Equations différentielles ordinaires
Equations aux dérivées partielles

Partie 2 : Equations de transport

Franck Boyer
franck.boyer@math.univ-toulouse.fr
Bureau 204 - Bât. 1R3

Master 1 Mathématiques - Enseignement Supérieur et Recherche
2019/2020

Institut de Mathématiques de Toulouse

Menu de l'UE

Plan général

- Partie 1 : Equations différentielles ordinaires
- **Partie 2 : Equations de transport**
- Partie 3 : Problèmes aux limites elliptiques

Evaluation

- Un devoir à la maison
- Un partiel
- Un examen terminal

- Note de CC $= 1/3\text{DM} + 2/3\text{P}$
- Note finale $= 0.4\text{CC} + 0.6\text{CT}$

Remarque

- Contenu de base
- Contenu plus avancé

Plan de la partie 2

Plan de la partie 2

1. Modèles de transport en 1D

1. Modèles de transport en 1D

1.1. Trafic routier

Modélisation

Hypothèses

- On suppose la route rectiligne et infinie $\rightsquigarrow \mathbb{R}$.
- Une seule voie de circulation. Impossible de dépasser.
- On ne regarde pas les problèmes d'entrées et sorties.

Quantités d'intérêt

- $\rho(t,x)$ = densité de véhicules à l'instant t et au point x
  Le nb de véhicules entre les positions a et b à l'instant t est donné par
  $$\int_a^b \rho(t,x)\,dx.$$
- $v(t,x)$ = vitesse du véhicule qui passe au point x à l'instant t.

But du jeu : Etablir des équations satisfaites par ρ et v.

Trajectoire d'un véhicule particulier

On suppose connu le champ de vitesse v

Soit 🚗 un des véhicules roulant sur l'autoroute.

On note $t \mapsto X(t, \text{🚗})$ sa trajectoire le long de cette route.

Principe fondamental #1 = cinématique = définition de la vitesse

L'équation différentielle vérifiée par X est

$$\frac{d}{dt} X(t, \text{🚗}) = v(t, X(t, \text{🚗})).$$

Dans toute la suite on supposera (et on vérifiera éventuellement *a posteriori*) que v est une fonction régulière.

Loi de conservation des véhicules

Enoncé

Avec nos choix de modélisation, aucun véhicule ne peut apparaître, disparaître ou dépasser un autre véhicule.

Principe fondamental #2 = loi de conservation

Si elles sont régulières, les deux fonctions ρ (densité) et v (vitesse) sont liées par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0.$$

On va en donner deux preuves

- La preuve « des physiciens ».
- La preuve « des matheux ».

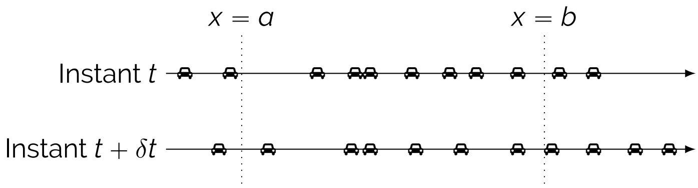
Loi de conservation des véhicules

Preuve 1

Soient $a < b$ deux points **fixés** sur l'autoroute.

Idée

Comparer le nombre de véhicules dans la portion $[a, b]$ à l'instant t et à l'instant $t + \delta t$, pour δt petit.



$$\int_a^b \rho(t + \delta t, x)\, dx - \int_a^b \rho(t, x)\, dx$$

$$= \text{véh. entrants} - \text{véh. sortants}$$

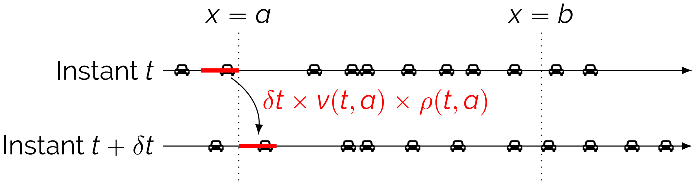
Loi de conservation des véhicules

Preuve 1

Soient $a < b$ deux points **fixés** sur l'autoroute.

Idée

Comparer le nombre de véhicules dans la portion $[a, b]$ à l'instant t et à l'instant $t + \delta t$, pour δt petit.



$$\int_a^b \rho(t + \delta t, x)\, dx - \int_a^b \rho(t, x)\, dx$$

$$= (\delta t) v(t, a) \rho(t, a) - \text{véh. sortants}$$

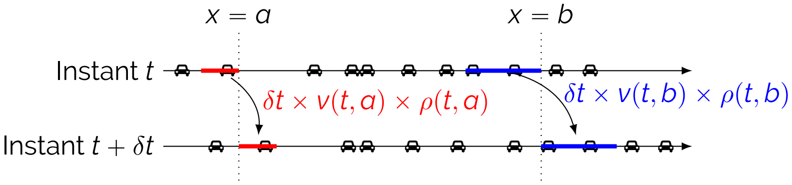
Loi de conservation des véhicules

Preuve 1

Soient $a < b$ deux points **fixés** sur l'autoroute.

Idée

Comparer le nombre de véhicules dans la portion $[a, b]$ à l'instant t et à l'instant $t + \delta t$, pour δt petit.



$$\int_a^b \rho(t + \delta t, x)\, dx - \int_a^b \rho(t, x)\, dx$$
$$= (\delta t) v(t, a) \rho(t, a) - (\delta t) v(t, b) \rho(t, b)$$

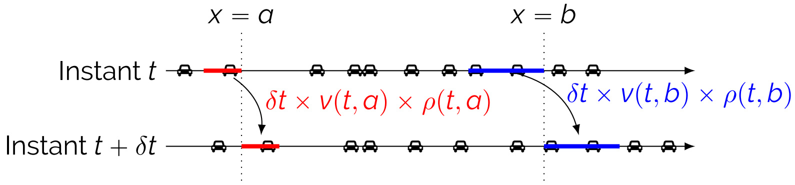
Loi de conservation des véhicules

Preuve 1

Soient $a < b$ deux points **fixés** sur l'autoroute.

Idée

Comparer le nombre de véhicules dans la portion $[a, b]$ à l'instant t et à l'instant $t + \delta t$, pour δt petit.



$$\int_a^b \frac{\rho(t + \delta t, x) - \rho(t, x)}{\delta t} \, dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} (\rho(t, x) v(t, x)) \, dx.$$

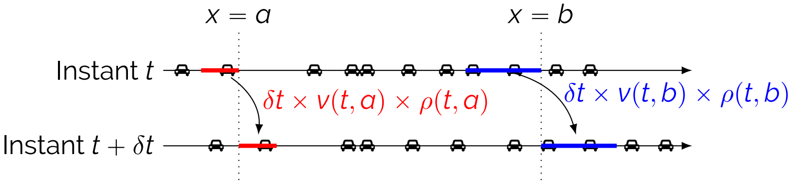
Loi de conservation des véhicules

Preuve 1

Soient $a < b$ deux points **fixés** sur l'autoroute.

Idée

Comparer le nombre de véhicules dans la portion $[a, b]$ à l'instant t et à l'instant $t + \delta t$, pour δt petit.



$$\delta t \text{ petit} \Longrightarrow \int_a^b \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} \right) (t, x) \, dx = 0.$$

Argument final : Ce qui précède est vrai pour tout t, a, b !

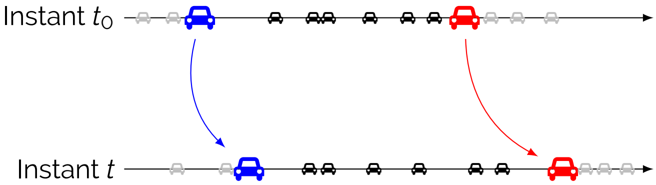
Loi de conservation des véhicules

Preuve 2

Soient  et  deux voitures qui roulent sur l'autoroute.

Principe

Le nombre de véhicules entre  et  ne dépend pas du temps !



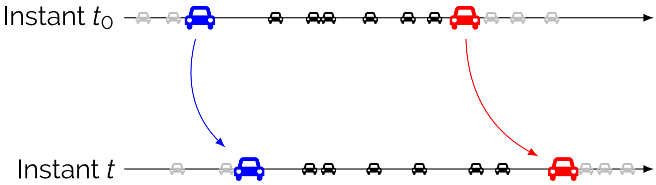
Loi de conservation des véhicules

Preuve 2

Soient et deux voitures qui roulent sur l'autoroute.

