Equations différentielles ordinaires
Equations aux dérivées partielles

Partie 1 : Equations différentielles ordinaires

Franck Boyer

`franck.boyer@math.univ-toulouse.fr`

Bureau 204 - Bât. 1R3

Master 1 Mathématiques - Enseignement Supérieur et Recherche

2019/2020

Institut de Mathématiques de Toulouse

Menu de l'UE

Plan général

- Partie 1 : Equations différentielles ordinaires
- Partie 2 : Equations de transport
- Partie 3 : Problèmes aux limites elliptiques

Evaluation

- Un devoir à la maison
- Un partiel
- Un examen terminal

- Note de CC $= 1/3\text{DM} + 2/3\text{P}$
- Note finale $= 0.4\text{CC} + 0.6\text{CT}$

Remarque

- Contenu de base
- Contenu plus avancé

Plan de la partie 1

Plan de la partie 1

Plan de la partie 1

Références

- Florent Berthelin, *Equations différentielles*, Cassini, 2017
- Sylvie Benzoni-Gavage, *Calcul différentiel et équations différentielles*, Dunod, 2010
- Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 1991.

- + Les notes de cours disponibles en ligne (**Attention, il y a du contenu avancé !)**

Conseils de travail

- Travailler le cours d'une séance sur l'autre.
- Ne pas hésiter à poser des questions, à demander des précisions.
    - En séance (cours et/ou TD)
    - En dehors des séances

1. Introduction

Introduction

EDO = Equations Différentielles Ordinaires

Equations qui relient une fonction inconnue et sa dérivée

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I. \tag{E}$$

$\leadsto$ f est donnée, on cherche x.

Vocabulaire

- t : variable de temps (convention !)
- $x(t)$: **état** du système à l'instant t
- $t \mapsto x(t)$: une trajectoire, une courbe intégrale, ...
- $f : I \times \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$: **champ de vecteurs**.
  C'est la fonction qui définit l'équation.
- Si $d = 1$: on parle d'une équation **scalaire**.
- Si le champ de vecteurs f ne dépend pas du temps : équation **autonome**

Introduction

EDO = Equations Différentielles Ordinaires

Equations qui relient une fonction inconnue et sa dérivée

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I. \tag{E}$$

$\rightsquigarrow$ f est donnée, on cherche x.

Questions

- Existence et unicité de solutions de (E) associées à une donnée initiale $x(t_0) = x_0$?
- Calcul explicite des solutions ?
- Comportement qualitatif ?
- Solutions périodiques ?
- Si deux données initiales sont *proches*, est-ce que les solutions sont proches ?

Introduction

EDO = Equations Différentielles Ordinaires

Equations qui relient une fonction inconnue et sa dérivée

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I. \tag{E}$$

$\rightsquigarrow$ f est donnée, on cherche x.

Attention !

- L'équation (E) est souvent écrite sous la forme

  $$x' = f(t, x).$$

  Dans cette écriture la lettre x désigne une fonction inconnue.
- *En revanche,* quand on définit le champ de vecteurs f la lettre x est juste un élément de l'espace d'états $\mathbb{R}^d$.

Exemple : $f(t, x) = \sin(t) + x * \cos(t + x)$, ici x est un nombre !.

Introduction

EDO = Equations Différentielles Ordinaires

Equations qui relient une fonction inconnue et sa dérivée

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in I. \tag{E}$$

$\rightsquigarrow$ f est donnée, on cherche x.

- **Equations non définies** :

$$x(t)^2 + x'(t)^2 = 1.$$

Recette : On se ramène à une équation définie (TFI ...)

- **Equations du second ordre** (ou d'ordre $n \geqslant 2$) :

$$x''(t) = g(t, x(t), x'(t)),$$

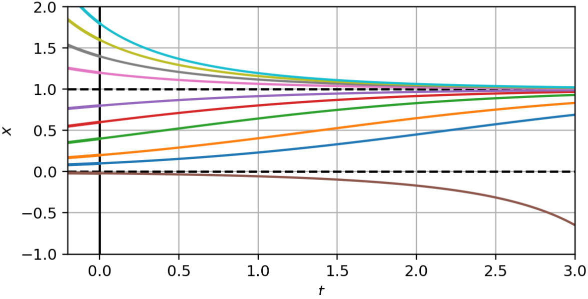
Recette : On se ramène à une équation d'ordre 1 dans $\mathbb{R}^{2d}$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ g(t, x(t), x'(t)) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} y_2(t) \\ g(t, y_1(t), y_2(t)) \end{pmatrix}$$

Représentations graphiques

- Equations scalaires :

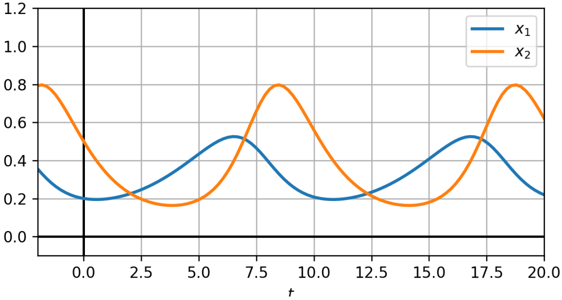
$$x' = x(1 - x)$$



Représentations graphiques

- Equations non scalaires :

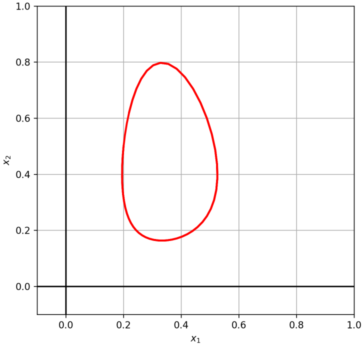
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1(0.4 - x_2) \\ -x_2(1 - 3x_1) \end{pmatrix}$$



Représentations graphiques

- Equations non scalaires :

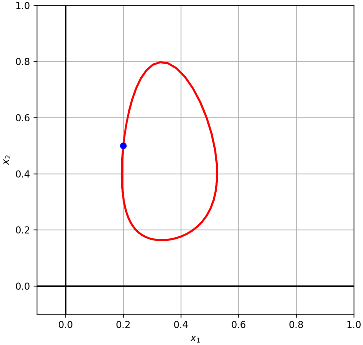
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1(0.4 - x_2) \\ -x_2(1 - 3x_1) \end{pmatrix}$$



Représentations graphiques

- Equations non scalaires :

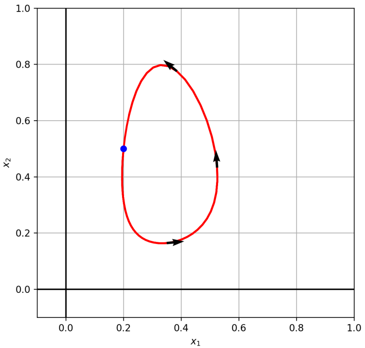
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1(0.4 - x_2) \\ -x_2(1 - 3x_1) \end{pmatrix}$$



Représentations graphiques

- Equations non scalaires :

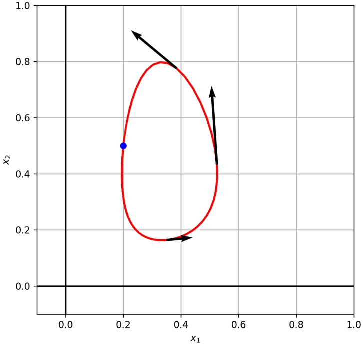
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1(0.4 - x_2) \\ -x_2(1 - 3x_1) \end{pmatrix}$$



Représentations graphiques

- Equations non scalaires :

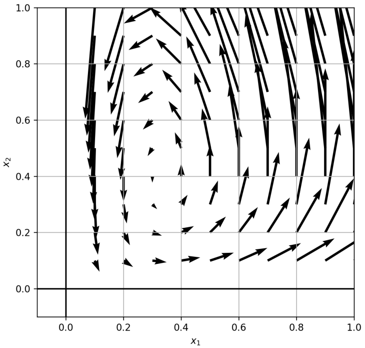
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x_1(0.4 - x_2) \\ -x_2(1 - 3x_1) \end{pmatrix}$$



Représentations graphiques

- Champ de vecteurs (autonomes)

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} x_1(0.4 - x_2) \\ -x_2(1 - 3x_1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

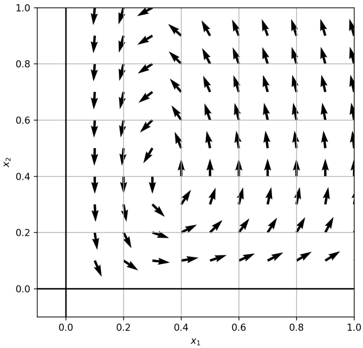


A retenir : Une solution $t \mapsto x(t)$ de (E) est une courbe dont la tangente en tout point est parallèle aux flèches !

Représentations graphiques

- Champ de vecteurs (autonomes)

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} x_1(0.4 - x_2) \\ -x_2(1 - 3x_1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

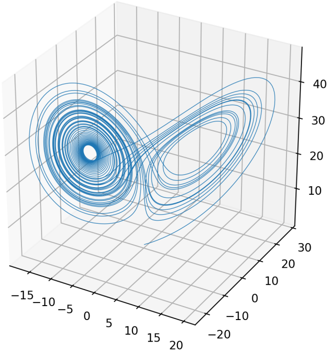


A retenir : Une solution $t \mapsto x(t)$ de (E) est une courbe dont la tangente en tout point est parallèle aux flèches !

Représentations graphiques

- Exemple de trajectoire en dimension 3 (Attracteur de Lorenz)

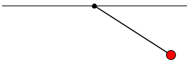
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 10(x_2 - x_1) \\ x_1(28 - x_3) - x_2 \\ x_1 x_2 - 8/3 x_3 \end{pmatrix}$$



Quelques exemples

Mécanique

$$\text{Pendule :} \quad \theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$



Quelques exemples

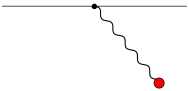
Mécanique

Pendule : $\theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$

Pendule linéarisé : $\theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0.$

Ressort "linéaire" : $l'' + k^2(l - l_0) = 0.$

Pendule-Ressort : $\begin{cases} \theta'' + 2\frac{l'}{l}\theta' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \\ l'' = l(\theta')^2 + g\cos(\theta) - \frac{k}{M}(l - l_0) \end{cases}$



Quelques exemples

Mécanique

$$\text{Pendule :}\quad \theta'' + \frac{g}{l}\sin\theta = 0,$$

$$\text{Pendule linéarisé :}\quad \theta'' + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

$$\text{Ressort “linéaire” :}\quad l'' + k^2(l - l_0) = 0.$$

$$\text{Pendule-Ressort :}\begin{cases} \theta'' + 2\dfrac{l'}{l}\theta' + \dfrac{g}{l}\sin(\theta) = 0 \\ l'' = l(\theta')^2 + g\cos(\theta) - \dfrac{k}{M}(l - l_0) \end{cases}$$

$$\text{Dynamique collective :}\begin{cases} x_i' = v_i \\ v_i' = \alpha \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{v_j - v_i}{\|x_i - x_j\|^2} \end{cases}$$

Astronomie ...

Ballistique ...

Quelques exemples

$$\text{Modèle de Malthus : } \quad N' = (b-d)N,$$

$$\text{Modèle logistique : } \quad N' = (b-d)N\left(1 - \frac{N}{N_{\max}}\right),$$

$$\text{Modèle proie-prédateurs (L-V) : } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix},$$

$$\text{Espèces en compétition : } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cy - dxy \end{pmatrix},$$

Modélisation du cancer ...

