^2}.$$

    En déduire que la première inégalité de (5) est également vraie.

Partie III- Discrétisation complète en temps et espace - approximation par éléments finis :

Dans toute la suite, on suppose ici donné un maillage simplicial géométriquement conforme de Ω noté $\mathcal{T}$. On construit l'espace $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ à partir de ce maillage et de l'élément fini de Lagrange $\mathbb{P}^1$.

1. Décrire en quelques lignes l'espace V_h. On précisera en particulier sa dimension en fonction des caractéristiques géométriques du maillage.
2. Montrer que le schéma (4) peut se mettre sous la forme suivante

$$M_h U^{n+1} + \Delta t A_h U^{n+1} = M_h U^n + \Delta t M_h F^{n+1},$$

   où U^n, U^{n+1} et F^{n+1} sont des vecteurs colonnes dont on précisera la taille et les coefficients, A_h et M_h sont des matrices que l'on précisera également.
3. Montrer que M_h et A_h sont symétriques définies positives. En déduire que $M_h + \Delta t A_h$ est une matrice inversible pour toute valeur du pas de temps $\Delta t > 0$.

Partie IV- Un lemme de Strang :

Dans cette partie, on s'intéresse à une variante de la méthode de Galerkin pour laquelle on va établir un résultat semblable au lemme de Céa. Dans la partie suivante, ce résultat sera appliqué à l'étude de l'influence des formules de quadrature dans la méthode numérique proposée dans ce problème.
On se place dans le cadre abstrait suivant : soit V un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur V (on note $\alpha > 0$ la constante de coercivité), L une forme linéaire continue sur V. On considère l'unique solution $u \in V$ du problème

$$\forall v \in V, \ \ a(u, v) = L(v). \tag{6}$$

Pour tout $h > 0$ on se donne un sous-espace de dimension finie $V_h \subset V$, une forme bilinéaire coercive a_h sur V_h.

1. Démontrer que pour tout $h > 0$, il existe une unique solution $u_h \in V_h$ du problème approché

$$\forall v_h \in V_h, \ \ a_h(u_h, v_h) = L(v_h). \tag{7}$$

2. En s'inspirant de la démonstration du lemme de Céa, montrer que

$$\forall v_h \in V_h,\ \ \|u_h - v_h\|_V \leq \frac{\|a\|}{\alpha}\|u - v_h\|_V + \frac{1}{\alpha}\sup_{w_h \in V_h}\frac{|a_h(u_h, w_h) - a(u_h, w_h)|}{\|w_h\|_V}.$$

3. En déduire qu'on a

$$\|u - u_h\|_V \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) d(u, V_h) + \frac{1}{\alpha}\sup_{w_h \in V_h}\frac{|a_h(u_h, w_h) - a(u_h, w_h)|}{\|w_h\|_V}.$$

Partie V- Méthodes de quadrature :

On revient dans cette partie au cadre étudié dans les parties II et III.
On note $\hat{K}$ le simplexe de référence associé à l'élément fini $\mathbb{P}^1$. Pour tout élément $K \in \mathcal{T}$, on note T_K une application affine qui envoie $\hat{K}$ sur K, h_K désigne le diamètre de K et $|K|$ sa mesure.
La construction des matrices M_h et A_h obtenues dans la partie III, fait intervenir le calcul d'intégrales sur chaque élément K du maillage. On se propose dans cette partie d'étudier des méthodes d'évaluation numérique de ces intégrales (le calcul exact étant en général hors de portée) et leur influence sur la précision du calcul.
Soit $N \geq 1$. On appelle **formule de quadrature d'ordre N**, sur l'élément de référence, une application linéaire continue $I_N : \mathcal{C}^0(\hat{K}) \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\forall \hat{v} \in \mathbb{P}^{N-1},\ \ \int_{\hat{K}} \hat{v}\, d\hat{x} = I_N(\hat{v}).$$

1. Déterminer l'ordre des formules de quadrature suivantes

$$I(\hat{v}) = \frac{1}{2}\hat{v}(0,0),$$

$$I(\hat{v}) = \frac{1}{2}\hat{v}(1/3, 1/3),$$

$$I(\hat{v}) = \frac{1}{6}(\hat{v}(0,0) + \hat{v}(1,0) + \hat{v}(0,1)).$$

Entre ces trois méthodes, laquelle vous semble - en pratique - la plus adaptée à l'utilisation dans le contexte de notre problème (i.e. pour évaluer les intégrales intervenant dans A_h et M_h) ?

2. On fixe dorénavant une formule de quadrature I_N. Démontrer qu'il existe $C > 0$ telle que

$$\forall \hat{v} \in H^N(\hat{K}),\ \ \left|\int_{\hat{K}} \hat{v}\, d\hat{x} - I_N(\hat{v})\right| \leq C|\hat{v}|_{H^N(\hat{K})}.$$

3. Pour tout $K \in \mathcal{T}$, et tout $v \in H^N(K)$, on pose

$$I_{N,K}(v) = 2|K| I_N(v \circ T_K).$$

Montrer que

$$\left|\int_K v\, dx - I_{N,K}(v)\right| \leq C2|K|^{\frac{1}{2}} h_K^N |v|_{H^N(K)}.$$

4. On pose maintenant

$$\forall u_h, v_h \in V_h,\ \ a_h(u_h, v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}} I_{N,K}(k\nabla u_h \cdot \nabla v_h).$$