Principe

Le nombre de véhicules entre et ne dépend pas du temps !



$$0 = \frac{d}{dt} \int_{X(t,\,\cdot)}^{X(t,\,\cdot)} \rho(t,x)\, dx.$$

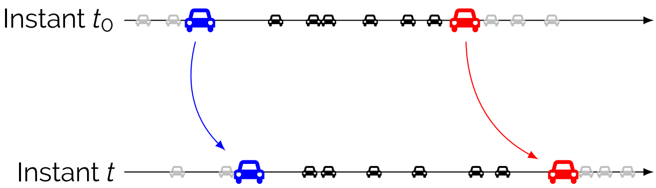
Loi de conservation des véhicules

Preuve 2

Soient $\textcolor{blue}{\text{🚗}}$ et $\textcolor{red}{\text{🚗}}$ deux voitures qui roulent sur l'autoroute.

Principe

Le nombre de véhicules entre $\textcolor{blue}{\text{🚗}}$ et $\textcolor{red}{\text{🚗}}$ ne dépend pas du temps !



$$0 = \left(\frac{d}{dt}X(t,\textcolor{red}{\text{🚗}})\right)\rho(t,X(t,\textcolor{red}{\text{🚗}})) - \left(\frac{d}{dt}X(t,\textcolor{blue}{\text{🚗}})\right)\rho(t,X(t,\textcolor{blue}{\text{🚗}}))$$
$$+ \int_{X(t,\textcolor{blue}{\text{🚗}})}^{X(t,\textcolor{red}{\text{🚗}})} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x)\,dx.$$

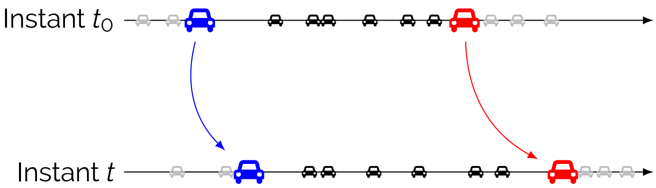
Loi de conservation des véhicules

Preuve 2

Soient et deux voitures qui roulent sur l'autoroute.

Principe

Le nombre de véhicules entre et ne dépend pas du temps !



$$0 = v(t, X(t, \,))\rho(t, X(t, \,)) - v(t, X(t, \,))\rho(t, X(t, \,)) + \int_{X(t, \,)}^{X(t, \,)} \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x)\, dx.$$

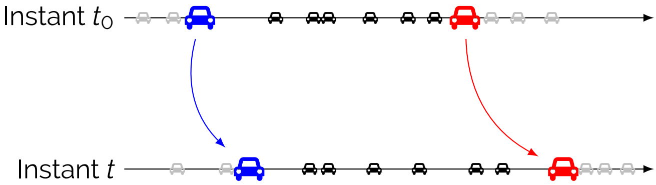
Loi de conservation des véhicules

Preuve 2

Soient et deux voitures qui roulent sur l'autoroute.

Principe

Le nombre de véhicules entre et ne dépend pas du temps !

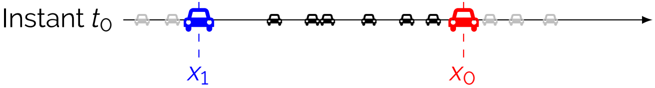


$$0 = \int_{X(t,\,)}^{X(t,\,)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) \right) dx.$$

Argument final : Ce qui précède est vrai pour tout t, , !

Et si on donnait un nom à et ?

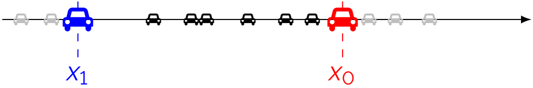
- La notation et ne peut pas être conservée, il faut trouver un moyen de les identifier.
- Idée : On fixe un temps de référence t_0 et on repère ces véhicules par leur position à cet instant.



$$\Longleftrightarrow (t_0, x_1), \quad \text{et} \quad \Longleftrightarrow (t_0, x_0).$$

Et si on donnait un nom à  et  ?

- La notation  et  ne peut pas être conservée, il faut trouver un moyen de les identifier.
- Idée : On fixe un temps de référence t_0 et on repère ces véhicules par leur position à cet instant.

Instant t_0 

 $\Longleftrightarrow (t_0, x_1)$, et  $\Longleftrightarrow (t_0, x_0)$.

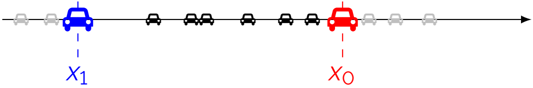
- La trajectoire $t \mapsto X(t,$ $)$ est désormais notée $t \mapsto X(t, t_0, x_0)$.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} X(t, t_0, x_0) = v(t, X(t, t_0, x_0)), \\ X(t_0, t_0, x_0) = x_0, \end{cases}$$

- X n'est rien d'autre que le **flot** associé au champ de vitesse v !

Et si on donnait un nom à  et  ?

- La notation  et  ne peut pas être conservée, il faut trouver un moyen de les identifier.
- Idée : On fixe un temps de référence t_0 et on repère ces véhicules par leur position à cet instant.



 $\Longleftrightarrow (t_0, x_1)$, et  $\Longleftrightarrow (t_0, x_0)$.

- La trajectoire $t \mapsto X(t,$ $)$ est désormais notée $t \mapsto X(t, t_0, x_0)$.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t, t_0, x_0) = v(t, X(t, t_0, x_0)), \\ X(t_0, t_0, x_0) = x_0, \end{cases}$$

Définition (Caractéristiques)

Dans le cadre des phénomènes de transport les trajectoires $t \mapsto X(t, t_0, x_0)$ sont plutôt appelées **courbes caractéristiques** *associées au champ de vitesse v.*

La pièce manquante

A ce stade : Une seule équation pour deux inconnues ρ et v

La brique manquante

Comment les véhicules adaptent leur vitesse au trafic ?

Il faut une loi de comportement !

La pièce manquante

A ce stade : Une seule équation pour deux inconnues ρ et v

La brique manquante

Comment les véhicules adaptent leur vitesse au trafic ?

Il faut une loi de comportement !

- Modèle 1 :

$$v(t,x) = V_{max} = \text{constante donnée}$$

On obtient l'équation de transport à vitesse constante

$$\boxed{\partial_t \rho + V_{max}\, \partial_x \rho = 0.}$$

La pièce manquante

A ce stade : Une seule équation pour deux inconnues ρ et v

La brique manquante

Comment les véhicules adaptent leur vitesse au trafic ?

Il faut une loi de comportement !

- Modèle 2 :

$$v(t,x) = V_{max}(x) = \text{fonction donnée}$$

On obtient l'équation (forme conservative)

$$\boxed{\partial_t \rho + \partial_x(\rho V_{max}(x)) = 0.}$$

ou encore (forme non conservative)

$$\boxed{\partial_t \rho + V_{max}(x)\,\partial_x \rho + V'_{max}(x)\,\rho = 0.}$$

La pièce manquante

A ce stade : Une seule équation pour deux inconnues ρ et v

La brique manquante

Comment les véhicules adaptent leur vitesse au trafic ?

Il faut une loi de comportement !

- Modèle 3 : Les conducteurs adaptent leur vitesse au trafic

$$v = g(\rho), \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ loi donnée}$$

On obtient l'équation **non-linéaire**

$$\boxed{\partial_t \rho + \partial_x (f(\rho)) = 0,}$$

avec $f(\rho) = \rho g(\rho)$.

Exemple typique : $\quad v = V_{max}(1 - \rho),$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t \rho + V_{max} \partial_x (\rho(1 - \rho)) = 0.}$$

1. Modèles de transport en 1D

1.2. Dynamique des gaz simplifiée

Dynamique des gaz simplifiée

Pb : Evolution d'un gaz dans un tube rectiligne hermétique de section S.

- Problème mono-dimensionnel
- Densité du gaz $\rho(t, x)$
- Vitesse moyenne des particules de gaz $v(t, x)$
- Pression du gaz $p(t, x)$

Dynamique des gaz simplifiée

Pb : Evolution d'un gaz dans un tube rectiligne hermétique de section S.