Quelques exemples

Equations de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Lien avec les solutions de l'EDO

$$x' = c(t,x).$$

Quelques exemples

Liens avec des Equations aux dérivées partielles

Equations de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Equation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Solutions à variables séparées $\quad u(t,x) = f(t)g(x)$

$$\begin{cases} f'(t) + \lambda f(t) = 0 \\ g''(x) + \lambda g(x) = 0 \end{cases}$$

Quelques exemples

Liens avec des Equations aux dérivées partielles

Equations de transport :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Equation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Modèle de réaction-diffusion (= chaleur + logistique) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u(1-u)$$

Solutions en onde progressive $u(t,x) = U(x-ct)$

$$cU' + U'' = U(1-U).$$

2. Quelques préliminaires

2. Quelques préliminaires

2.1. Fonctions lipschitziennes

Fonctions globalement lipschitziennes

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ et $f : A \mapsto \mathbb{R}^d$. On dit que f est (globalement) lipschitzienne s'il existe un nombre $L > 0$ tel que

$$\forall x, y \in A, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant L\|x - y\|.$$

Meilleure constante = **Constante de Lipschitz de** f = $\mathrm{Lip}(f)$

Propriétés de base

- Lipschitzien $\Rightarrow$ continu
- $\mathcal{C}^1$ à dérivée bornée dans un ouvert convexe $\Rightarrow$ Lipschitzien (**Acc. finis**)
- Pour culture : **Théorème de Rademacher :**
  Si f est Lipschitzienne, alors elle est différentiable presque partout et sa différentielle est bornée par $\mathrm{Lip(f)}$.

Fonctions globalement lipschitziennes

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ et $f : A \mapsto \mathbb{R}^d$. On dit que f est (globalement) lipschitzienne s'il existe un nombre $L > 0$ tel que

$$\forall x, y \in A, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant L\|x - y\|.$$

Meilleure constante = **Constante de Lipschitz de f** = $\mathrm{Lip}(f)$

Exemples (non nécessairement différentiables)

- $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ ou $x \in \mathbb{R}^m \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$.
- L'application *distance à un ensemble B* :

$$x \mapsto d(x, B) = \inf_{y \in B} \|x - y\|.$$

- La projection (orthogonale) sur un convexe fermé $K \subset \mathbb{R}^d$,

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto P_K x \in \mathbb{R}^d.$$

Prolongement lipschitzien

Théorème

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ et $f : A \to \mathbb{R}^d$ une fonction globalement lipschitzienne sur A, alors il existe une fonction $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ qui vérifie :

- $F_{|A} = f$.
- *F est globalement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^m$.*

Si de plus f est bornée sur A, on peut choisir F bornée sur $\mathbb{R}^m$.

Preuve :

- **Cas scalaire :** Si $d = 1$, on pose
$$F(x) := \inf_{y \in A} \Big(f(y) + L\|x - y\| \Big),$$
où $L = \mathrm{Lip}(f)$.
- **Cas général :** On fait la construction précédente pour chaque composante.

Fonctions localement lipschitziennes

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ et $f : A \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On dit que f est **localement lipschitzienne** *sur A si :*

Pour tout point $x_0 \in A$, il existe un ouvert U de A contenant x_0 tel que f est lipschitzienne sur U.

Remarques

- La constante de Lipschitz de f sur U dépend de U (et de x_0 !).
- Une version avec des ϵ et des δ

$$\begin{aligned}
&\forall x_0 \in A, \exists \delta_{x_0} > 0, L_{x_0} > 0\\
&\qquad \forall x, y \in A, \text{ tels que } \|x - x_0\| < \delta_{x_0}, \|y - x_0\| < \delta_{x_0},\\
&\qquad\qquad \|f(x) - f(y)\| \leqslant L_{x_0}\|x - y\|.
\end{aligned}$$

- Localement Lipschitz $\Rightarrow$ continu
- $\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ localement Lipchitz

Fonctions localement lipschitziennes

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ et $f : A \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On dit que f est **localement lipschitzienne** *sur A si :*

Pour tout point $x_0 \in A$, il existe un ouvert U de A contenant x_0 tel que f est lipschitzienne sur U.

Remarques

- La constante de Lipschitz de f sur U dépend de U (et de x_0 !).
- Une version avec des ϵ et des δ

$$\forall x_0 \in A, \exists \delta > 0, L > 0$$
$$\forall x, y \in A, \text{ tels que } \|x - x_0\| < \delta, \|y - x_0\| < \delta,$$
$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant L\|x - y\|.$$

- Localement Lipschitz $\Rightarrow$ continu
- $\mathcal{C}^1 \Rightarrow$ localement Lipchitz

Fonctions localement lipschitziennes

Caractérisation utile

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert et $f : A \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On a l'équivalence

$$f \text{ est localement lipschitzienne sur } A \iff \text{Pour tout compact } K \subset A,\ f \text{ est lipschitzienne sur } K.$$

Preuve :

- $\Leftarrow$ Pour tout $x_0 \in A$, il existe $\delta > 0$ tel que $K = \overline{B}(x_0, \delta)$ est compact et inclus dans A.
- $\Rightarrow$ On raisonne par l'absurde.

Fonctions localement lipschitziennes

Caractérisation utile

Proposition

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert et $f : A \to \mathbb{R}^d$ une fonction. On a l'équivalence

f est localement lipschitzienne sur A

$$\iff$$

Pour tout compact $K \subset A$, f est lipschitzienne sur K.

Proposition (loc. Lipschitz vs. glob. Lipschitz)

Soit $A \subset \mathbb{R}^m$ un ouvert et $f : A \to \mathbb{R}^d$ une fonction localement lipschitzienne.

Pour tout compact $K \subset A$, il existe une fonction globalement lipschitzienne f_K sur $\mathbb{R}^m$ telle que

$$f_K = f, \text{ sur } K.$$

2. Quelques préliminaires

2.2. Champs de vecteurs

Champs de vecteurs

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On appelle **champ de vecteurs**, *une application*

$$f : (t, x) \in I \times \Omega \to f(t, x) \in \mathbb{R}^d.$$

- *t est la variable de temps.*
- *x est la variable d'état.*

Si f ne dépend pas du temps, on dit qu'il est autonome.

Dans tout ce cours, on ne considère que des champs de vecteurs au moins continus.

Champs de vecteurs

Définition

On dit qu'un champ de vecteurs continu $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ *est* **globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état** *s'il existe une fonction continue* $L : t \in I \to L(t) \in \mathbb{R}^+$ *telle que*

Pour tout $t \in I$*, la fonction* $f(t, \cdot)$ *est* $L(t)$*-lipschtizienne sur* Ω*.*

Autrement dit,

$$\forall t \in I, \forall x_1, x_2 \in \Omega, \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant L(t)\|x_1 - x_2\|.$$

Remarque : Pas de régularité par rapport à la variable de temps.

Vocabulaire standard mais dangereux

On dit parfois que f est globalement lipschitzien par rapport à **la seconde variable**.

Champs de vecteurs

Définition

On dit qu'un champ de vecteurs continu $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ *est* **globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état** *s'il existe une fonction continue* $L : t \in I \to L(t) \in \mathbb{R}^+$ *telle que*

Pour tout $t \in I$*, la fonction* $f(t, \cdot)$ *est* $L(t)$*-lipschtizienne sur* Ω.

Autrement dit,

$$\forall t \in I, \forall x_1, x_2 \in \Omega, \quad \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant L(t)\|x_1 - x_2\|.$$

Remarque : Pas de régularité par rapport à la variable de temps.

Exemple fondamental : champs de vecteurs linéaires

$$f(t, x) = A(t)x + b(t),$$

avec $t \mapsto A(t) \in M_d(\mathbb{R})$ et $t \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^d$ continues.

Champs de vecteurs

Définition

On dit qu'un champ de vecteurs continu $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ *est* **localement lipschitzien par rapport à la variable d'état** *si :*

pour tout $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$*, il existe* $L > 0$*,* $\delta > 0$*, un voisinage ouvert* U *de* x_0 *tels que*

pour tout $t \in I \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$,

la fonction $f(t, \cdot)$ *est* L*-lipschtizienne sur* U.

Ceci s'exprime aussi sous la forme

$$\forall t \in I \cap [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \forall x_1, x_2 \in U, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|.$$

Champs de vecteurs

Proposition

Un champ de vecteurs continu f est localement lipschitzien par rapport à la variable d'état si et seulement si :

pour tout compact $\mathcal{K} \subset I \times \Omega$, il existe $L > 0$ telle que

$$\forall t \in I, x_1, x_2 \in \Omega, \quad \textit{tels que } (t, x_1) \in \mathcal{K} \textit{ et } (t, x_2) \in \mathcal{K}$$
$$\textit{on a } \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant L\|x_1 - x_2\|.$$

Différence entre les deux visions :

- Un voisinage peut être extrêmement petit.
- Un compact peut être très gros (dans une certaine mesure bien entendu).

Champs de vecteurs

Corollaire

Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ *un champ de vecteurs continu et* **localement lipschitzien par rapport à la variable d'état**, K *un compact de* Ω *et* $[a, b]$ *un sous-intervalle compact de* I.

Il existe un champ de vecteurs $\widetilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *continu et* **globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état** *tel que*

$$\widetilde{f} = f, \;\; \textit{sur } [a, b] \times K.$$

Fin de la séance 1

2. Quelques préliminaires

2.3. Lemme de Gronwall

Equations différentielles linéaires scalaires

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et $t \in I \mapsto a(t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue.

Si $x : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'équation

$$x'(t) = a(t)x(t), \quad \forall t \in I,$$

alors on a

$$x(t) = x(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau)\, d\tau\right), \quad \forall t, s \in I.$$

Remarque : La connaissance de $x(s)$ pour un s donné suffit à déterminer x sur tout l'intervalle I.

Inéquations différentielles linéaires scalaires

Proposition

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide et $t \in I \mapsto a(t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$.

*Si x vérifie l'***inégalité différentielle** *suivante*

$$x'(t) \leqslant a(t)x(t), \quad \forall t \in I,$$

alors on a

$$x(t) \leqslant x(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau)\, d\tau\right), \quad \forall t, s \in I, \ t.q.\ t \geqslant s,$$

$$x(t) \geqslant x(s) \exp\left(\int_s^t a(\tau)\, d\tau\right), \quad \forall t, s \in I, \ t.q.\ t \leqslant s.$$

Remarque : La connaissance de $x(s)$ pour un s donné donne une majoration de $x(t)$ pour $t \geqslant s$ et une minoration pour $t \leqslant s$.

Lemme de Gronwall

Théorème

Soit I un intervalle non vide, $t \in I \mapsto a(t) \in \mathbb{R}$ une fonction **positive** *et $C \in \mathbb{R}$ une constante.*

Si $x : I \to \mathbb{R}$ est une fonction **continue** *qui vérifie, pour un certain $s \in I$, la propriété suivante :*

$$x(t) \leqslant C + \int_s^t a(\tau)x(\tau)d\tau, \quad \forall t \in I, \ t.q.\ t \geqslant s,$$

alors nous avons l'inégalité

$$x(t) \leqslant C \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right), \quad \forall t \in I, \ t.q.\ t \geqslant s.$$

Premier résultat fondamental de ce chapitre

Lemme de Gronwall généralisé

Théorème

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction **positive** *et $b : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.*

Si $x : I \to \mathbb{R}$ est une fonction **continue** *qui vérifie, pour un certain $s \in I$, la propriété suivante :*

$$x(t) \leqslant b(t) + \int_s^t a(\tau)x(\tau)d\tau, \quad \forall t \in I, \ t.q. \ t \geqslant s,$$

alors nous avons l'inégalité

$$x(t) \leqslant b(t) \exp\left(\int_s^t a(\tau)d\tau\right), \quad \forall t \in I, \ t.q. \ t \geqslant s.$$

3. Théorème de Cauchy-Lipschitz global et applications

3. Théorème de Cauchy-Lipschitz global et applications

3.1. Définitions

Problème de Cauchy pour une EDO

Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$.

$$\textbf{Problème de Cauchy} \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{C}$$

Le couple (t_0, x_0) est appelée **donnée de Cauchy**.