Montrer que pour tout $u_h, v_h \in V_h$, on a

$$|a(u_h, v_h) - a_h(u_h, v_h)| \leq Ch^N \|k\|_{\mathcal{C}^N} a(u_h, v_h).$$

En déduire qu'il existe $h_0 > 0$ (qui dépend de N et de k) tel que

$$\forall h < h_0,\ \forall u_h \in V_h,\ \ a_h(u_h, u_h) \geq \frac{1}{2}k_{\min}\|\nabla u_h\|^2_{L^2}. \tag{8}$$

5. On pose également
$$\forall u_h, v_h \in V_h,\;\; c_h(u_h, v_h) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{K\in\mathcal{T}} I_{N,K}(u_h\, v_h).$$
Pour quelles valeurs de N, est-on sûr d'avoir la propriété suivante
$$\forall u_h, v_h \in V_h,\;\; c(u_h, v_h) = c_h(u_h, v_h). \tag{9}$$
6. On choisit dorénavant une valeur de N pour laquelle (9) est vraie. Par ailleurs, pour simplifier un peu, on va supposer dans la suite que $f(t, x) = 0$ pour tout (t, x).

Le schéma numérique complet pour le problème parabolique qui nous occupe devient maintenant
$$\text{Trouver } \widetilde{u}_h^{n+1} \in V_h \text{ tel que } c(\widetilde{u}_h^{n+1}, v) + \Delta t\, a_h(\widetilde{u}_h^{n+1}, v_h) = c(\widetilde{u}_h^{n}, v_h),\;\; \forall v_h \in V_h, \tag{10}$$
les seules différences (en dehors du fait que $f = 0$) étant dans le fait que l'on a remplacé la forme bilinéaire a par la forme bilinéaire a_h qui est calculée à l'aide de la formule de quadrature I_N.

On **admet** que l'analyse de l'erreur associée à ce problème peut se dérouler de la même façon que dans les parties II et III, à condition de savoir démontrer les propriétés (5) pour un nouvel opérateur de projection elliptique noté $\widetilde{\mathcal{P}_h}$ et défini par
$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \forall v_h \in V_h,\quad a_h(\widetilde{\mathcal{P}_h} w, v_h) = a(w, v_h).$$
7. (a) Démontrer que pour $h > 0$ suffisament petit, on a l'estimation
$$\forall w \in H_0^1(\Omega),\;\; \|\nabla \widetilde{\mathcal{P}_h} w\|_{L^2} \leq \frac{2k_{\max}}{k_{\min}} \|\nabla w\|_{L^2}.$$
   (b) Démontrer que
$$\forall w \in H_0^1(\Omega),\;\; |w - \widetilde{\mathcal{P}_h} w|_{H^1} \leq \left(1 + \frac{k_{\max}}{k_{\min}}\right) d(w, V_h) + 2Ch^N\, \frac{k_{\max}^2}{k_{\min}^2} \|k\|_{\mathcal{C}^N} \|\nabla w\|_{L^2}.$$
   En déduire que la seconde inégalité de (5) est encore vraie pour l'opérateur $\widetilde{\mathcal{P}_h}$.
8. Soit $w \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $\psi_{w,h} \in H_0^1(\Omega)$ tel que
$$\forall v \in H_0^1(\Omega),\;\; a(v, \psi_{w,h}) = (w - \widetilde{\mathcal{P}_h} w, v)_{L^2}.$$
   Montrer que $\psi_{w,h} \in H^2(\Omega)$ et qu'il existe $C > 0$ indépendante de w et h telle que
$$\|\psi_{w,h}\|_{H^2} \leq C \|w - \widetilde{\mathcal{P}_h} w\|_{L^2}.$$
   (b) Démontrer que
$$\|w - \widetilde{\mathcal{P}_h} w\|_{L^2}^2 = a(w - \widetilde{\mathcal{P}_h} w, \psi_{w,h} - \mathcal{P}_h \psi_{w,h}) + a_h(\widetilde{\mathcal{P}_h} w, \mathcal{P}_h \psi_{w,h}) - a(\widetilde{\mathcal{P}_h} w, \mathcal{P}_h \psi_{w,h}).$$
   (c) En déduire que
$$\|w - \widetilde{\mathcal{P}_h} w\|_{L^2}^2 \leq k_{\max} |w - \widetilde{\mathcal{P}_h} w|_{H^1} |\psi_{w,h} - \mathcal{P}_h \psi_{w,h}|_{H^1} + Ch^N \|k\|_{\mathcal{C}^N} k_{\max} |\widetilde{\mathcal{P}_h} w|_{H^1} |\mathcal{P}_h \psi_{w,h}|_{H^1}.$$
   (d) Conclure qu'il existe $C' > 0$ indépendante de w et h telle que
$$\|w - \widetilde{\mathcal{P}_h} w\|_{L^2}^2 \leq C' h^2 \|w\|_{H^2} + C' h^N \|w\|_{H^1}.$$
   Ceci prouve donc que pour $N \geq 2$ la première estimation de (5) reste vraie pour l'opérateur $\widetilde{\mathcal{P}_h}$ et donc que la méthode de quadrature I_N utilisée dans le schéma ne dégrade pas ses propriétés de convergence.

FIN DU PROBLÈME