- Problème mono-dimensionnel
- Densité du gaz $\rho(t,x)$
- Vitesse moyenne des particules de gaz $v(t,x)$
- Pression du gaz $p(t,x)$

Conservation des particules $\boxed{\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0.}$

Dynamique des gaz simplifiée

Pb : Evolution d'un gaz dans un tube rectiligne hermétique de section S.

- Problème mono-dimensionnel
- Densité du gaz $\rho(t, x)$
- Vitesse moyenne des particules de gaz $v(t, x)$
- Pression du gaz $p(t, x)$

Conservation des particules $\boxed{\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0.}$

Loi de Newton = bilan de quantité de mouvement

On fixe $a < b$.
On considère le volume de gaz compris entre $X(t, 0, a)$ et $X(t, 0, b)$.

$$\frac{d}{dt}\left(S \int_{X(t,0,a)}^{X(t,0,b)} (\rho v)(t, x)\, dx\right) = \text{somme des forces extérieures}$$

Dynamique des gaz simplifiée

Pb : Evolution d'un gaz dans un tube rectiligne hermétique de section S.

- Problème mono-dimensionnel
- Densité du gaz $\rho(t, x)$
- Vitesse moyenne des particules de gaz $v(t, x)$
- Pression du gaz $p(t, x)$

Conservation des particules $\boxed{\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0.}$

Loi de Newton = bilan de quantité de mouvement

On fixe $a < b$.
On considère le volume de gaz compris entre $X(t, 0, a)$ et $X(t, 0, b)$.

$$\frac{d}{dt}\left(S\int_{X(t,0,a)}^{X(t,0,b)}(\rho v)(t, x)\,dx\right) = -S\,p(t, X(t, 0, b)) + S\,p(t, X(t, 0, a))$$

Dynamique des gaz simplifiée

Pb : Evolution d'un gaz dans un tube rectiligne hermétique de section S.

- Problème mono-dimensionnel
- Densité du gaz $\rho(t, x)$
- Vitesse moyenne des particules de gaz $v(t, x)$
- Pression du gaz $p(t, x)$

Conservation des particules $\boxed{\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0.}$

Loi de Newton = bilan de quantité de mouvement

On fixe $a < b$.
On considère le volume de gaz compris entre $X(t, 0, a)$ et $X(t, 0, b)$.

$$\int_{X(t,0,a)}^{X(t,0,b)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v + \rho v^2)\, dx = -\int_{X(t,0,a)}^{X(t,0,b)} \frac{\partial p}{\partial x}\, dx.$$

Dynamique des gaz simplifiée

Pb : Evolution d'un gaz dans un tube rectiligne hermétique de section S.

- Problème mono-dimensionnel
- Densité du gaz $\rho(t, x)$
- Vitesse moyenne des particules de gaz $v(t, x)$
- Pression du gaz $p(t, x)$

Conservation des particules $\boxed{\partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0.}$

Loi de Newton = bilan de quantité de mouvement

On fixe $a < b$.
On considère le volume de gaz compris entre $X(t, 0, a)$ et $X(t, 0, b)$.

$$\boxed{\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = 0.}$$

Dynamique des gaz simplifiée

A ce stade :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0 \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = 0. \end{cases}$$

Il manque une loi pour la pression

- **Gaz sans pression**

$$p = 0$$

- **Ecoulement isentropique :**

$$p = p_0 \rho^\gamma,$$

avec p_0 et $\gamma > 1$ dépendant du gaz considéré.

- **Ecoulement isotherme d'un gaz parfait :**

$$p = c^2 \rho,$$

où c dépend des conditions de température (vitesse du son !)

- **et bien d'autres ...**

2. Modèles de transport en dimension quelconque

Rappels sur les opérateurs différentiels

Définition (Gradient, Laplacien, Divergence)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. On définit

$$\nabla u := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_d} u \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \Delta u &:= \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2 u, \\ &= \mathrm{Tr}(D_x^2 u), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{div} F &:= \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} F_i \\ &= \mathrm{Tr}(D_x F) \end{aligned}$$

Proposition (Quelques formules utiles)

$$\operatorname{div}(uF) = F \cdot (\nabla u) + (\operatorname{div} F) u, \qquad \Delta u = \operatorname{div}\left(\nabla u\right).$$

Rappels sur les opérateurs différentiels

Définition (Gradient, Laplacien, Divergence)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$. On définit

$$\nabla u := \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_d} u \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \Delta u &:= \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2 u, \\ &= \mathrm{Tr}(D_x^2 u), \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \operatorname{div} F &:= \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} F_i \\ &= \mathrm{Tr}(D_x F) \end{aligned}$$

Théorème (Formule de Stokes)

Soit Ω un **domaine régulier** *de $\mathbb{R}^d$ et $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, alors on a*

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} F)(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} F(x) \cdot n(x)\, d\sigma(x),$$

où n désigne la **normale unitaire sortante** *au domaine Ω.*

2. Modèles de transport en dimension quelconque

2.1. Théorème de Liouville

Théorème de Liouville

Enoncé

- Soit $v : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to v(t,x) \in \mathbb{R}^d$ un **champ de vitesse** régulier et borné.
- On note X les caractéristiques associées à v.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le flot au temps t

$$y \in \mathbb{R}^d \mapsto X(t,0,y) \in \mathbb{R}^d,$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On note $J(t,y) := \mathtt{det}(D_y X)(t,0,y)$.

Théorème de Liouville

Enoncé

- Soit $v : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to v(t,x) \in \mathbb{R}^d$ un **champ de vitesse** régulier et borné.
- On note X les caractéristiques associées à v.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le flot au temps t

$$y \in \mathbb{R}^d \mapsto X(t,0,y) \in \mathbb{R}^d,$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On note $J(t,y) := \mathrm{det}(D_y X)(t,0,y)$.

Théorème (de Liouville)

Le jacobien J vérifie, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, l'équation différentielle **linéaire scalaire**

$$\begin{cases} \partial_t J(t,y) = (\mathrm{div}_x\, v)(t, X(t,0,y))\, J(t,y), \\ J(0,y) = 1, \end{cases}$$

- En particulier : $J(t,y) > 0$ pour tout t, y !
- Dans ce contexte on notera plutôt $\mathrm{div}\, v$ au lieu de $\mathrm{div}_x\, v$.

Théorème de Liouville

- Soit $v : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to v(t,x) \in \mathbb{R}^d$ un **champ de vitesse** régulier et borné.
- On note X les caractéristiques associées à v.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, le flot au temps t

$$y \in \mathbb{R}^d \mapsto X(t,0,y) \in \mathbb{R}^d,$$

est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme. On note $J(t,y) := \mathrm{det}(D_y X)(t,0,y)$.

Théorème (de Liouville)

Le jacobien J vérifie, pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, l'équation différentielle **linéaire scalaire**

$$\begin{cases} \partial_t J(t,y) = (\mathrm{div}_x\, v)(t, X(t,0,y))\, J(t,y), \\ \hfill J(0,y) = 1, \end{cases}$$

Corollaire (Conservation des volumes)

Si v est **à divergence nulle** *alors $J(t,y) = 1$ pour tout t,y !*

Théorème de Liouville

Preuve

- On utilise le théorème de différentiation du flot

$$\begin{cases} \partial_t(D_yX) = (D_xv)(t, X(t,0,y)).(D_yX), \\ (D_yX)(0) = \mathrm{Id}, \end{cases}$$

- Puis la différentielle de l'application « déterminant » :

$$(D\det)(M).H = (\det M)\,\mathrm{Tr}(M^{-1}.H), \quad \forall M \in GL_d(\mathbb{R}),\ \forall H \in M_d(\mathbb{R}).$$

Théorème de Liouville

Preuve

- On utilise le théorème de différentiation du flot

$$\begin{cases} \partial_t(D_y X) = (D_x v)(t, X(t,0,y)).(D_y X), \\ (D_y X)(0) = \mathrm{Id}, \end{cases}$$

- Puis la différentielle de l'application « déterminant » :

$$(D\det)(M).H = (\det M)\,\mathrm{Tr}(M^{-1}.H), \quad \forall M \in GL_d(\mathbb{R}), \ \forall H \in M_d(\mathbb{R}).$$

- La suite est un calcul de dérivée composée ...

$$\begin{aligned}
\partial_t J(t,y) &= \partial_t(\det(D_y X)(t,0,y)) \\
&= \big(\det(D_y X)(t,0,y)\big)\,\mathrm{Tr}\,\big((D_y X(t,0,y))^{-1}.\partial_t(D_y X)(t,0,y)\big) \\
&= J(t,y)\,\mathrm{Tr}\,\big((D_y X(t,0,y))^{-1}.(D_x v)(t,X(t,0,y)).(D_y X(t,0,y))\big) \\
&= J(t,y)\,\mathrm{Tr}\,\big((D_x v)(t,X(t,0,y))\big) \\
&= J(t,y)(\mathrm{div}_x\, v)(t,X(t,0,y)).
\end{aligned}$$

2. Modèles de transport en dimension quelconque

2.2. Théorème de Reynolds

Théorème de Reynolds

Enoncé

But : on veut pouvoir écrire un bilan de conservation (comme pour le trafic routier) mais en dimension quelconque.