Problème de Cauchy pour une EDO

Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$.

Problème de Cauchy $$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

Le couple (t_0, x_0) est appelée **donnée de Cauchy**.

Définition

Une **solution** *du problème de Cauchy* (C) *est* **un couple** (J, x) *où*

- $J \subset I$ *est un intervalle contenant* t_0
- $x : J \to \Omega$ *est une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *vérifiant* $x(t_0) = x_0$ *et*

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad \forall t \in J.$$

Définition

- (J, x) *est une* **solution maximale** **:** *s'il n'existe pas de solution* $(\tilde{J}, \tilde{x})$ *qui prolonge strictement* (J, x).
- (J, x) *est une* **solution globale** **:** *si* $J = I$.

Problème de Cauchy pour une EDO

Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs, $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$.

$$\textbf{Problème de Cauchy} \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{(C)}$$

Le couple (t_0, x_0) est appelée **donnée de Cauchy**.

Remarque

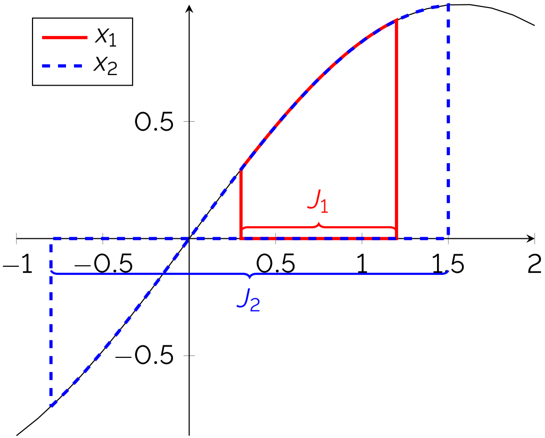
Si f est autonome, l'instant initial t_0 n'a pas d'importance :

$$(J, x) \text{ est solution de } \begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(J - t_0, t \mapsto x(t + t_0)) \text{ est solution de } \begin{cases} y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = x_0 \end{cases}$$

Notion de solution maximale



La solution (J_1, x_1) n'est pas maximale car (J_2, x_2) en est un prolongement strict.

Notion de solution maximale

Un exemple scalaire $\begin{cases} x' = x^2, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

Solutions maximales **non globales**

- Si $x_0 = 0$:

$$(\mathbb{R}\,,\ t \mapsto 0).$$

- Si $x_0 > 0$:

$$\left(\left]-\infty, \frac{1}{x_0}\right[\ ,\ t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \right).$$

- Si $x_0 < 0$:

$$\left(\left]\frac{1}{x_0}, +\infty\right[\ ,\ t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{x_0} - t} \right).$$

A retenir

L'intervalle de définition d'une solution maximale dépend de la donnée de Cauchy.

Formulation intégrale d'un problème de Cauchy

Soit $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs (au moins) continu.

Proposition (Formulation intégrale d'un problème de Cauchy)

Soit $J \subset I$ un intervalle, $t_0 \in J$ et $x_0 \in \Omega$. On se donne une fonction $x : J \to \Omega$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *x est* **de classe** $\mathcal{C}^1$ *et vérifie*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x), \quad \forall t \in J, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

2. *x est* **continue** *et vérifie*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\,ds, \quad \forall t \in J.$$

3. Théorème de Cauchy-Lipschitz global et applications

3.2. Enoncé et preuve du théorème

Enoncé du théorème principal

Théorème (Cauchy-Lipschitz global)

On suppose que le champ de vecteurs $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continu et **globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état***.*

Alors, pour toute donnée de Cauchy (t_0, x_0), il **existe** *une* **unique** *solution* **globale** *(I, x) du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

De plus, toute autre solution $(J, \tilde{x})$ de ce problème de Cauchy est la restriction à J de x.

Plan de la preuve :

1. Unicité
2. Borne *a priori*
3. Choix d'un espace fonctionnel
4. Mise sous la forme d'un problème de point fixe $\Rightarrow$ Existence

Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz global

Etape 1/4 : Unicité

- Soient (J_1, x_1) et (J_2, x_2) deux solutions du même pb de Cauchy. On pose $J = J_1 \cap J_2$.
- La différence $z = x_1 - x_2$ vérifie

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \big(f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\big)\, ds, \quad \forall t \in J.$$

- Pour $t \in J$, $t \geqslant t_0$

$$\|z(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_1(s)) - f(s, x_2(s))\|\, ds.$$

- On utilise l'hypothèse sur f :

$$\|z(t)\| \leqslant \int_{t_0}^{t} L(s)\|x_1(s) - x_2(s)\|\, ds = 0 + \int_{t_0}^{t} L(s)\|z(s)\|\, ds.$$

- On utilise le lemme de Gronwall (avec $C = 0$)

$$\|z(t)\| \leqslant 0 \times \exp\left(\int_{t_0}^{t} L(s)\, ds\right), \ \forall t \geqslant t_0 \quad \Rightarrow \boxed{z = 0 \text{ sur } J \cap [t_0, +\infty[.}$$

Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz global

Etape 2/4 : Estimation *a priori*

On **suppose** qu'une solution (I, x) existe et on veut estimer sa taille.

- On part de la formulation intégrale

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

- On introduit (un peu arbitrairement)

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds + \int_{t_0}^{t} \big(f(s, x(s)) - f(s, x_0)\big)\, ds, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

- On utilise l'hypothèse sur f et $t \geqslant t_0$

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\|\, ds + \int_{t_0}^{t} L(s)\|x(s) - x_0\|\, ds, \quad \forall t \geqslant t_0.$$

- Le lemme de Gronwall généralisé nous donne

$$\boxed{\|x(t) - x_0\| \leqslant \left(\int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0)\|\, ds \right) \exp\left(\int_{t_0}^{t} L(s)\, ds \right), \quad \forall t \geqslant t_0.}$$

Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz global

Proposition

S'il existe une solution globale (I,x) au problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

alors celle-ci vérifie

$$\boxed{\|x(t)\| \leqslant \varphi(t)e^{\psi(t)},\ \forall t \in I.}$$

avec

$$\varphi(t) := 1 + \|x_0\| + \left|\int_{t_0}^{t} \|f(s,x_0)\|\, ds\right|, \forall t \in I,$$

$$\psi(t) := \left|\int_{t_0}^{t} L(s)\, ds\right|,\ \forall t \in I.$$

Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz global

Etape 3/4 : Choix d'un espace fonctionnel

Conséquence de l'estimation *a priori*

Toute solution doit vérifier $\sup_{t\in I}\left(\varphi^{-1}(t)e^{-\psi(t)}\|x(t)\|\right) \leqslant 1.$

Idée naturelle : Introduire l'espace fonctionnel

$$\left\{z \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^d),\ \ \sup_{t\in I}\left(\varphi^{-1}(t)e^{-\psi(t)}\|z(t)\|\right) < +\infty\right\}.$$

Il faut prendre un peu de marge de manoeuvre :

$$E := \left\{z \in \mathcal{C}^0(I,\mathbb{R}^d),\ \ \|z\|_E := \sup_{t\in I}\left(\varphi^{-1}(t)e^{-2\psi(t)}\|z(t)\|\right) < +\infty\right\}.$$

Proposition

L'espace $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach.

Preuve (Exo) : Idem que pour la complétude de $(\mathcal{C}^0_b(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$.

Preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz global

Etape 4/4 : Problème de point fixe

Pour tout $z \in E$, on pose $$\boxed{\big(\theta(z)\big)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))\, ds, \quad \forall t \in I.}$$

- Fait numéro 1 : $\theta(x_0) = \theta(t \mapsto x_0) \in E$

$$\big(\theta(x_0)\big)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_0)\, ds.$$

- Fait numéro 2 : soient $z, \tilde{z} \in E$

$$\|\big(\theta(z)\big)(t) - \big(\theta(\tilde{z})\big)(t)\| \leqslant \frac{1}{2} \|z - \tilde{z}\|_E \varphi(t) e^{2\psi(t)}, \quad \forall t \in I.$$

- Conclusions :
    - On a $\theta(E) \subset E$.
    - θ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne dans $(E, \|.\|_E)$.
- On applique le **théorème du point-fixe de Banach**

$$\Longrightarrow \exists! x \in E, \text{ tel que } \theta(x) = x.$$

Cette fonction x est la solution recherchée du pb de Cauchy.

3. Théorème de Cauchy-Lipschitz global et applications

3.3. Equations différentielles linéaires

Equations différentielles linéaires

Définition

Une EDO linéaire est une équation de la forme

$$x' = A(t)x + b(t),$$

où $t \in I \mapsto A(t) \in M_d(\mathbb{R})$ *et* $t \in I \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^d$ *sont des applications continues. Si* $b \equiv 0$ *on dit que l'équation est homogène.*

D'autres versions ...

- Tout s'adapte sans difficulté dans $\mathbb{C}$.
- Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel (ou $\mathbb{C}$-e.v. ...) de dimension finie on peut tout adapter à l'équation

$$x'(t) = u(t).x(t) + b(t),$$

  où $b : I \to E$ et $u : I \to L(E)$ sont des applications continues.
- Et même si E est un espace de Banach de dimension infinie ...

Equations différentielles linéaires

Définition

Une EDO linéaire est une équation de la forme

$$x' = A(t)x + b(t),$$

où $t \in I \mapsto A(t) \in M_d(\mathbb{R})$ *et* $t \in I \mapsto b(t) \in \mathbb{R}^d$ *sont des applications continues. Si* $b \equiv 0$ *on dit que l'équation est homogène.*

Théorème (Cauchy-Lipschitz linéaire)

Pour tout donnée initiale $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^d$*, il* **existe** *une* **unique** *solution* **globale** (I, x) *au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

Preuve : Le champ de vecteurs $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ est continu et globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état.

Equations différentielles linéaires

Lemme (Equation homogène)

Soient $x_1, ..., x_m : I \to \mathbb{R}^d$ des solutions de l'équation différentielle homogène $x' = A(t)x$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *Pour tout $t \in I$, $(x_1(t), ..., x_m(t))$ est libre dans $\mathbb{R}^d$.*
2. *Il existe un $t^* \in I$ tel que $(x_1(t^*), ..., x_m(t^*))$ est libre dans $\mathbb{R}^d$.*
3. *$(x_1, ..., x_m)$ est libre dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$.*

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. Immédiat.

2. $\Rightarrow$ 3. Immédiat.

3. $\Rightarrow$ 1. On raisonne par contraposée et unicité dans Cauchy-Lipschitz.

Lemme (Equation homogène)

Soient $x_1, \ldots, x_m : I \to \mathbb{R}^d$ des solutions de l'équation différentielle homogène $x' = A(t)x$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *Pour tout $t \in I$, $(x_1(t), \ldots, x_m(t))$ est libre dans $\mathbb{R}^d$.*
2. *Il existe un $t^* \in I$ tel que $(x_1(t^*), \ldots, x_m(t^*))$ est libre dans $\mathbb{R}^d$.*
3. *$(x_1, \ldots, x_m)$ est libre dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^d)$.*

Corollaire

L'ensemble S_0 de toutes les solutions de l'équation homogène $x' = A(t)x$ est un espace vectoriel de dimension d.

Pour tout b, l'ensemble S_b de toutes les solutions de l'équation $x' = A(t)x + b(t)$ est un espace affine de dimension d dirigé par S_0.

