MASTER Mathématiques 2ème année, 2008-2009, Marseille.
Spécialité EDP et Calcul Scientifique.

Notes de cours manuscrites autorisées - Durée : 4h

ANALYSE NUMÉRIQUE DES EDP

Etude d'un problème elliptique couplé

Soit Ω un ouvert borné régulier et connexe de $\mathbb{R}^2$ dont on note n la normale unitaire sortante. On se donne une fonction $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse dans ce problème à la résolution du problème elliptique couplé suivant :

$$\begin{cases} \varphi - \Delta\mu = f, & \text{dans } \Omega, \\ -\mu - \Delta\varphi = 0, & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

pour lequel on considérera plusieurs types de conditions aux limites.

Notations :
On définit la moyenne sur Ω de toute fonction intégrable u par la formule

$$m(u) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\,dx,$$

où $|\Omega|$ désigne la mesure de Lebesgue de Ω.
On rappelle que $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des éléments de $H^1(\Omega)$ dont la trace est nulle au bord. On notera aussi $H_m^1(\Omega)$ l'ensemble des éléments de $u \in H^1(\Omega)$ dont la moyenne $m(u)$ est nulle.

Partie I- Préliminaire : une inégalité de Poincaré-moyenne :

Soit une fonction $\theta \in L^1(\Omega)$ telle que $m(\theta) = 1$.
Démontrer qu'il existe une constante $C_\theta > 0$ qui dépend de Ω et de θ telle que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2} \le C_\theta(\|\nabla u\|_{L^2} + |m(u\theta)|). \tag{2}$$

On pourra mettre en place un raisonnement par l'absurde.

Partie II- Conditions aux limites de Neumann :

On s'intéresse dans cette partie au problème (1) auquel on ajoute des conditions aux limites de Neumann suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial\mu}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3}$$

On propose la formulation variationnelle suivante du problème (1)-(3) : Trouver $(\varphi,\mu) \in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \varphi\nu\,dx + \int_\Omega \nabla\mu\cdot\nabla\nu\,dx - \int_\Omega \mu\psi\,dx + \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\,dx \\ = \int_\Omega f\nu\,dx,\ \ \forall(\psi,\nu)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega). \quad (4)$$

1. Démontrer que le problème (4) est équivalent à : Trouver $(\varphi,\mu)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \varphi\nu\,dx + \int_\Omega \nabla\mu\cdot\nabla\nu\,dx = \int_\Omega f\nu\,dx, & \forall\nu\in H^1(\Omega), \\ \displaystyle -\int_\Omega \mu\psi\,dx + \int_\Omega \nabla\varphi\cdot\nabla\psi\,dx = 0, & \forall\psi\in H^1(\Omega). \end{cases}$$

2. En choisissant convenablement les fonctions tests ψ et ν, montrer que si $(\varphi,\mu)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ est solution de (4), alors :
   (a) φ et μ vérifient les équations (1) au sens des distributions.
   (b) φ et μ vérifient les conditions aux limites (3) en un sens à préciser..
   (c) on a $m(\varphi)=m(f)$ et $m(\mu)=0$.
3. Démontrer que si $(\varphi,\mu)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ est solution de (4) pour la donnée $f=0$, alors on a $\nabla\varphi=\nabla\mu=0$. En déduire qu'alors $\varphi=0$ et $\mu=0$.
4. Démontrer que si $f\in L^2(\Omega)$ est quelconque, alors le problème (4) admet **au plus** une solution (φ,μ).
5. On veut maintenant montrer que, pour tout $f\in L^2(\Omega)$, le problème (4) admet en effet une solution.
   Pour cela, on introduit un nouveau problème variationnel : Trouver $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\mu})\in H^1_m(\Omega)\times H^1_m(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \widetilde{\varphi}\widetilde{\nu}\,dx + \int_\Omega \nabla\widetilde{\mu}\cdot\nabla\widetilde{\nu}\,dx - \int_\Omega \widetilde{\mu}\widetilde{\psi}\,dx + \int_\Omega \nabla\widetilde{\varphi}\cdot\nabla\widetilde{\psi}\,dx \\ = \int_\Omega (f-m(f))\widetilde{\nu}\,dx,\ \ \forall(\widetilde{\psi},\widetilde{\nu})\in H^1_m(\Omega)\times H^1_m(\Omega). \quad (5)$$