Il faut donc généraliser le calcul suivant :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{X(t,\text{🚗})}^{X(t,\text{🚗})} \rho(t,x)\,dx\right) = \int_{X(t,\text{🚗})}^{X(t,\text{🚗})} \left(\partial_t \rho + \partial_x(\rho v)\right)\,dx.$$

Théorème de Reynolds

But : on veut pouvoir écrire un bilan de conservation (comme pour le trafic routier) mais en dimension quelconque.

Il faut donc généraliser le calcul suivant :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{X(t,\ )}^{X(t,\ )} \rho(t,x)\,dx\right) = \int_{X(t,\ )}^{X(t,\ )} \left(\partial_t \rho + \partial_x(\rho v)\right)\,dx.$$

Théorème

Soit $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^d$ un domaine fixé. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on pose

$$\Omega_t := X(t, 0, \Omega_0).$$

Soit $f : (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. Alors on a

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx\right) = \int_{\Omega_t} \left[\partial_t f + \operatorname{div}(fv)\right](t,x)\,dx.$$

Théorème de Reynolds

Preuve

On veut calculer la dérivée de

$$F(t) := \int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx.$$

- **Changement de variable**

$$F(t) = \int_{\Omega_0} f(t, X(t,0,y))\,J(t,y)\,dy.$$

Théorème de Reynolds

Preuve

On veut calculer la dérivée de

$$F(t) := \int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx.$$

- **Changement de variable**

$$F(t) = \int_{\Omega_0} f(t, X(t,0,y))\,J(t,y)\,dy.$$

- **Dérivation sous l'intégrale + Théorème de Liouville**

$$F'(t) = \int_{\Omega_0} f(t,X(t,0,y))\partial_t J(t,y)\,dy$$
$$+\int_{\Omega_0}\Big[\partial_t f(t,X(t,0,y)) + (D_x f)(t,X(t,0,y)).\partial_t X(t,0,y)\Big]J(t,y)\,dy$$

Théorème de Reynolds

Preuve

On veut calculer la dérivée de

$$F(t) := \int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx.$$

- **Changement de variable**

$$F(t) = \int_{\Omega_0} f(t, X(t,0,y))\,J(t,y)\,dy.$$

- **Dérivation sous l'intégrale + Théorème de Liouville**

$$F'(t) = \int_{\Omega_0} f(t,X(t,0,y))\partial_t J(t,y)\,dy$$
$$+\int_{\Omega_0}\Big[\partial_t f(t,X(t,0,y))+(D_x f)(t,X(t,0,y)).v(t,X(t,0,y))\Big]J(t,y)\,dy$$

Théorème de Reynolds

Preuve

On veut calculer la dérivée de

$$F(t) := \int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx.$$

- **Changement de variable**

$$F(t) = \int_{\Omega_0} f(t, X(t,0,y))\,J(t,y)\,dy.$$

- **Dérivation sous l'intégrale + Théorème de Liouville**

$$F'(t) = \int_{\Omega_0} f(t,X(t,0,y))\partial_t J(t,y)\,dy$$

$$+\int_{\Omega_0} \Big[\partial_t f(t,X(t,0,y)) + (\nabla_x f)(t,X(t,0,y))\cdot v(t,X(t,0,y))\Big] J(t,y)\,dy$$

Théorème de Reynolds

Preuve

On veut calculer la dérivée de
$$F(t) := \int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx.$$

- **Changement de variable**
$$F(t) = \int_{\Omega_0} f(t, X(t,0,y))\,J(t,y)\,dy.$$

- **Dérivation sous l'intégrale + Théorème de Liouville**
$$F'(t) = \int_{\Omega_0} f(t,X(t,0,y))(\mathrm{div}_x\, v)(t,X(t,0,y))J(t,y)\,dy$$
$$+\int_{\Omega_0}\Big[\partial_t f(t,X(t,0,y)) + (\nabla_x f)(t,X(t,0,y))\cdot v(t,X(t,0,y))\Big]J(t,y)\,dy$$

Théorème de Reynolds

Preuve

On veut calculer la dérivée de

$$F(t) := \int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx.$$

- **Changement de variable**

$$F(t) = \int_{\Omega_0} f(t,X(t,0,y))\,J(t,y)\,dy.$$

- **Dérivation sous l'intégrale + Théorème de Liouville**

$$F'(t) = \int_{\Omega_0} \big[f(t,X)(\mathrm{div}_x\, v)(t,X) + (\nabla_x f)(t,X)\cdot v(t,X)\big]J(t,y)\,dy + \int_{\Omega_0} \partial_t f(t,X)J(t,y)\,dy$$

Théorème de Reynolds

Preuve

On veut calculer la dérivée de

$$F(t) := \int_{\Omega_t} f(t,x)\, dx.$$

- **Changement de variable**

$$F(t) = \int_{\Omega_0} f(t, X(t,0,y))\, J(t,y)\, dy.$$

- **Dérivation sous l'intégrale + Théorème de Liouville**

$$F'(t) = \int_{\Omega_0} \left[\operatorname{div}(fv) + \partial_t f \right](t,X) J(t,y)\, dy$$

Théorème de Reynolds

Preuve

On veut calculer la dérivée de

$$F(t) := \int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx.$$

- **Changement de variable**

$$F(t) = \int_{\Omega_0} f(t, X(t,0,y))\,J(t,y)\,dy.$$

- **Dérivation sous l'intégrale + Théorème de Liouville**

$$F'(t) = \int_{\Omega_0} \big[\operatorname{div}(fv) + \partial_t f\big](t,X)J(t,y)\,dy$$

- **Changement de variable inverse**

$$F'(t) = \int_{\Omega_t} \big[\operatorname{div}(fv) + \partial_t f\big](t,x)\,dx.$$

Théorème de Reynolds

Commentaires

On vient de montrer

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx\right) = \int_{\Omega_t} \left[\partial_t f + \mathrm{div}(fv)\right](t,x)\,dx.$$

Théorème de Reynolds

Commentaires

On vient de montrer

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx\right) = \int_{\Omega_t} \big[\partial_t f + \operatorname{div}(fv)\big](t,x)\,dx.$$

1. Si on applique cette formule à $f = 1$ on trouve
$$\frac{d}{dt}|\Omega_t| = \int_{\Omega_t} (\operatorname{div} v)(t,x)\,dx.$$
On retrouve que si $\operatorname{div} v = 0$, alors $t \mapsto |\Omega_t|$ est constant. De plus
   - Si $\operatorname{div} v \geqslant 0$, alors le volume de Ω_t augmente avec le temps.
   - Si $\operatorname{div} v \leqslant 0$, alors le volume de Ω_t diminue avec le temps.