Fin de la séance 2

Equations différentielles linéaires

Formules explicites 1/2

- Equation linéaire homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La solution est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Preuve : Calcul explicite des itérées de Picard ...

Rappel : exponentielle de matrice

Si $M \in M_d(\mathbb{R})$,

$$e^M = \sum_{k \geqslant 0} \frac{M^k}{k!}.$$

Equations différentielles linéaires

Formules explicites 1/2

- Equation linéaire homogène à coefficients constants

$$\begin{cases} x' = Ax, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La solution est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Equation non-homogène associée

$$\begin{cases} x' = Ax + b(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Proposition (Formule de Duhamel / Variation de la constante)

L'unique solution du problème de Cauchy ci-dessus est donnée par

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\,ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Equations différentielles linéaires

Formules explicites 2/2

- Equation linéaire **scalaire**

$$\begin{cases} x' = a(t)x, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La solution est donnée par

$$x(t) = e^{\int_0^t a(\tau)\, d\tau} x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Equation non-homogène associée

$$\begin{cases} x' = a(t)x + b(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Proposition (Formule de Duhamel / Variation de la constante)

$$x(t) = e^{\int_0^t a(\tau)\, d\tau} x_0 + \int_0^t e^{\int_s^t a(\tau)\, d\tau} b(s)\, ds, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Equations différentielles linéaires

Formules explicites 2/2

- Equation linéaire **scalaire**

$$\begin{cases} x' = a(t)x, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

La solution est donnée par

$$x(t) = e^{\int_0^t a(\tau)\, d\tau} x_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

ATTENTION

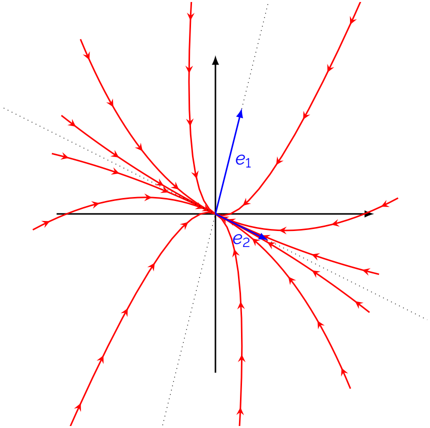
En général, en dimension $d > 1$,

$$t \mapsto \exp\left(\int_0^t A(\tau) d\tau\right).x_0,$$

n'est pas solution de $x' = A(t)x$.

Noeud stable

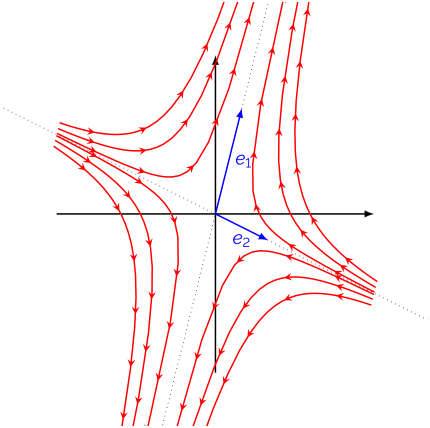
- A est diagonalisable
- $0 > \lambda_2 > \lambda_1$.



Equations différentielles linéaires

Point-selle

- A est diagonalisable
- $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$.

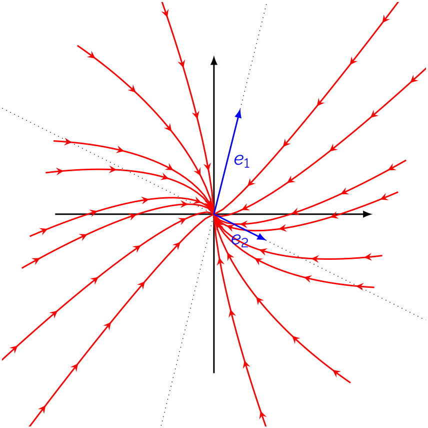


Equations différentielles linéaires

$x' = Ax$: **Portraits de phase** 2×2

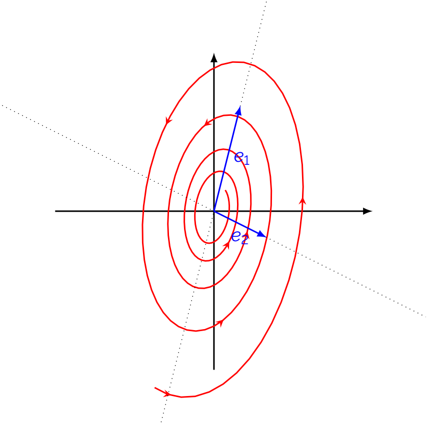
Noeud dégénéré stable

- A **non diagonalisable**
- $0 > \lambda_1 = \lambda_2$.
- $Ae_1 = \lambda_1 e_1$.
- $Ae_2 = \lambda_2 e_2 + e_1$.



Foyer stable

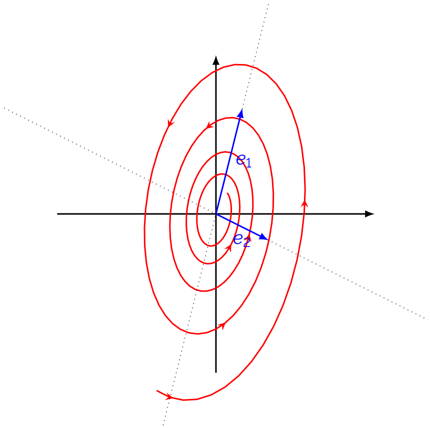
- A a des v.p. complexes
- $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$.
- $\alpha = \mathcal{R}e(\lambda_{\pm}) < 0$.
- $A(e_1 \pm ie_2) = \lambda_{\pm}(e_1 \pm ie_2)$.



Equations différentielles linéaires

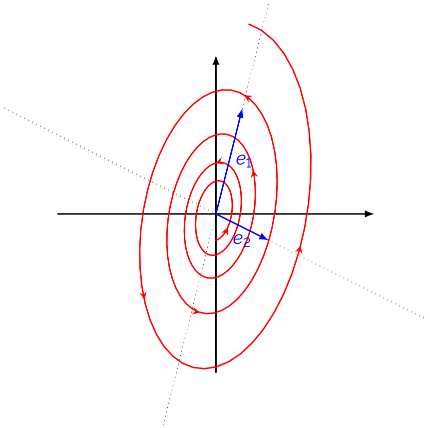
Foyer stable

- A a des v.p. complexes
- $\lambda_{\pm} = \alpha \pm i\beta$.
- $\alpha = \mathcal{R}e(\lambda_{\pm}) < 0$.
- $A(e_1 \pm ie_2) = \lambda_{\pm}(e_1 \pm ie_2)$.



Foyer instable

- A a des v.p. complexes
- $\lambda_\pm = \alpha \pm i\beta$.
- $\alpha = \mathcal{R}e(\lambda_\pm) > 0$.
- $A(e_1 \pm ie_2) = \lambda_\pm(e_1 \pm ie_2)$.

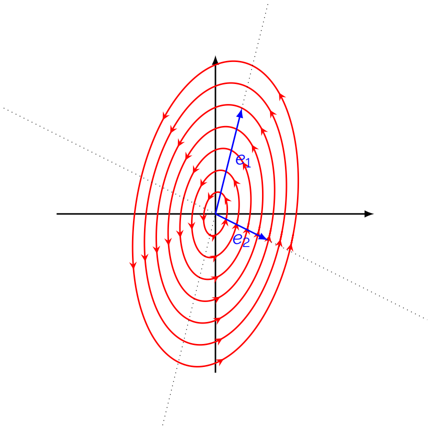


Equations différentielles linéaires

$x' = Ax$: Portraits de phase 2×2

Centre

- A a des v.p. complexes
- $\lambda_\pm = 0 \pm i\beta$.
- $\mathcal{R}e(\lambda_\pm) = 0$.
- $A(e_1 \pm ie_2) = \lambda_\pm(e_1 \pm ie_2)$.



3. Théorème de Cauchy-Lipschitz global et applications

3.4. Flot d'un champ de vecteurs

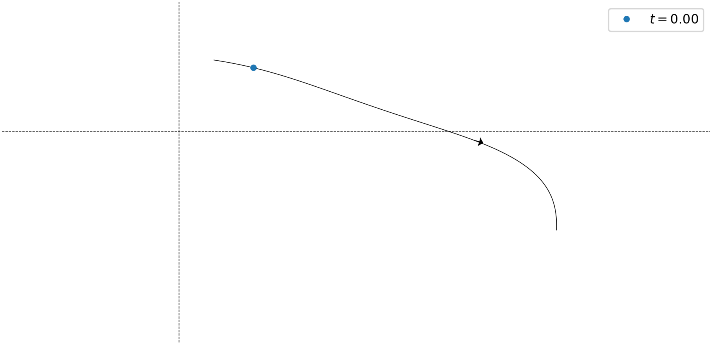
Flot d'un champ de vecteurs

But

Etude globale des solutions d'une EDO

vs.

Etude de chaque trajectoire



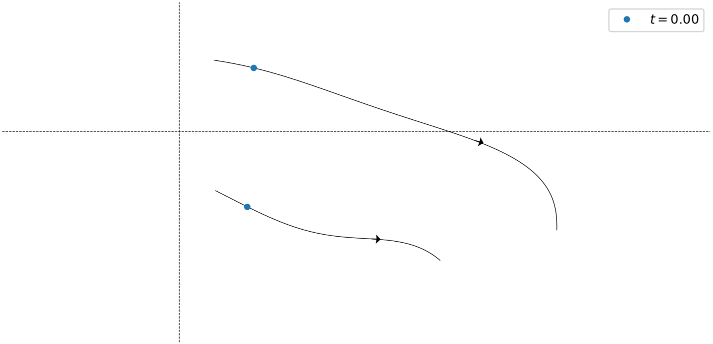
Flot d'un champ de vecteurs

But

Etude globale des solutions d'une EDO

vs.

Etude de chaque trajectoire



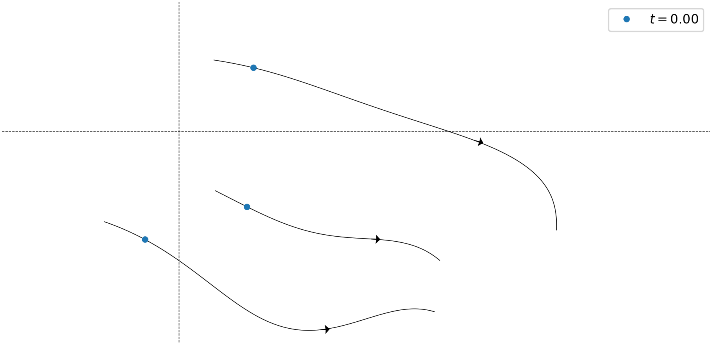
Flot d'un champ de vecteurs

But

Etude globale des solutions d'une EDO

vs.

Etude de chaque trajectoire



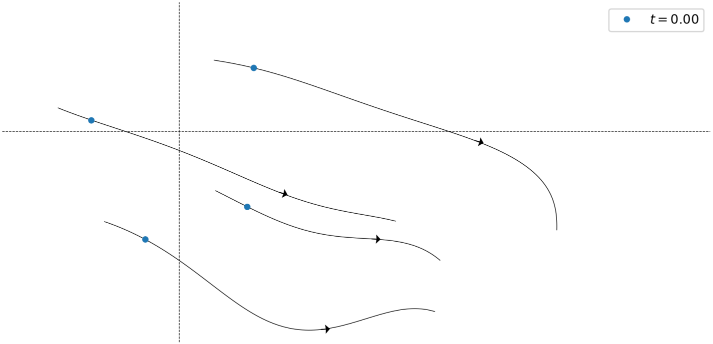
Flot d'un champ de vecteurs

But

Etude globale des solutions d'une EDO

vs.