   (a) En utilisant un résultat du cours, démontrer que le problème (5) admet une unique solution.
   (b) Soit $(\widetilde{\varphi},\widetilde{\mu})\in H^1_m(\Omega)\times H^1_m(\Omega)$ la solution de (5) obtenue à la question précédente.
      i. Pour tout $(\psi,\nu)\in H^1(\Omega)$, vérifier que si on pose $\widetilde{\psi}=\psi-m(\psi)$ et $\widetilde{\nu}=\nu-m(\nu)$, alors on a $(\widetilde{\psi},\widetilde{\nu})\in H^1_m(\Omega)\times H^1_m(\Omega)$.
      ii. En déduire que si on pose $\varphi=\widetilde{\varphi}+m(f)$ et $\mu=\widetilde{\mu}$, alors le couple (φ,μ) est bien solution du problème initial (4).
6. Démontrer que la solution (φ,μ) obtenue ci-dessus vérifie

$$\|\varphi\|_{H^1}+\|\mu\|_{H^1}\le C\|f\|_{L^2},$$

   où $C>0$ dépend seulement de Ω.

7. Démontrer enfin, en se servant de certains résultats vus en cours, que le problème étudié satisfait une propriété de régularité elliptique, c'est-à-dire que pour tout $f \in L^2(\Omega)$ on a $\varphi \in H^2(\Omega)$, $\mu \in H^2(\Omega)$ et

$$\|\varphi\|_{H^2} + \|\mu\|_{H^2} \leq \widetilde{C}\|f\|_{L^2},$$

   où $\widetilde{C} > 0$ dépend seulement de Ω.

Partie III- Conditions aux limites Dirichlet-Neumann :

On s'intéresse dans cette partie aux mêmes équations (1) mais cette fois assorties des conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} \varphi = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial \mu}{\partial n} = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

On propose la formulation variationnelle suivante de ce nouveau problème (1)-(6) : Trouver $(\varphi, \mu) \in H^1_0(\Omega) \times H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \varphi\nu \, dx + \int_\Omega \nabla\mu \cdot \nabla\nu \, dx - \int_\Omega \mu\psi \, dx + \int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla\psi \, dx \\ = \int_\Omega f\nu \, dx, \ \ \forall(\psi, \nu) \in H^1_0(\Omega) \times H^1(\Omega). \tag{7}$$

1. Comme dans la partie précédente, on peut vérifier (on ne demande pas de le refaire !) que toute solution de (7) vérifie les équations (1) au sens des distributions et les conditions aux limites (6) en un sens convenable.

   Montrer que l'on a encore la propriété $m(\varphi) = m(f)$. Pourquoi ne peut-on plus montrer que $m(\mu) = 0$?
2. Montrer que si $(\varphi, \mu) \in H^1_0(\Omega) \times H^1(\Omega)$ est solution de (7) pour la donnée $f = 0$, alors on a $\nabla\varphi = \nabla\mu = 0$. En déduire d'abord que $\varphi = 0$, puis ensuite que $\mu = 0$.

   Conclure que, pour $f \in L^2(\Omega)$ quelconque, le problème (7) admet **au plus** une solution.
3. On va maintenant montrer qu'une telle solution existe effectivement pour toute donnée $f \in L^2(\Omega)$. Pour cela, on fixe une fois pour toute dans la suite une fonction $\theta \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que $m(\theta) = 1$ et on introduit les espaces suivants

$$H^1_{0,m}(\Omega) = \{\varphi \in H^1_0(\Omega), \ \ m(\varphi) = 0\}, \ \ \text{et} \ \ H^1_{m,\theta}(\Omega) = \{\mu \in H^1(\Omega), \ \ m(\mu\theta) = 0\}.$$