Théorème de Reynolds

Commentaires

On vient de montrer

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx\right) = \int_{\Omega_t} \left[\partial_t f + \mathrm{div}(fv)\right](t,x)\,dx.$$

1. Si on applique cette formule à $f = 1$ on trouve
$$\frac{d}{dt}|\Omega_t| = \int_{\Omega_t} (\mathrm{div}\, v)(t,x)\,dx.$$
On retrouve que si $\mathrm{div}\, v = 0$, alors $t \mapsto |\Omega_t|$ est constant. De plus
    - Si $\mathrm{div}\, v \geqslant 0$, alors le volume de Ω_t augmente avec le temps.
    - Si $\mathrm{div}\, v \leqslant 0$, alors le volume de Ω_t diminue avec le temps.
2. Si on applique la formule de Stokes, on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\Omega_t} f(t,x)\,dx\right) = \int_{\Omega_t} \partial_t f\,dx + \int_{\partial\Omega_t} f(v \cdot n)\,d\sigma(x).$$

Fin de la séance 7

2. Modèles de transport en dimension quelconque

2.3. Etablissement de lois de conservation

Equations de conservation

Soit un système de « particules » dense décrit par une densité $\rho(t,x) \in \mathbb{R}$ et un champ de vitesse $v(t,x) \in \mathbb{R}^d$, réguliers.

Théorème (Equation de continuité)

On suppose qu'il n'y a **ni disparition ni apparition** *de particules durant l'évolution, alors* ρ *et* v *sont reliées par l'EDP*

$$\partial_t \rho + div(\rho v) = 0.$$

On l'appelle **équation de continuité***, ou* **conservation de la masse***.*

Equations de conservation

Soit un système de « particules » dense décrit par une densité $\rho(t,x) \in \mathbb{R}$ et un champ de vitesse $v(t,x) \in \mathbb{R}^d$, réguliers.

Théorème (Equation de continuité)

On suppose qu'il n'y a **ni disparition ni apparition** *de particules durant l'évolution, alors ρ et v sont reliées par l'EDP*

$$\partial_t \rho + div(\rho v) = 0.$$

On l'appelle **équation de continuité**, *ou* **conservation de la masse**.

Si la population est divisée en deux espèces et que $\alpha(t,x) \in [0,1]$ désigne la proportion de l'espèce 1 au temps t et au point x alors :

Théorème (Equation de convection)

Si la densité totale ρ est non nulle, alors α et v sont reliées par l'EDP

$$\partial_t \alpha + v \cdot \nabla \alpha = 0.$$

On l'appelle **équation de transport**, *ou* **équation de convection**.

3. Solutions classiques des équations de transport

Objectif

Un peu de vocabulaire

- **EDP d'évolution** = EDP dont l'une des variables est le temps t. Les autres variables sont *en général* des variables « d'espace ».

$$\boxed{\partial_t u = \text{qqchose en fonction de } u,\ \partial_{x_i} u,\ \dots} \qquad (\star)$$

- **Problème de Cauchy** = Une EDP d'évolution + une donnée initiale

$$\boxed{u(0,x) = u_0(x), \qquad \forall x.} \qquad (\star\star)$$

On trouve aussi les notations

$$u(0,.) = u_0(.), \quad \text{ou} \quad u(0) = u_0, \quad \text{ou} \quad u_{|t=0} = u_0.$$

- Le vocabulaire issu de la théorie des EDO est largement conservé :
  - trajectoire
  - problème linéaire / non-linéaire
  - équilibre
  - stabilité
  - linéarisé

Objectif

Un peu de vocabulaire

- **EDP d'évolution** = EDP dont l'une des variables est le temps t. Les autres variables sont *en général* des variables « d'espace ».

$$\boxed{\partial_t u = \text{qqchose en fonction de } u, \partial_{x_i} u, \ldots} \qquad (\star)$$

- **Problème de Cauchy** = Une EDP d'évolution + une donnée initiale

$$\boxed{u(0,x) = u_0(x), \qquad \forall x.} \qquad (\star\star)$$

Warning !

Un problème de Cauchy pour une EDP d'évolution **ne relève en aucun cas** de la théorie développée pour les équations différentielles !

Solution du problème de Cauchy

On se donne $x \mapsto u_0(x)$ et on cherche une fonction $(t,x) \mapsto u(t,x)$ qui vérifie $(\star)$ et $(\star\star)$.

3. Solutions classiques des équations de transport

3.1. Cas général de l'équation de convection

Equation de transport/convection

Théorème

Pour tout champ v régulier et borné, pour toute donnée initiale $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u + v(t,x)\cdot\nabla u = 0, \quad \forall t>0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

et celle-ci est donnée par la formule

$$u(t,x) = u_0(X(0,t,x)), \quad \forall t>0, \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

où X désigne les caractéristiques associées au champ v.

Idée fondamentale ($\sim$ preuve) : la solution est constante le long des caractéristiques !

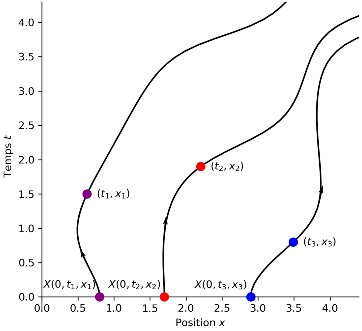
On parle de **méthode des caractéristiques**

Equation de transport/convection

Résolution du problème de Cauchy

$$u(t,x) = u_0(X(0,t,x)), \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

Illustration de la formule en 1D d'espace



Equation de transport/convection

Preuve par analyse-synthèse

- On suppose qu'une solution u existe.
- On fixe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et on considère la valeur de u le long de la caractéristique issue de x_0

$$\varphi(t) := u(t, X(t, 0, x_0)), \quad \forall t \geqslant 0.$$

- On observe (dérivation de fonction composée) que

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \partial_t u(t, X(t, 0, x_0)) + (\partial_t X(t, 0, x_0)) \cdot \nabla u(t, X(t, 0, x_0)) \\
&= \partial_t u(t, X(t, 0, x_0)) + v(t, X(t, 0, x_0)) \cdot \nabla u(t, X(t, 0, x_0)) \\
&= (\partial_t u + v \cdot \nabla u)(t, X(t, 0, x_0)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

cette dernière égalité étant issue de l'équation vérifiée par u.
Donc φ est constante.

Equation de transport/convection

Preuve par analyse-synthèse

- On suppose qu'une solution u existe.
- On fixe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et on considère la valeur de u le long de la caractéristique issue de x_0

$$\varphi(t) := u(t, X(t, 0, x_0)), \quad \forall t \geqslant 0.$$

- On a donc établi

$$\varphi(t) = \varphi(0), \quad \forall t \geqslant 0.$$

Equation de transport/convection

Preuve par analyse-synthèse

- On suppose qu'une solution u existe.
- On fixe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et on considère la valeur de u le long de la caractéristique issue de x_0

$$\varphi(t) := u(t, X(t, 0, x_0)), \quad \forall t \geqslant 0.$$

- On a donc établi

$$\varphi(t) = \varphi(0), \quad \forall t \geqslant 0.$$

- On calcule par ailleurs

$$\varphi(0) = u(0, X(0, 0, x_0)) = u(0, x_0) = u_0(x_0).$$

Equation de transport/convection

Preuve par analyse-synthèse

- On suppose qu'une solution u existe.
- On fixe un point $x_0 \in \mathbb{R}$ et on considère la valeur de u le long de la caractéristique issue de x_0

$$\varphi(t) := u(t, X(t, 0, x_0)), \quad \forall t \geqslant 0.$$

- On a donc établi

$$\varphi(t) = \varphi(0), \quad \forall t \geqslant 0.$$

- On calcule par ailleurs

$$\varphi(0) = u(0, X(0, 0, x_0)) = u(0, x_0) = u_0(x_0).$$

- On a donc montré

$$\boxed{u(t, X(t, 0, x_0)) = u_0(x_0), \qquad \forall t \geqslant 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}.}$$

Equation de transport/convection

Preuve par analyse-synthèse

- On suppose qu'une solution u existe.
- On a donc montré

$$\boxed{u(t, X(t, 0, x_0)) = u_0(x_0), \qquad \forall t \geqslant 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}.}$$

$\rightsquigarrow$ Il faut maintenant en déduire $u(t, x)$ pour tout t, x.

Equation de transport/convection

Preuve par analyse-synthèse

- On suppose qu'une solution u existe.
- On a donc montré

$$\boxed{u(t, X(t, 0, x_0)) = u_0(x_0), \qquad \forall t \geqslant 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}.}$$

$\rightsquigarrow$ Il faut maintenant en déduire $u(t, x)$ pour tout t, x.

- Question : Etant donnés t, x peut-on trouver x_0 tel que

$$X(t, 0, x_0) = x? \qquad (\star)$$

On dit qu'on cherche le **pied de la caractéristique**.