Etude de chaque trajectoire



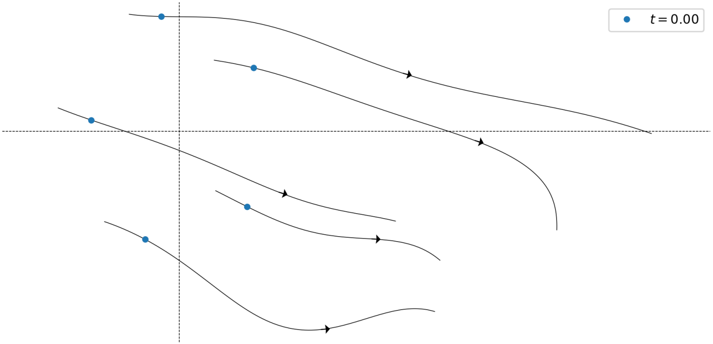
Flot d'un champ de vecteurs

But

Etude globale des solutions d'une EDO

vs.

Etude de chaque trajectoire



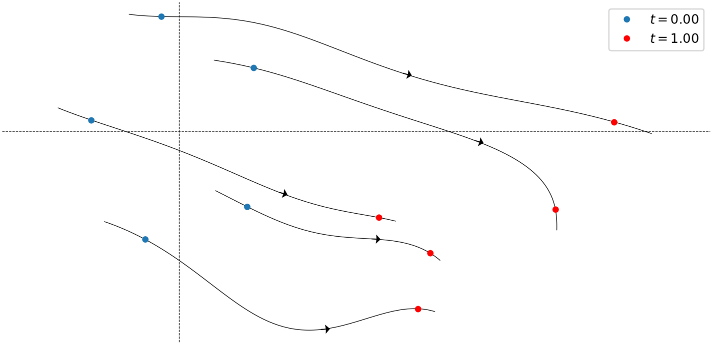
Flot d'un champ de vecteurs

But

Etude globale des solutions d'une EDO

vs.

Etude de chaque trajectoire



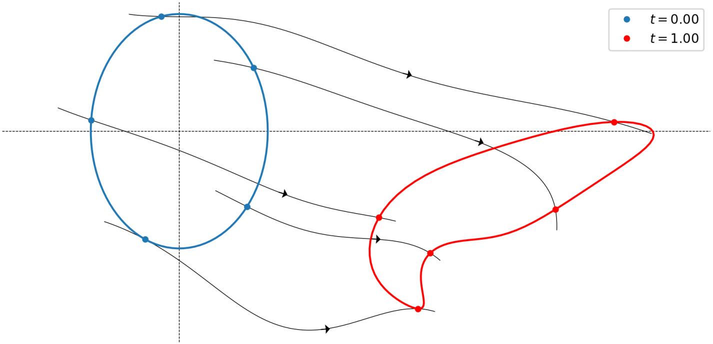
Flot d’un champ de vecteurs

But

Etude globale des solutions d’une EDO

vs.

Etude de chaque trajectoire



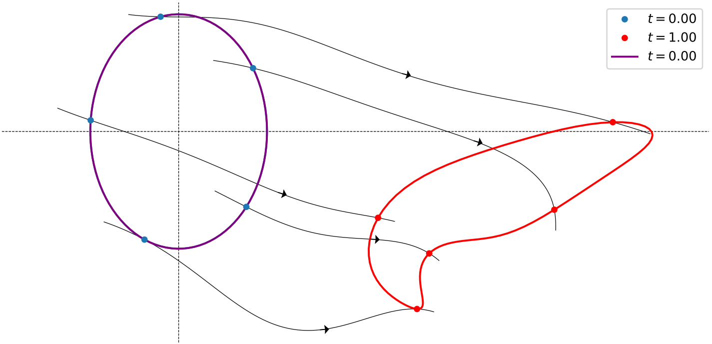
Flot d'un champ de vecteurs

But

Etude globale des solutions d'une EDO

vs.

Etude de chaque trajectoire



Flot d'un champ de vecteurs

On se donne $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continu et globalement lipschitzien par rapport à la variable d'état.

Définition

Pour tout $t_0 \in I$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$, on note

$$t \in I \mapsto \varphi(t, t_0, x_0)$$

l'unique solution (globale) du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

L'application $(t, t_0, x_0) \in I \times I \times \mathbb{R}^d \longmapsto \varphi(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^d$, est appelée **le flot associé au champ de vecteurs** *f.*

Définition

L'application $\Phi(t, t_0) : x_0 \in \mathbb{R}^d \mapsto \varphi(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^d$, est appelée le **flot entre les instants** *t_0* **et** *t.*

Flot d'un champ de vecteurs

Théorème (Propriété de groupe du flot)

Pour tous $t_0, t_1, t_2 \in I$, on a

$$\Phi(t_0, t_0) = \mathrm{Id},$$

$$\Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1) \circ \Phi(t_1, t_0).$$

En particulier, pour tous $t_0, t_1 \in I$, $\Phi(t_1, t_0)$ est bijectif et

$$\Phi(t_1, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t_1).$$

Preuve : Unicité dans Cauchy-Lipschitz.

Proposition (Continuité du flot 1)

Pour tous $t_0, t_1 \in I$, le flot $\Phi(t_1, t_0)$ est **lipschitzien***.*

Preuve : Lemme de Gronwall.

Flot d'un champ de vecteurs

Propriétés 2/3

Théorème (Continuité du flot 2)

Le flot

$$\varphi : (t, t_0, x_0) \in I \times I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d,$$

est localement lispchitzien par rapport à toutes ses variables.

Preuve :

- Encore et toujours le lemme de Gronwall ... mais c'est un peu plus délicat ...

Continuité du flot par rapport aux paramètres

On suppose que le champ de vecteurs dépend d'un paramètre α

$$(t, x, \alpha) \in I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \mapsto f(t, x, \alpha) \in \mathbb{R}^d.$$

Théorème

Si f est continu et globalement lipschitzien par rapport aux variables (x, α) alors le flot associé

$$(t, t_0, x_0, \alpha) \in I \times I \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^p \longmapsto \varphi(t, t_0, x_0, \alpha) \in \mathbb{R}^d,$$

est localement lipschitzien par rapport à toutes ses variables.

Application : Méthode de tir.

Fin de la séance 3

Flot d'un champ de vecteurs

Propriétés 3/3

Théorème (Différentiabilité du flot)

Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs continu, globalement lipschitzien et $\mathcal{C}^1$ par rapport à la variable d'état.

- *Pour tous $t, t_0 \in I$, le flot $\Phi(t, t_0) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est de classe $\mathcal{C}^1$.*
- *Pour tous t_0 et x_0, l'application* jacobienne

$$t \mapsto D\big(\Phi(t, t_0)\big)(x_0) \in M_d(\mathbb{R})$$

est l'unique solution du problème de Cauchy **linéaire** *matriciel*

$$\begin{cases} M'(t) = \big(D_x f\big)(t, \varphi(t, t_0, x_0)).M(t), \\ M(t_0) = \mathrm{Id}. \end{cases}$$

Preuve :

- Formule de Taylor et lemme de Gronwall ...

4. Théorème de Cauchy-Lipschitz local

4. Théorème de Cauchy-Lipschitz local

4.1. Enoncé(s)

Théorème de Cauchy-Lipschitz local - version 1

On se donne un espace d'états $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs continu et **localement lipschitzien** par rapport à la variable d'état.

Théorème

Pour toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$, il **existe** *un $\delta > 0$ (dépendant des données !) tel qu'il existe une* **unique** *solution x du problème de Cauchy définie sur l'intervalle $J_\delta :=]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap I$.*

Corollaire

Soient (J_1, x_1) et (J_2, x_2) deux solutions de l'équation $x' = f(t, x)$ telles que $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *Il existe $t^* \in J_1 \cap J_2$ tel que $x_1(t^*) = x_2(t^*)$.*
2. *Les deux fonctions x_1 et x_2 coïncident sur tout $J_1 \cap J_2$.*

Théorème de Cauchy-Lipschitz local - version 2

On se donne un espace d'états $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs continu et **localement lipschitzien** par rapport à la variable d'état.

Théorème

Pour toute donnée de Cauchy $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ il existe une **unique solution maximale** (J, x) *au problème de Cauchy.*

De plus,

- *J est un ouvert de I.*
- *Toute autre solution $(\tilde{J}, \tilde{x})$ de ce même problème de Cauchy vérifie $\tilde{J} \subset J$ et $\tilde{x}$ est la restriction de x sur $\tilde{J}$.*

4. Théorème de Cauchy-Lipschitz local

4.2. Preuves

Preuve de la version 1

1. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon = \big([t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \cap I\big) \times \overline{B}(x_0, \varepsilon)$ est compact et contenu dans $I \times \Omega$.
2. Soit $f_\varepsilon : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continu et **globalement lipschitzien** t.q.
$$f_\varepsilon = f, \quad \text{sur } K_\varepsilon.$$
3. On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz **global** à f_ε :
Il existe une solution globale $(\mathbb{R}, x_\varepsilon)$ de
$$\begin{cases} x_\varepsilon'(t) & = f_\varepsilon(t, x_\varepsilon(t)), \\ x_\varepsilon(t_0) & = x_0. \end{cases}$$
4. Continuité de x_ε : Il existe $0 < \delta < \varepsilon$, tel que
$$x_\varepsilon(t) \in B(x_0, \varepsilon), \quad \forall t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[.$$
5. **Conclusion :**
x_ε est solution du problème initial sur $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap I$.

Preuve du corollaire

2. $\Rightarrow$ 1. Immédiat.

1. $\Rightarrow$ 2. On introduit l'ensemble

$$J := \left\{ t \in J_1 \cap J_2, \;\; x_1(t) = x_2(t) \right\}.$$

- J est non vide : par hypothèse $t^* \in J$.
- J est fermé dans $J_1 \cap J_2$: car x_1 et x_2 sont continues.
- J est ouvert dans $J_1 \cap J_2$:

  Soit $t_0 \in J$: (J_1, x_1) et (J_2, x_2) sont deux solutions du **même** problème de Cauchy posé sur $J_1 \cap J_2$:

  $$\begin{cases} y'(t) & = f(t, y), \\ y(t_0) & = y_0. \end{cases}$$

  D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz local, il existe $\delta > 0$ t.q.

  $$(J_1 \cap J_2) \cap]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset J.$$

Conclusion : $J = J_1 \cap J_2$

Preuve de la version 2

- On définit l'ensemble $\mathcal{J}$ par
$$\mathcal{J} = \bigcup_{(J,x)\text{ solution}} J.$$
- $\mathcal{J} \neq \emptyset$, d'après C-L. version 1 !
- Pour $t \in \mathcal{J}$, on pose

  $y(t) =$ la valeur en t de n'importe quelle solution (J, x) t.q. $t \in J$.

  Remarque : Cette définition est cohérente (grâce au corollaire) !

Preuve de la version 2

- On définit l'ensemble $\mathcal{J}$ par

$$\mathcal{J} = \bigcup_{(J,x) \text{ solution}} J.$$

- $\mathcal{J} \neq \varnothing$, d'après C-L. version 1 !
- Pour $t \in \mathcal{J}$, on pose

  $y(t) =$ la valeur en t de n'importe quelle solution (J, x) t.q. $t \in J$.