   On considère alors le nouveau problème variationnel suivant : Trouver $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\mu}) \in H^1_{0,m}(\Omega) \times H^1_{m,\theta}(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \widetilde{\varphi}\widetilde{\nu} \, dx + \int_\Omega \nabla\widetilde{\mu} \cdot \nabla\widetilde{\nu} \, dx - \int_\Omega \widetilde{\mu}\widetilde{\psi} \, dx + \int_\Omega \nabla\widetilde{\varphi} \cdot \nabla\widetilde{\psi} \, dx \\ = \int_\Omega (f - m(f)\theta)\widetilde{\nu} \, dx - \int_\Omega m(f)\nabla\theta \cdot \nabla\widetilde{\psi} \, dx, \ \ \forall(\widetilde{\psi}, \widetilde{\nu}) \in H^1_{0,m}(\Omega) \times H^1_{m,\theta}(\Omega). \tag{8}$$

   (a) Démontrer que $H^1_{0,m}(\Omega)$ et $H^1_{m,\theta}(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert et que, sur ces deux espaces, l'application $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^2}$ est une norme équivalente à la norme H^1.

(b) Démontrer que le problème (8) admet une unique solution $(\widetilde{\varphi}, \widetilde{\mu})$.

(c) Pour tout $(\psi, \nu) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$, vérifier que si on pose $\widetilde{\psi} = \psi - m(\psi)\theta$ et $\widetilde{\nu} = \nu - m(\nu\theta)$, alors on a $(\widetilde{\psi}, \widetilde{\nu}) \in H_{0,m}^1(\Omega) \times H_{m,\theta}^1(\theta)$.

(d) Démontrer enfin que si on pose $\varphi = \widetilde{\varphi} + m(f)\theta$ **puis** $\mu = \widetilde{\mu} + m(\nabla\varphi \cdot \nabla\theta)$, alors on a bien que $(\varphi, \mu) \in H_0^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et que (φ, μ) est solution du problème variationnel (7).

Partie IV- Approximation par Eléments Finis $\mathbb{P}^1$ de la solution du problème (7) **:**

On suppose dans cette partie que Ω est polygonal, qu'on dispose d'un maillage $\mathcal{T}$ de Ω, géométriquement conforme et constitué de simplexes K. On note $(a_i)_{1\leq i\leq N}$ les sommets de ce maillage. On note M le nombre de sommets du maillage situés sur le bord et on suppose que la numérotation choisie est telle que ces sommets situés sur le bord sont **exactement** les sommets a_i pour $1 \leq i \leq M$. On rappelle également que la constante de régularité $\sigma_{\mathcal{T}} \geq 1$ du maillage est définie par

$$\sigma_{\mathcal{T}} = \sup_{K\in\mathcal{T}} \frac{h_K}{\rho_K},$$

où h_K et ρ_K sont respectivement le diamètre et la rondeur d'un élément $K \in \mathcal{T}$. Enfin, $h = \max_{K\in\mathcal{T}} h_K$ désigne la taille du maillage.
On note maintenant V_h le sous-espace de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions dont la restriction sur chaque élément K du maillage $\mathcal{T}$ est $\mathbb{P}^1$. On définit également $V_{h,0} = V_h \cap H_0^1(\Omega)$. On note enfin $\mathcal{I}_h^1 : H^2(\Omega) \mapsto V_h$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange défini et étudié en cours.

On souhaite approcher numériquement la solution (φ, μ) du problème (7). Pour cela, on met en place une méthode de Galerkin basée sur les espaces V_h et $V_{h,0}$ décrits ci-dessus. Plus précisément on va chercher $(\varphi_h, \mu_h) \in V_{h,0} \cap V_h$ tel que

$$\int_\Omega \varphi_h \nu_h \, dx + \int_\Omega \nabla\mu_h \cdot \nabla\nu_h \, dx - \int_\Omega \mu_h\psi_h \, dx + \int_\Omega \nabla\varphi_h \cdot \nabla\psi_h \, dx \\ = \int_\Omega f\nu_h \, dx, \quad \forall(\psi_h, \nu_h) \in V_{h,0} \times V_h. \quad (9)$$

On **admet** que ce problème (9) admet une unique solution (cela peut se démontrer par la même méhode que dans la partie précédente).