Equation de transport/convection

Preuve par analyse-synthèse

- On suppose qu'une solution u existe.
- On a donc montré

$$\boxed{u(t, X(t,0,x_0)) = u_0(x_0), \qquad \forall t \geqslant 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}.}$$

$\rightsquigarrow$ Il faut maintenant en déduire $u(t,x)$ pour tout t, x.

- Question : Etant donnés t, x peut-on trouver x_0 tel que

$$X(t,0,x_0) = x? \qquad (\star)$$

On dit qu'on cherche le **pied de la caractéristique**.

- Réponse : Oui bien sûr !

La solution de $(\star)$ est donc donnée par

$$x_0 = X(0,t,x).$$

On trouve donc la formule annoncée

$$u(t,x) = u_0(X(0,t,x)).$$

3. Solutions classiques des équations de transport

3.2. Quelques exemples simples

Exemples simples

Vitesse constante

On suppose que $v(t,x) = v$ ne dépend ni de t ni de x.

- Calcul des caractéristiques

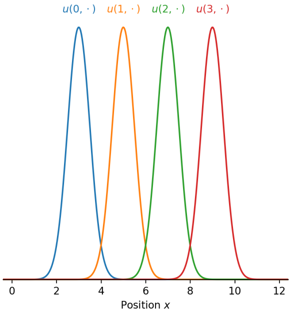
$$X(t, t_0, x_0) = x_0 + (t - t_0)v.$$

- La solution du problème de Cauchy s'écrit donc

$$u(t,x) = u_0(x - vt), \quad \forall t, x.$$

Exemple en 1D :

- $v = 2$.
- u_0 = une gaussienne.



Exemples simples

On suppose que $v(t,x) = v(t)$ ne dépend que de t.

- Calcul des caractéristiques

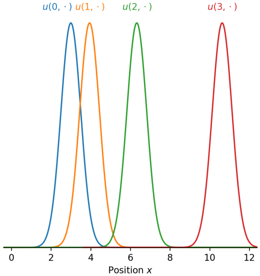
$$X(t, t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau.$$

- La solution du problème de Cauchy s'écrit donc

$$u(t,x) = u_0\left(x + \int_t^0 v(\tau)\, d\tau\right) = u_0\left(x - \int_0^t v(\tau)\, d\tau\right).$$

Exemple en 1D :

- $v(t) = 0.7 + 0.5t$.
- u_0 = une gaussienne.



Exemples simples

Vitesse variable

On considère maintenant $v(t,x)$ dépendant à la fois de t et x.

- Calcul des caractéristiques

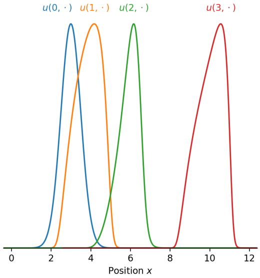
$$\boxed{\text{Comment faire ??}}$$

- La solution du problème de Cauchy s'écrit donc

$$u(t,x) = u_0\left(\boxed{??}\right).$$

Exemple en 1D :

- $v(t,x) = 0.7 + 0.5t + 0.5\sin(2x)$.
- u_0 = une gaussienne.



Exemples simples

Champ tournant en 2D

On se place en dimension 2. On suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ (la vitesse angulaire) tel que

$$v(x) = \omega \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

- Calcul des caractéristiques

$$X(t, t_0, x_0) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(t - t_0)) & -\sin(\omega(t - t_0)) \\ \sin(\omega(t - t_0)) & \cos(\omega(t - t_0)) \end{pmatrix} x_0 = R_{\omega(t-t_0)} x_0.$$

- La solution du problème de Cauchy s'écrit

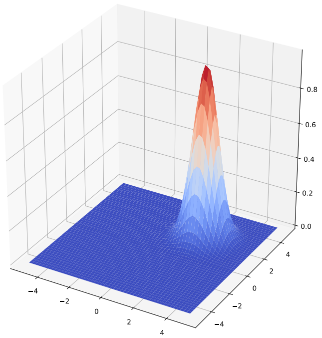
$$u(t, x) = u_0(R_{-\omega t} x).$$

Exemples simples

Champ tournant en 2D

On se place en dimension 2. On suppose qu'il existe $\omega \in \mathbb{R}$ (la vitesse angulaire) tel que

$$v(x) = \omega \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$



3. Solutions classiques des équations de transport

3.3. Autres types d'équations

Applications de la méthode des caractéristiques

Toute la méthode est basée sur le calcul suivant

$$\frac{d}{dt}\left[u\big(t, X(t,0,x_0)\big)\right] = [\partial_t u + v\cdot\nabla u]\big(t, X(t,0,x_0)\big),$$

valable pour **toute** fonction u dérivable et tout v assez régulier.

A retenir

Toute EDP d'évolution dont la **partie principale** est de la forme

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)u,$$

peut se « résoudre » en étudiant l'évolution de u le long des caractéristiques de v.

Exemples

$$\partial_t u + v\cdot\nabla u = f, \qquad f(t,x)\in\mathbb{R} \text{ donné}$$

$$\partial_t u + v\cdot\nabla u + au = 0, \qquad a(t,x)\in\mathbb{R} \text{ donné}$$

$$\partial_t u + \mathrm{div}(uv) = 0$$

$$\partial_t u + v\cdot\nabla u = u^2$$

On fixe $(t,x) \mapsto v(t,x) \in \mathbb{R}^d$ régulier.

Théorème

Pour tout $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, et tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + v(t,x) \cdot \nabla u = f(t,x), & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t=0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Elle est donnée par la formule

$$u(t,x) = u_0(X(0,t,x)) + \int_0^t f(s,X(s,t,x))\,ds, \quad \forall t \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Applications de la méthode des caractéristiques

Exemple 2 : Transport avec terme de réaction

On fixe $(t, x) \mapsto v(t, x) \in \mathbb{R}^d$ régulier.

Théorème

Pour tout $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, et tout $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$,il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + v(t,x) \cdot \nabla u + a(t,x)u = 0, & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t=0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

De plus, si $u_0(x) \geqslant 0$ pour tout x, alors $u(t,x) \geqslant 0$ pour tout t, x.

Remarques :

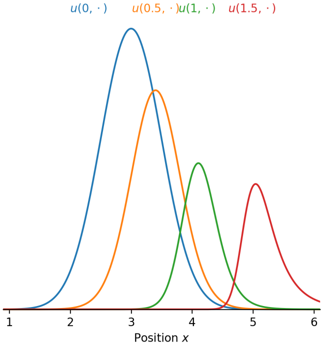
- Il existe une formule « explicite »...
- Cas particulier : la loi de conservation $\partial_t u + \mathrm{div}(uv) = 0$.

Applications de la méthode des caractéristiques

Exemple 2 : Transport avec terme de réaction

On fixe $(t,x) \mapsto v(t,x) \in \mathbb{R}^d$ régulier.

$$\begin{cases} \partial_t u + v(t,x) \cdot \nabla u + a(t,x)u = 0, \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \qquad\qquad u(t=0,x) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Fin de la séance 8

4. Solutions faibles des équations de transport

4. Solutions faibles des équations de transport

4.1. Introduction et Définition

Une (des ?) formule(s ?) d'intégration par parties

Proposition (Une formule de Stokes light ...)

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*. Pour tout* $F \in \mathcal{C}_c^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$*, on a*

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = 0.$$

Une (des ?) formule(s ?) d'intégration par parties

Proposition (Une formule de Stokes light ...)

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Pour tout $F \in \mathcal{C}^1_c(\Omega, \mathbb{R}^d)$, on a

$$\int_\Omega \operatorname{div} F \, dx = 0.$$

Proposition (Intégration par parties sans terme de bord)

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Pour tout $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, tels que F ou u est à support compact dans Ω, alors on a

$$\int_\Omega u(\operatorname{div} F) \, dx = -\int_\Omega (\nabla u) \cdot F \, dx.$$

Exemple : si $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, avec u ou v à support compact

$$\int_\Omega u(\partial_i v) \, dx = -\int_\Omega (\partial_i u) v \, dx, \qquad \forall i \in \{1, \dots, d\}.$$

Un outil de base

Rappel du cours de Distributions

Lemme (du Bois-Reymond)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Si on a

$$\int_\Omega u\varphi\, dx = 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

alors on a

$$u = 0 \quad \textit{presque partout dans } \Omega.$$

- L'idée de base consisterait à choisir $\varphi = u$ comme fonction test pour obtenir $\int_\Omega |u|^2\, dx = 0$ et donc $u = 0$ mais bien sûr ce n'est pas possible car u n'est pas supposée $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.
- La preuve complète basée sur un argument de densité est donnée dans l'annexe A des notes de cours.