- Par construction, $(\mathcal{J}, y)$ est l'unique sol. maximale du problème.
- On prend $t^* \in \mathcal{J}$ et on pose $y^* := y(t^*)$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) & = f(t, z) \\ z(t^*) & = y^*, \end{cases}$$

  admet une solution unique sur un intervalle $]t^* - \delta, t^* + \delta[\cap I$.
  Par **recollement**, on a une solution sur $\mathcal{J} \cup (]t^* - \delta, t^* + \delta[\cap I)$

$$\Longrightarrow]t^* - \delta, t^* + \delta[\cap I \subset \mathcal{J}.$$

  Conclusion : $\mathcal{J}$ est ouvert dans I.

4. Théorème de Cauchy-Lipschitz local

4.3. Critères de globalité

Objectifs

Questions

1. A quoi reconnaît-on une solution globale ?
2. Que se passe-t'il au bord de l'intervalle de définition d'une solution maximale **non globale** ?

Deux versions d'un même principe

Eléments de réponse

- **Si** $\Omega = \mathbb{R}^d$ **:**

  Principe d'explosion en temps fini.

- **Si** $\Omega \neq \mathbb{R}^d$ **:**

  Principe de sortie de tout compact.

Explosion en temps fini

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *un champ de vecteurs continu et localement lipschitzien par rapport à la variable d'état et* (J, x) *une solution maximale de l'équation* $x' = f(t, x)$.

On pose $\alpha = \inf J \in [-\infty, +\infty[$ *et* $\beta = \sup J \in]-\infty, +\infty]$.

Alors pour n'importe quel $t_0 \in J$*, on a*

- *Si* $\beta < +\infty$*, alors* $\sup_{t \in [t_0, \beta[} \|x(t)\| = +\infty$.
- *Si* $\alpha > -\infty$*, alors* $\sup_{t \in]\alpha, t_0]} \|x(t)\| = +\infty$.

Utilisation : Dans 95% des cas, on raisonne par contraposée pour montrer qu'une solution est globale :

1. On suppose que $\beta < +\infty$.
2. On démontre que $\sup_{[t_0, \beta[} \|x(t)\| < +\infty$ *(on utilise l'équation !)*.
3. Ceci contredit le théorème donc $\beta = +\infty$.

Explosion en temps fini

Théorème

Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *un champ de vecteurs continu et localement lipschitzien par rapport à la variable d'état et* (J, x) *une solution maximale de l'équation* $x' = f(t, x)$.

On pose $\alpha = \inf J \in \overline{I}$ *et* $\beta = \sup J \in \overline{I}$.

Alors pour n'importe quel $t_0 \in J$, *on a*

- *Si* $\beta \in \mathring{I}$, *alors* $\sup_{t \in [t_0, \beta[} \|x(t)\| = +\infty$.
- *Si* $\alpha \in \mathring{I}$, *alors* $\sup_{t \in]\alpha, t_0]} \|x(t)\| = +\infty$.

Explosion en temps fini

Preuve

- On suppose $\beta < +\infty$ et $R := \sup_{[t_0,\beta[} \|x(t)\| < +\infty$.
- On considère le compact $K = [t_0, \beta + 1] \times \bar{B}(0, R+1)$. On prend f_K continu et glob. lip. par rapport à la variable d'état tel que

$$f_K = f, \quad \text{sur } K.$$

- Le théorème de Cauchy-Lipschitz global donne l'existence et unicité d'une unique solution **globale** y du problème de Cauchy

$$(P_K) \quad \begin{cases} y'(t) & = f_K(t,y) \\ y(t_0) & = x(t_0), \end{cases}$$

- Par déf., on a $(t, x(t)) \in K$ pour tout $t \in [t_0, \beta[$ et donc $f(t,x(t)) = f_K(t,x(t))$.

$$\Longrightarrow ([t_0, \beta[, x) \text{ est sol. de } (P_K) \Longrightarrow y = x \text{ sur } [t_0, \beta[.$$

- Il existe $0 < \delta < 1$ tel que $y(t) \in \bar{B}(0, R+1), \quad \forall t \in [t_0, \beta + \delta[$.
- Sur l'intervalle $[t_0, \beta + \delta[$, y est solution de $y' = f(t,y)$, ce qui contredit la maximalité de la solution (J, x).

Fin de la séance 4

5. Equilibres. Stabilité

5. Equilibres. Stabilité

5.1. Définitions

Introduction

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^d$ **autonome** et de classe $\mathcal{C}^1$.

Définition (Equilibres)

On appelle **équilibre du système** *tout point* $x^* \in \Omega$ *tel que*

$$f(x^*) = 0.$$

Ceci est équivalent à dire que la fonction constante $t \in \mathbb{R} \mapsto x^*$ *est solution de l'équation différentielle* $x' = f(x)$.

Questions de la stabilité

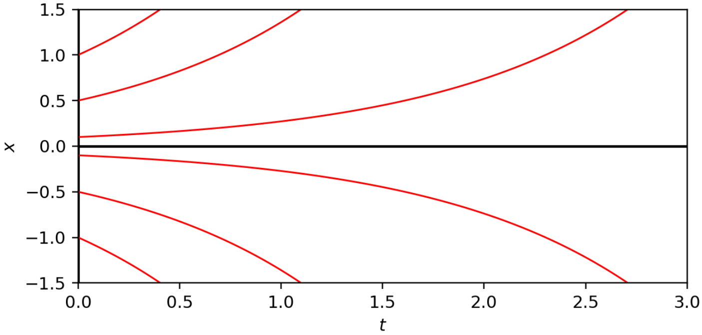
Si x^* est un équilibre du système, que peut-on dire des solutions associées à une donnée initiale proche de x^* ?

- Sont-elles globales ?
- Restent-elles proches de x^* ?
- Si oui, que se passe-t'il quand $t \to +\infty$?

Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

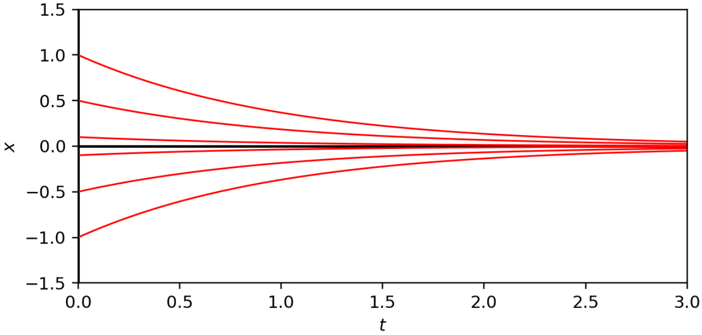
Exemple 1 : $f(x) = x$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

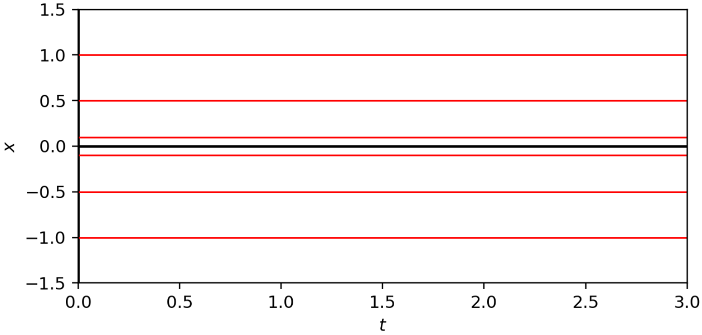
Exemple 2 : $f(x) = -x$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

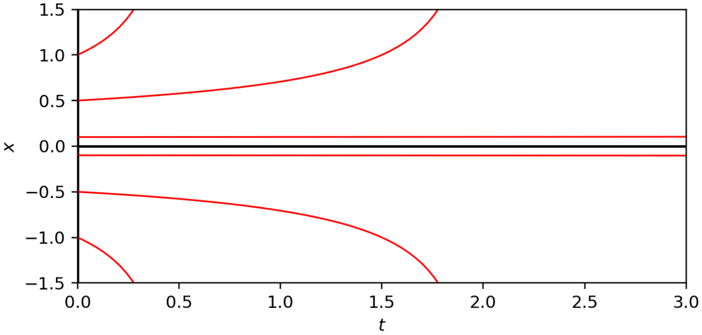
Exemple 3 : $f(x) = 0$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

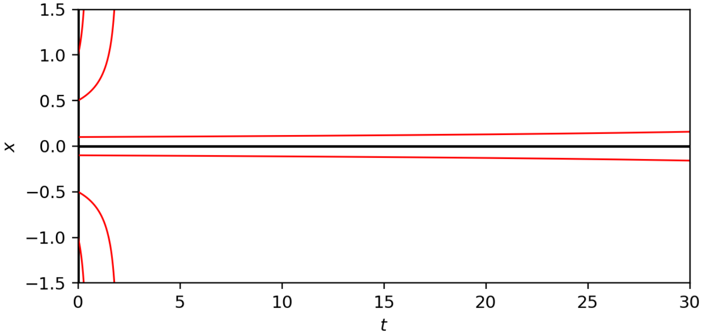
Exemple 4 : $f(x) = x^3$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

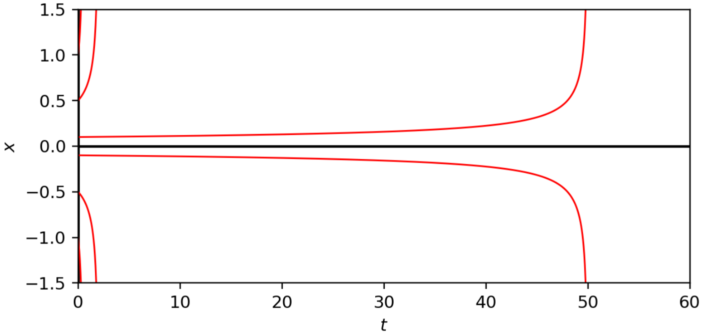
Exemple 4 : $f(x) = x^3$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

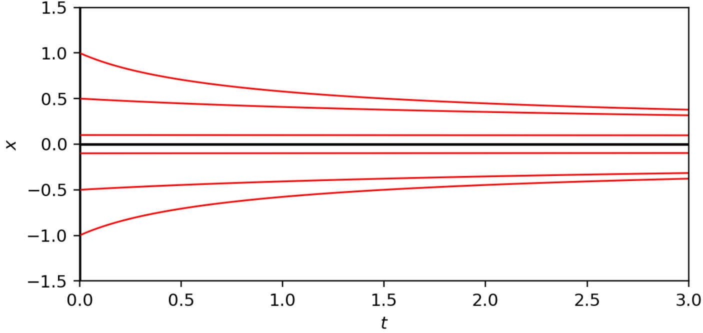
Exemple 4 : $f(x) = x^3$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

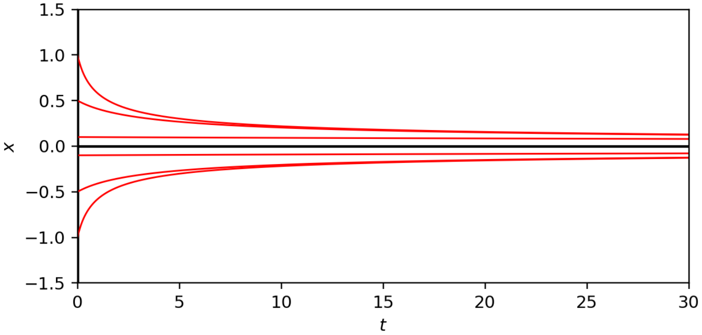
Exemple 5 : $f(x) = -x^3$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