1. Quelle est la dimension de V_h ? Décrire rapidement la base de V_h constituée des fonctions de forme $\mathbb{P}^1$ associées au maillage considéré.
2. Décrire l'espace $V_{h,0}$: on en précisera notamment la dimension et une base.
3. Démontrer que l'on a

$$\int_\Omega (\varphi - \varphi_h)\nu_h \, dx + \int_\Omega \nabla(\mu - \mu_h) \cdot \nabla\nu_h \, dx - \int_\Omega (\mu - \mu_h)\psi_h \, dx + \int_\Omega \nabla(\varphi - \varphi_h) \cdot \nabla\psi_h \, dx \\ = 0, \quad \forall(\psi_h, \nu_h) \in V_{h,0} \times V_h. \quad (10)$$

4. Vérifier que V_h contient les fonctions constantes. Déduire de (10) que l'on a $m(\varphi - \varphi_h) = 0$. En déduire qu'il existe une constante $C_1 > 0$ dépendant seulement de Ω telle que

$$\|\varphi - \varphi_h\|_{L^2} \leq C_1 \|\nabla(\varphi - \varphi_h)\|_{L^2}, \quad (11)$$

5. Soit $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $m(\theta) = 1$.
   (a) Justifier que $\mathcal{I}_h^1\theta \in V_{0,h}$ et qu'il existe une constante $C_2 > 0$ qui dépend seulement de Ω telle que
   $$\|\theta - \mathcal{I}_h^1\theta\|_{L^2} \leq C_2 h^2 \|\theta\|_{H^2}, \quad \|\nabla \mathcal{I}_h^1\theta\|_{L^2} \leq C_2(1 + \sigma_{\mathcal{T}} h)\|\theta\|_{H^2}.$$
   (b) En choisissant convenablement les fonctions tests dans (10), montrer que
   $$\left| m\Big((\mu - \mu_h)\theta\Big) \right| \leq C_2(1 + \sigma_{\mathcal{T}} h)\|\nabla(\varphi - \varphi_h)\|_{L^2}\|\theta\|_{H^2} + C_2 h^2 \|\mu - \mu_h\|_{L^2}\|\theta\|_{H^2}.$$
   (c) Montrer finalement qu'il existe $C_3 > 0$ et $h^* > 0$ ne dépendant que de Ω et de θ tels que : si $h \leq h^*$, alors on a
   $$\|\mu - \mu_h\|_{L^2} \leq C_2\sigma_{\mathcal{T}}(\|\nabla(\varphi - \varphi_h)\|_{L^2} + \|\nabla(\mu - \mu_h)\|_{L^2}). \tag{12}$$
6. En choisissant convenablement les fonctions tests dans (10), montrer que
   $$\begin{aligned} &\|\nabla(\mu - \mu_h)\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\varphi - \varphi_h)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \|\nabla(\mu - \mathcal{I}_h^1\mu)\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\varphi - \mathcal{I}_h^1\varphi)\|_{L^2}^2 + 2\|\varphi - \varphi_h\|_{L^2}\|\mu - \mathcal{I}_h^1\mu\|_{L^2} + 2\|\mu - \mu_h\|_{L^2}\|\mathcal{I}_h^1\varphi - \varphi\|_{L^2}. \end{aligned}$$
7. Démontrer maintenant qu'il existe $C_4 > 0$ ne dépendant que de Ω et de θ telle que, si $h \leq h^*$, on a
   $$\|\nabla(\mu - \mu_h)\|_{L^2}^2 + \|\nabla(\varphi - \varphi_h)\|_{L^2}^2 \leq C_4 \left(\|\mu - \mathcal{I}_h^1\mu\|_{H^1}^2 + \sigma_{\mathcal{T}}^2\|\varphi - \mathcal{I}_h^1\varphi\|_{H^1}^2\right).$$
8. Montrer que si on suppose que $(\varphi, \mu) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega)$, alors il existe une constante C_5 ne dépendant que de Ω et de θ telle que, si $h \leq h^*$, on a
   $$\|\varphi - \varphi_h\|_{H^1} + \|\mu - \mu_h\|_{H^1} \leq C_5\sigma_{\mathcal{T}}^2 h(\|\varphi\|_{H^2} + \|\mu\|_{H^2}).$$
9. Expliquer comment le problème (9) se met sous la forme d'un système linéaire carré $AU = F$ à résoudre. On précisera notamment :
   - la taille de ce système,
   - la nature des inconnues U et leur lien avec les fonctions inconnues φ_h et μ_h,
   - la structure particulière de la matrice A et les expressions de ses différents coefficients,
   - les coefficients du second membre F.