Solutions faibles du transport

Objectif

Définir des solutions d'une équation de transport

$$\partial_t u + v \cdot \nabla u = 0,$$

qui ne soient possiblement pas dérivables ni même continues.

Mais pourquoi diable veut-on faire ça ???

1. **Modélisation** : Il existe des discontinuités qui se propagent
   - Ondes de chocs : mur du son, ...
   - Bouchon sur l'autoroute.
   - Démarrage à un feu rouge.
2. **Mathématique** : La formule exacte qui résout l'équation de transport à vitesse constante pour u_0 de classe C^1 est

$$u(t,x) = u_0(x - tv).$$

   Elle ne nécessite **aucune régularité** de u_0 (et donc de u ...)

Solutions faibles du transport

Soit v un champ de vecteurs C^1 et borné. On considère le problème de Cauchy

$$(\star) \qquad \begin{cases} \partial_t u + v(t,x) \cdot \nabla u = 0, & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t=0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Définition

Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ on dit qu'une fonction $u \in L^1_{loc}(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ est une **solution faible** *de $(\star)$ si elle vérifie, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ l'égalité*

$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\big[\partial_t\varphi + \mathrm{div}(\varphi v)\big](t,x)\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x)\varphi(0,x)\,dx = 0.$$

Remarque : Cette définition a bien un sens sous les seules hypothèses d'intégrabilité de u_0 et u !

4. Solutions faibles des équations de transport

4.2. Propriétés

Solutions faibles du transport

Est-ce qu'on a tout cassé ?

Pour qu'une telle approche soit pertinente, il faut que :

1. Toute solution régulière $u \in \mathcal{C}^1$ est une solution faible.
2. Toute solution faible u qui, de plus, est de classe $\mathcal{C}^1$, est une solution classique.
3. On conserve l'existence et l'unicité de la solution : pour tout $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, il existe une unique solution faible u du problème.
4. Validité de la formule explicite par les caractéristiques ?

On va montrer ces propriétés par la suite

Solutions faibles du transport

Solution classique $\Rightarrow$ solution faible

Proposition

Si $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ est une solution classique du problème de transport, alors u est aussi une solution faible du problème.

Preuve : En 1D pour simplifier mais ça ne change rien !

- On prend une fonction test φ,
- On multiplie l'EDP par φ,
- On intègre sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$,

$$0 = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\partial_t u + v\partial_x u)\, dx\, dt$$

Solutions faibles du transport

Solution classique $\Rightarrow$ solution faible

Proposition

Si $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ est une solution classique du problème de transport, alors u est aussi une solution faible du problème.

Preuve : En 1D pour simplifier mais ça ne change rien !

- On prend une fonction test φ,
- On multiplie l'EDP par φ,
- On intègre sur $[0, +\infty[\times\mathbb{R}$,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \varphi \partial_t u \, dt \right) dx + \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi v \partial_x u \, dx \right) dt$$

Solutions faibles du transport

Solution classique $\Rightarrow$ solution faible

Proposition

Si $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ est une solution classique du problème de transport, alors u est aussi une solution faible du problème.

Preuve : En 1D pour simplifier mais ça ne change rien !

- On prend une fonction test φ,
- On multiplie l'EDP par φ,
- On intègre sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$,
- On fait des intégrations par parties,

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \left(- \int_0^{+\infty} \partial_t \varphi u \, dt - \varphi(0,x) u(0,x) \right) dx - \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_x(\varphi v) u \, dx \right) dt.$$

Solutions faibles du transport

Solution classique $\Rightarrow$ solution faible

Proposition

Si $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ est une solution classique du problème de transport, alors u est aussi une solution faible du problème.

Preuve : En 1D pour simplifier mais ça ne change rien !

- On prend une fonction test φ,
- On multiplie l'EDP par φ,
- On intègre sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$,
- On fait des intégrations par parties,
- On utilise la donnée initiale.

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \left(-\int_0^{+\infty} \partial_t \varphi u \, dt - \varphi(0,x) u_0(x) \right) dx - \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} \partial_x(\varphi v) u \, dx \right) dt.$$

Solutions faibles du transport

Solution faible régulière $\Rightarrow$ solution classique

Proposition

Soit $u \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ une solution faible du problème de transport pour la donnée initiale u_0. Si $u \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ alors u est solution classique et $u(0, .) = u_0$.

Preuve :

Toujours en 1D !

- On commence par prendre $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(]0, +\infty[\times\mathbb{R})$ et on intègre par parties (dans l'autre sens que la preuve précédente !)

$$0 = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \varphi(\partial_t u + v\partial_x u)\, dx\, dt.$$

- Par le lemme de Du Bois Reymond, il vient $\boxed{\partial_t u + v\partial_x u = 0}$.

Solutions faibles du transport

Solution faible régulière $\Rightarrow$ solution classique

Proposition

Soit $u \in L^1_{loc}([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ une solution faible du problème de transport pour la donnée initiale u_0. Si $u \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ alors u est solution classique et $u(0,.) = u_0$.

Preuve :

Toujours en 1D !

- On commence par prendre $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(]0,+\infty[\times\mathbb{R})$ et on intègre par parties (dans l'autre sens que la preuve précédente !)

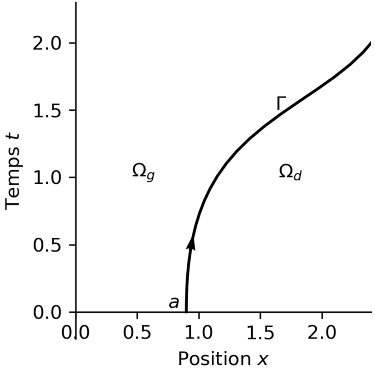
$$0 = \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}} \varphi(\partial_t u + v\partial_x u)\, dx\, dt.$$

- Par le lemme de Du Bois Reymond, il vient $\boxed{\partial_t u + v\partial_x u = 0}$.
- Maintenant on prend $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ et on intègre par parties à nouveau puis on compare à la définition pour obtenir

$$0 = \int_{\mathbb{R}} \varphi(0,x)(u(0,x) - u_0(x))\, dx.$$

- Lemme de Du Bois Reymond $\Rightarrow$ $\boxed{u(0,.) = u_0}$.

Les solutions régulières par morceaux



$$\Gamma = \{(t, X(t,0,a)), t > 0\}.$$

$$\Omega_g = \{(t,x),\ \ x < X(t,0,a)\},$$

$$\Omega_d = \{(t,x),\ \ x > X(t,0,a)\},$$

$$u(t,x) := \begin{cases} u_g(t,x), & \text{si } (t,x) \in \Omega_g, \\ u_d(t,x), & \text{si } (t,x) \in \Omega_d. \end{cases}$$

Proposition

Si u_g (resp. u_d) est solution classique de l'équation de transport dans Ω_g (resp. dans Ω_d), alors u est une solution faible de l'équation de transport dans $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$.

Exemple typique : Si u_g et u_d sont des constantes !

4. Solutions faibles des équations de transport

4.3. Expression explicite

Expression explicite via les caractéristiques

On suppose toujours que v est donné, régulier et borné.

Théorème

Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, la formule

$$u(t,x) := u_0(X(0,t,x)), \quad \textit{pour presque tout } (t,x),$$

définit bien un élément de $L^1_{loc}([0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$.

De plus, cette fonction u est une solution faible du problème de transport pour la donnée initiale u_0.

Remarque : A ce stade, rien ne dit qu'il n'y a pas une autre solution faible pour la même donnée initiale ... ce qui serait un problème ...

Expression explicite via les caractéristiques

Preuve dans le cas d'une vitesse constante

On suppose $v(t,x) = v$. La formule devient

$$u(t,x) := u_0(x - tv).$$

- u est bien mesurable, il reste à voir que la classe de u presque partout ne dépend que de la classe de u_0 … c'est essentiellement la définition de la mesure produit.