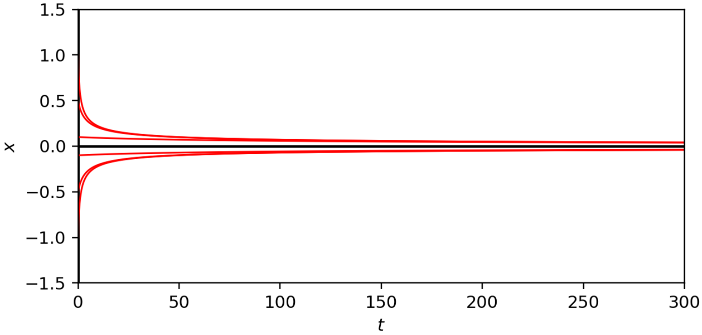
Exemple 5 : $f(x) = -x^3$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

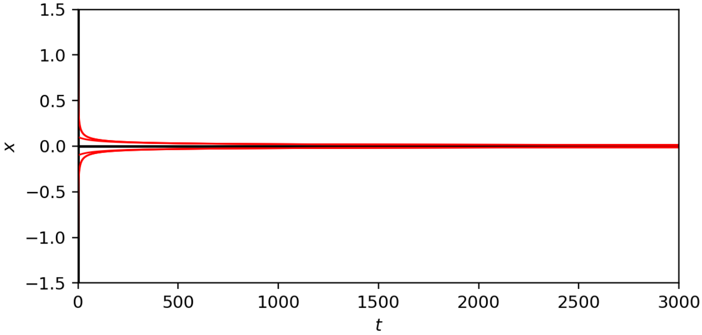
Exemple 5 : $f(x) = -x^3$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

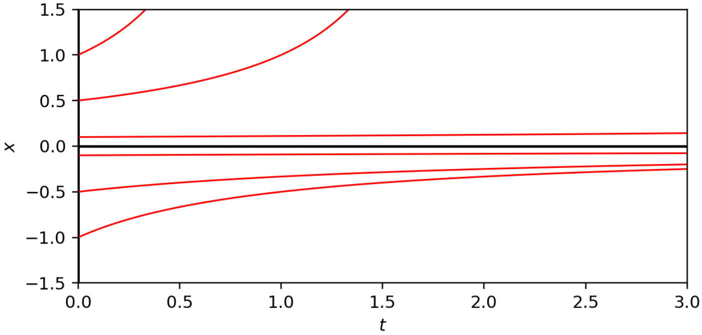
Exemple 5 : $f(x) = -x^3$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

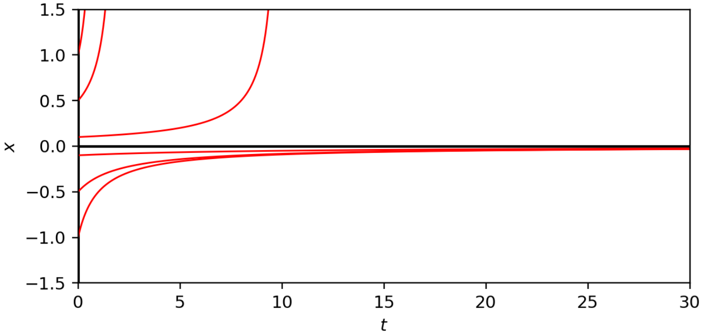
Exemple 6 : $f(x) = x^2$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

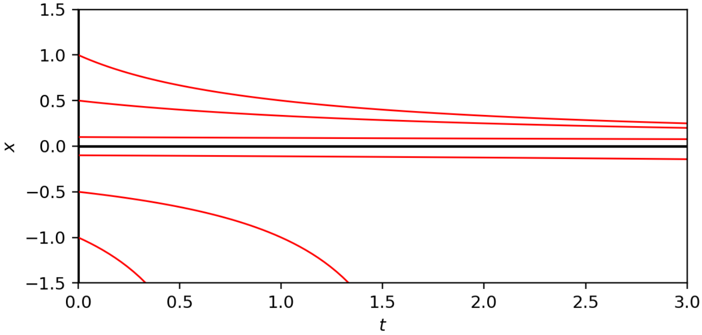
Exemple 6 : $f(x) = x^2$



Premiers exemples

On considère l'équilibre $x^* = 0$.

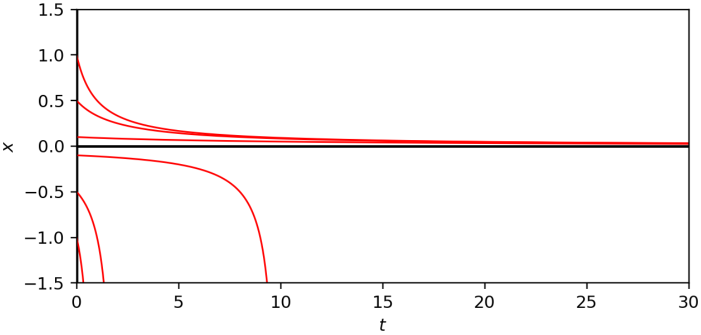
Exemple 7 : $f(x) = -x^2$



Premiers exemples

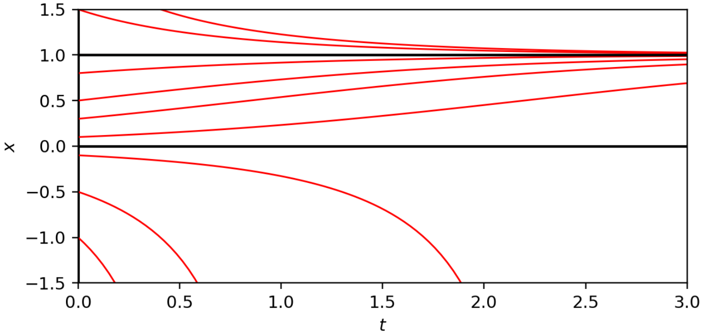
On considère l'équilibre $x^* = 0$.

Exemple 7 : $f(x) = -x^2$



Premiers exemples

Exemple 8 : $f(x) = x(1-x)$ Modèle logistique



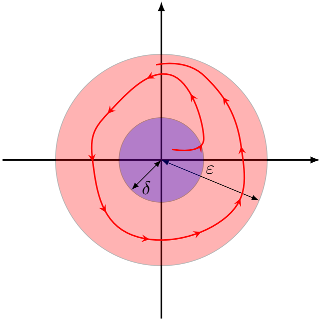
Définition

Définition (Stabilité)

On dit que x^* est un équilibre **stable** *pour l'équation $x' = f(x)$ si :*

Pour tout donnée initiale proche de x^* la solution est globale en temps positif et reste proche de x^* pour $t \geqslant 0$.

Ou encore $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \;\; \Phi(t)(B(x^*, \delta)) \subset B(x^*, \varepsilon), \;\; \forall t \geqslant 0.$



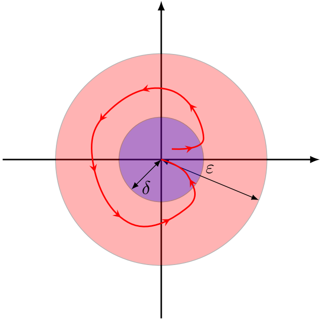
Définition

Définition (Stabilité asymptotique)

On dit que x^* est un équilibre **asymptotiquement stable** *pour l'équation $x' = f(x)$ s'il est stable et si :*

Pour tout donnée initiale proche de x^* la solution converge en temps long vers x^*.

Ou encore $\forall x_0 \in B(x^*, \delta), \ \ \varphi(t, x_0) \xrightarrow[t\to\infty]{} x^*.$



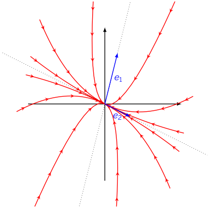
5. Equilibres. Stabilité

5.2. Cas linéaire

Retour sur les systèmes linéaires 2×2

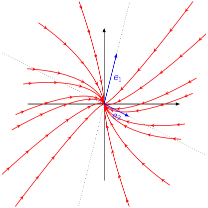
Noeud stable

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



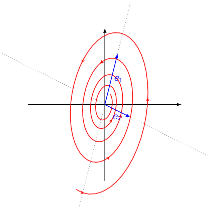
Noeud stable dégénéré

$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ non diagonalisable



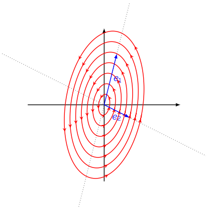
Foyer stable

$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathcal{R}e(\lambda_1) < 0$



Centre

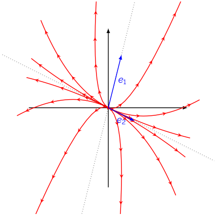
$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathcal{R}e(\lambda_1) = 0$



Retour sur les systèmes linéaires 2×2

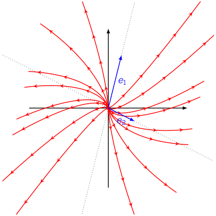
Noeud instable

$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$



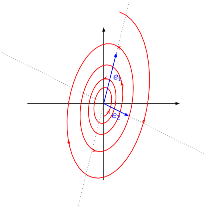
Noeud instable dégénéré

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ non diagonalisable



Foyer instable

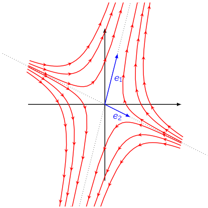
$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}, \mathcal{R}e(\lambda_1) > 0$



Retour sur les systèmes linéaires 2×2

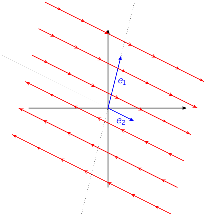
Point-selle

Cas $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$



Flot parallèle

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ non diagonalisable



Etude générale des systèmes linéaires

But

Trouver un critère de stabilité (asymptotique) des équilibres.

Définition

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ *et* $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

On dit que λ *est semi-simple si* $Ker\,(A - \lambda I) = Ker\,(A - \lambda I)^2$.

Proposition (Décomposition de Dunford)

Toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ *s'écrit de manière unique sous la forme*

$$A = D + N,$$

avec D *diagonalisable dans* $\mathbb{C}$, N *nilpotente et* $DN = ND$.

De plus,

$$\lambda \text{ est une v.p. semi-simple de } A \iff Ker\,(D - \lambda) \subset Ker\,N.$$

Etude générale des systèmes linéaires

But

Trouver un critère de stabilité (asymptotique) des équilibres.

Théorème

On considère le système différentiel linéaire autonome $x' = Ax$.

- *L'état d'équilibre $x^* = 0$ est asymptotiquement stable* **si et seulement si** *toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative.*
  Dans ce cas, l'équilibre est exponentiellement stable :

  $$\exists C, \gamma > 0, \quad t.q. \quad \|e^{tA}\| \leqslant Ce^{-\gamma t}, \quad \forall t > 0.$$

- *L'état d'équilibre $x^* = 0$ est stable* **si et seulement si** *toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle négative ou nulle et que celles de partie réelle nulle sont semi-simples.*

Etude générale des systèmes linéaires

But

Trouver un critère de stabilité (asymptotique) des équilibres.

Attention : le résultat précédent est **faux** pour le système $x' = A(t)x$.

$$A(t) = \begin{pmatrix} -11 - 9c(t) + 12s(t) & 12 + 12c(t) + 9s(t) \\ -12 + 12c(t) + 9s(t) & -11 + 9c(t) - 12s(t) \end{pmatrix},$$
$$\text{avec} \quad c(t) = \cos(24\,t), \quad s(t) = \sin(24\,t).$$

On a

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A(t)) = \{-2, -20\}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.}$$

Pourtant

$$t \mapsto e^{4t} \begin{pmatrix} \cos(12\,t) + 2\sin(12\,t) \\ 2\cos(12\,t) - \sin(12\,t) \end{pmatrix} \quad \text{est solution.}$$

5. Equilibres. Stabilité

5.3. Cas non linéaire

Critère spectral de stabilité

$x' = f(x)$

But

Trouver un critère de stabilité (asymptotique) des équilibres.