Expression explicite via les caractéristiques

Preuve dans le cas d'une vitesse constante

On suppose $v(t,x) = v$. La formule devient

$$u(t,x) := u_0(x - tv).$$

- u est bien mesurable, il reste à voir que la classe de u presque partout ne dépend que de la classe de u_0 … c'est essentiellement la définition de la mesure produit.
- On prend maintenant une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ et on calcule la quantité d'intérêt

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi)(t,x)\, dx\, dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x - tv)(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi)(t,x)\, dx\, dt$$

Expression explicite via les caractéristiques

Preuve dans le cas d'une vitesse constante

On suppose $v(t,x) = v$. La formule devient

$$u(t,x) := u_0(x - tv).$$

- u est bien mesurable, il reste à voir que la classe de u presque partout ne dépend que de la classe de u_0 … c'est essentiellement la définition de la mesure produit.
- On prend maintenant une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ et on calcule la quantité d'intérêt

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi)(t,x)\, dx\, dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi)(t, y + tv)\, dy\, dt$$

Expression explicite via les caractéristiques

Preuve dans le cas d'une vitesse constante

On suppose $v(t,x) = v$. La formule devient

$$u(t,x) := u_0(x - tv).$$

- u est bien mesurable, il reste à voir que la classe de u presque partout ne dépend que de la classe de u_0 ... c'est essentiellement la définition de la mesure produit.
- On prend maintenant une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ et on calcule la quantité d'intérêt

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi)(t,x)\, dx\, dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, y + tv) \right) dy\, dt$$

Expression explicite via les caractéristiques

Preuve dans le cas d'une vitesse constante

On suppose $v(t,x) = v$. La formule devient

$$u(t,x) := u_0(x - tv).$$

- u est bien mesurable, il reste à voir que la classe de u presque partout ne dépend que de la classe de u_0 ... c'est essentiellement la définition de la mesure produit.
- On prend maintenant une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ et on calcule la quantité d'intérêt

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi)(t,x)\, dx\, dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \left(\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, y + tv) \right) dt \right) dy$$

Expression explicite via les caractéristiques

Preuve dans le cas d'une vitesse constante

On suppose $v(t,x) = v$. La formule devient

$$u(t,x) := u_0(x - tv).$$

- u est bien mesurable, il reste à voir que la classe de u presque partout ne dépend que de la classe de u_0 ... c'est essentiellement la définition de la mesure produit.
- On prend maintenant une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ et on calcule la quantité d'intérêt

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)(\partial_t \varphi + v \cdot \nabla \varphi)(t,x)\, dx\, dt$$
$$= - \int_{\mathbb{R}^d} u_0(y) \varphi(0,y)\, dy$$

C'est bien l'expression attendue

4. Solutions faibles des équations de transport

4.4. Unicité

Unicité des solutions faibles

Théorème

Pour toute donnée initiale $u_0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, il existe **au plus** *une solution faible u au problème de transport.*

Remarques

- On a montré l'existence d'une telle solution juste avant par la formule explicite.
- *In fine*, on a donc **existence et unicité** de la solution faible pour toute donnée initiale.
- Le problème est linéaire donc il suffit de montrer que

$$\Big(u_0 = 0 \text{ pour presque tt } x\Big) \Longrightarrow \Big(u = 0 \text{ pour presque tt } (t,x)\Big).$$

Unicité des solutions faibles

Preuve 1/2

On se donne donc $u \in L^1_{loc}([0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ telle que

$$0 = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)(\partial_t\varphi + v \cdot \nabla\varphi)(t,x)\, dx\, dt, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d). \quad (\star)$$

On veut montrer que $u = 0$.

Lemme

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1_c(]0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$ il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ telle que

$$\partial_t\varphi + v \cdot \nabla\varphi = \psi, \ \ \textit{pour } t > 0 \textit{ et } x \in \mathbb{R}^d.$$

Admettons le lemme pour l'instant.

- Dans ce cas, on peut remplacer dans $(\star)$ et obtenir

$$0 = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\psi(t,x)\, dx\, dt, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}^1_c(]0, +\infty[\times\mathbb{R}^d).$$

- Comme ceci est vrai pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1_c(]0, +\infty[\times\mathbb{R}^d)$, on en déduit que $u = 0$ (Lemme de Du Bois-Reymond).

Unicité des solutions faibles

Preuve 2/2

Il reste à montrer le lemme

Lemme

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1_c(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ *il existe* $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ *telle que*

$$\partial_t\varphi + v\cdot\nabla\varphi = \psi, \quad \textit{pour } t > 0 \textit{ et } x \in \mathbb{R}^d.$$

- On peut utiliser la formule établie plus haut Y aller !

$$\varphi(t,x) = \varphi_0(x - tv) + \int_0^t \psi(s, x + (s-t)v)\,ds.$$

- On effectue le changement de variable $y = x - tv$

$$\varphi_0(y) = \varphi(t, y + tv) - \int_0^t \psi(s, y + sv)\,ds,$$

- On veut φ à support compact, donc on peut faire tendre $t \to +\infty$

$$\varphi_0(y) = -\int_0^{+\infty} \psi(s, y + sv)\,ds.$$

Unicité des solutions faibles

Preuve 2/2

Il reste à montrer le lemme

Lemme

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}^1_c(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^d)$ *il existe* $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ *telle que*

$$\partial_t \varphi + v\cdot\nabla\varphi = \psi, \ \ \textit{pour } t > 0 \textit{ et } x \in \mathbb{R}^d.$$

- On a finalement obtenu la formule
$$\varphi(t,x) = -\int_t^{+\infty} \psi(s, x + (s-t)v)\, ds.$$
- Il reste à vérifier que cette formule définit bien une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact qui satisfait l'équation attendue.

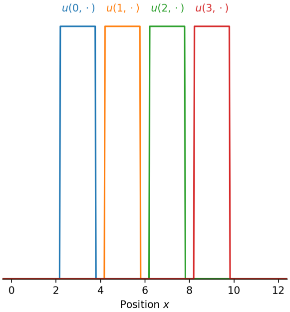
  C'est un calcul explicite élémentaire que vous êtes encouragés à faire.

Illustrations

On résout

$$\partial_t u + v \partial_x u = 0.$$

- Vitesse constante $v = 2$.
- u_0 = une indicatrice = $1_{[2.2,3.8]}$

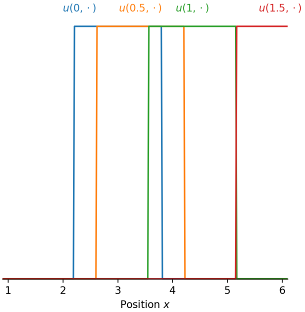


Illustrations

On résout

$$\partial_t u + v(t)\partial_x u = 0.$$

- Vitesse uniforme en espace $v(t) = 0.7 + 0.5t$.
- u_0 = une indicatrice $= 1_{[2.2,3.8]}$

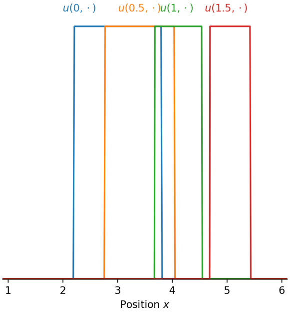


Illustrations

On résout

$$\partial_t u + v(t,x)\partial_x u = 0.$$

- Vitesse quelconque $v(t,x) = 0.7 + 0.5t + 0.5\sin(2x)$.
- u_0 = une indicatrice $= 1_{[2.2,3.8]}$

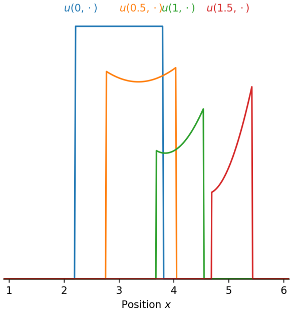


Illustrations

On résout

$$\partial_t u + v(t,x)\partial_x u + a(t,x)u = 0.$$

- Vitesse quelconque $v(t,x) = 0.7 + 0.5t + 0.5\sin(2x)$.
- Terme de réaction $a(t,x) = cos(2x)$
- u_0 = une indicatrice = $1_{[2.2,3.8]}$



Fin de la séance 9