Théorème

Soit $x^* \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(x^*) = 0$.

On note $A = D_x f(x^*)$ la matrice jacobienne de f en x^*.

1. **Si** *toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement négative, alors x^* est un équilibre asymptotiquement stable de l'équation $x' = f(x)$.*
2. **Si** *toutes les valeurs propres de A sont de partie réelle strictement positive, alors x^* est un équilibre instable de l'équation $x' = f(x)$.*

Attention

Si A a au moins une valeur propre de partie réelle nulle, alors on ne peut pas conclure.

Critère spectral de stabilité

Preuve ($x^* = 0$)

Etape 1 : Introduction d'un champ de vecteurs perturbé

- On écrit $f(x) = Ax + g(x)$ et comme $A = Df(0)$ on a
$$\lim_{x \to 0} \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} = 0.$$
- Par hypothèse
$$\|e^{tA}\| \leqslant C_1 e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$
- Pour $\delta > 0$ petit, on construit $g_\delta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, **glob. lip.** et t.q.
$$\begin{cases} g_\delta = g, & \text{sur } \bar{B}(0, \delta), \\ \|g_\delta(x)\| \leqslant \dfrac{\gamma}{2C_1}\|x\|, & \forall x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$
- On pose alors $f_\delta(x) = Ax + g_\delta(x)$ et on considère le problème
$$\begin{cases} x_\delta' = f_\delta(x_\delta), \\ x_\delta(0) = x_0. \end{cases}$$

Critère spectral de stabilité

Etape 2 : Estimation des solutions du problème perturbé

- Formule de Duhamel

$$x_\delta(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g_\delta(x_\delta(s))\, ds.$$

- Propriétés de e^{tA} puis de g_δ

$$\begin{aligned} \|x_\delta(t)\| &\leqslant C_1 e^{-\gamma t}\|x_0\| + C_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|g_\delta(x_\delta(s))\|\, ds \\ &\leqslant C_1 e^{-\gamma t}\|x_0\| + \frac{\gamma}{2}\int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|x_\delta(s)\|\, ds. \end{aligned}$$

- Réécriture

$$e^{\gamma t}\|x_\delta(t)\| \leqslant C_1\|x_0\| + \frac{\gamma}{2}\int_0^t e^{\gamma s}\|x_\delta(s)\|\, ds.$$

- Lemme de Gronwall

$$e^{\gamma t}\|x_\delta(t)\| \leqslant C_1\|x_0\| e^{\gamma t/2}$$

Critère spectral de stabilité

Preuve ($x^* = 0$)

Etape 2 : Estimation des solutions du problème perturbé

- Formule de Duhamel

$$x_\delta(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} g_\delta(x_\delta(s))\, ds.$$

- Propriétés de e^{tA} puis de g_δ

$$\begin{aligned}\|x_\delta(t)\| &\leqslant C_1 e^{-\gamma t}\|x_0\| + C_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|g_\delta(x_\delta(s))\|\, ds \\ &\leqslant C_1 e^{-\gamma t}\|x_0\| + \frac{\gamma}{2} \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|x_\delta(s)\|\, ds.\end{aligned}$$

- Réécriture

$$e^{\gamma t}\|x_\delta(t)\| \leqslant C_1\|x_0\| + \frac{\gamma}{2}\int_0^t e^{\gamma s}\|x_\delta(s)\|\, ds.$$

- Lemme de Gronwall

$$e^{\gamma t}\|x_\delta(t)\| \leqslant C_1\|x_0\| e^{\gamma t/2} \qquad \boxed{\Longrightarrow \|x_\delta(t)\| \leqslant C_1\|x_0\| e^{-\gamma t/2}.}$$

Critère spectral de stabilité

Etape 3 : Conclusion

- Système initial et système perturbé

$$(P) \quad \begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \qquad (P_\delta) \quad \begin{cases} x_\delta' = f_\delta(x_\delta), \\ x_\delta(0) = x_0, \end{cases} \quad \text{avec}$$

$f_\delta = f$ sur $B(0, \delta)$.

- On a montré que les solutions de (P_δ) vérifient

$$\|x_\delta(t)\| \leqslant C_1 \|x_0\| e^{-\gamma t/2}. \qquad \text{(Stab)}$$

- Conclusion :

$$\begin{aligned} \|x_0\| \leqslant \frac{\delta}{C_1} &\Rightarrow \|x_\delta(t)\| \leqslant \delta, \forall t > 0 \\ &\Rightarrow x_\delta(t) \in B(0, \delta), \forall t > 0 \\ &\Rightarrow f_\delta(x_\delta(t)) = f(x_\delta(t)), \forall t > 0 \\ &\Rightarrow ([0, +\infty[, x_\delta) \text{ est la solution de } (P) \text{ et vérifie (Stab).} \end{aligned}$$

Et dans les autres cas ?

Cas hyperbolique $\rightsquigarrow$ le linéarisé donne des informations

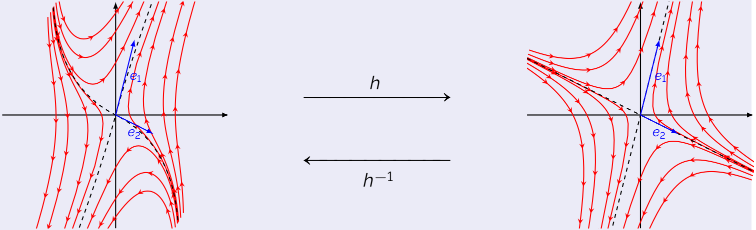
Théorème (Hartman-Grobman - hors programme)

On suppose $f(0) = 0$. Si la jacobienne $A = D_x f(0)$ vérifie

$$\mathrm{Sp}(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing,$$

alors, au voisinage de 0, le flot de $x' = f(x)$ et celui de $x' = Ax$ sont **conjugués** *: Il existe un homéo local $h : U \to V$ tel que*

$$\varphi(t,x) = h^{-1}\big(e^{tA} h(x)\big), \quad \forall x \in U.$$



Et dans les autres cas ?

Cas non hyperbolique $\rightsquigarrow$ le linéarisé ne suffit pas

Cas scalaire : linéarisé nul

$$x' = \alpha x^3.$$

- $\alpha > 0$: 0 est instable
- $\alpha = 0$: 0 est stable
- $\alpha < 0$: 0 est asymp. stable (mais pas exponentiellement !)

Et dans les autres cas ?

Cas non hyperbolique $\rightsquigarrow$ le linéarisé ne suffit pas

Cas scalaire : linéarisé nul

$$x' = \alpha x^3.$$

- $\alpha > 0$: 0 est instable
- $\alpha = 0$: 0 est stable
- $\alpha < 0$: 0 est asymp. stable (mais pas exponentiellement !)

Cas vectoriel : valeurs propres imaginaires pures

$$\begin{cases} x' = -y + \alpha x(x^2 + y^2) \\ y' = x + \alpha y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

- $\alpha > 0$: 0 est instable
- $\alpha = 0$: 0 est stable
- $\alpha < 0$: 0 est asymp. stable (mais pas exponentiellement !)

Intégrales premières. Ensembles invariants

Limites de l'étude du système linéarisé

- Ne permet de conclure que si $\mathrm{Sp}(A) \cap i\mathbb{R} = \varnothing$.
- Ne peut donner que des résultats locaux : impossible de trouver le **bassin d'attraction** d'un équilibre asymp. stable.

Définition

Soit x^* un équilibre asymptotiquement stable de $x' = f(x)$.
Le **bassin d'attraction** *de x^* est par définition l'ensemble*

$$U_{x*} := \left\{ x_0 \in \Omega, \ \lim_{t \to +\infty} \varphi(t, x_0) = x^* \right\}.$$

Exemple : $x' = -x + \alpha x^2$

$\alpha = 0$	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
$U_0 = \mathbb{R}$	$U_0 =]-\infty, 1/\alpha[$	$U_0 =]1/\alpha, +\infty[$

Intégrales premières. Ensembles invariants

Définition (Intégrale première)

On dit qu'une fonction $E : \Omega \to \mathbb{R}$ est une intégrale première du système si

$$f(x) \cdot \nabla E(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{d}{dt} E(\varphi(t, x_0)) = 0,$$

i.e. E est constante le long des trajectoires.

Conséquence

Si E est une intégrale première du système alors toutes les trajectoires sont contenues dans des surfaces de niveau

$$E_\alpha := \{x \in \Omega, \; E(x) = \alpha\} = E^{-1}(\{\alpha\}).$$

Remarque : Cela permet beaucoup plus que l'étude de stabilité !

Intégrales premières. Ensembles invariants

Définition (Ensemble invariant)

On dit qu'un ensemble A est (positivement) invariant pour le système $x' = f(x)$ si on a $\varphi(t, A) \subset A, \ \forall t \geqslant 0$.

On vient de voir que si E est une intégrale première alors

$$E_\alpha \text{ est invariant pour tout } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Intégrales premières. Ensembles invariants

Définition (Ensemble invariant)

On dit qu'un ensemble A est (positivement) invariant pour le système $x' = f(x)$ si on a $\varphi(t, A) \subset A, \ \forall t \geqslant 0$.

Définition

On dit que $E : \Omega \to \mathbb{R}$ est dissipée le long du flot si

$$f(x) \cdot \nabla E(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

ce qui est équivalent à $\dfrac{d}{dt} E(\varphi(t, x_0)) \leqslant 0$.

Proposition

Si E est dissipée le long du flot alors les sous-ensembles de niveau

$$E_{\leqslant \alpha} := \{x \in \Omega, \quad E(x) \leqslant \alpha\} = E^{-1}(]-\infty, \alpha]),$$

sont invariants.

Intégrales premières. Ensembles invariants

Définition (Ensemble invariant)

On dit qu'un ensemble A est (positivement) invariant pour le système $x' = f(x)$ si on a $\varphi(t, A) \subset A, \ \forall t \geqslant 0$.

Définition

On dit que $E : \Omega \to \mathbb{R}$ est dissipée le long du flot si

$$f(x) \cdot \nabla E(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

ce qui est équivalent à $\dfrac{d}{dt} E(\varphi(t, x_0)) \leqslant 0$.

Proposition

Si E est dissipée le long du flot alors les sous-ensembles de niveau

$$E_{\leqslant \alpha} := \{x \in \Omega, \quad E(x) \leqslant \alpha\} = E^{-1}(]-\infty, \alpha]),$$

sont invariants. *En fait, il suffit que $f \cdot \nabla E < 0$ sur E_α*

Théorème (Liapounov, hors programme)

S'il existe une fonction V (appelée fonction de Liapounov du système) vérifiant

- *V est dissipée le long du système :* $f \cdot \nabla V \leqslant 0$.
- *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *l'ensemble*

$$\{x \in \Omega, \;\; f(x) \cdot \nabla V(x) = 0 \text{ et } V(x) = \alpha\},$$

  est localement fini.
- *Il existe* α *tel que* $V_{\leqslant \alpha}$ *est compact et contient un unique point d'équilibre* x^* *du système.*

Alors x^* *est asymptotiquement stable et* $V_{\leqslant \alpha}$ *est contenu dans le bassin d'attraction.*

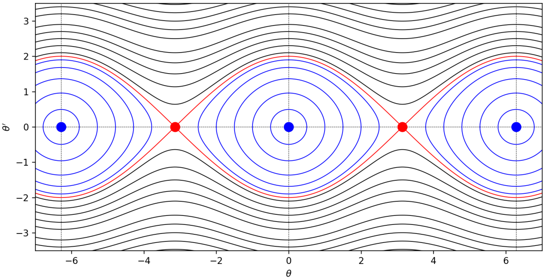
Exemples

Le pendule $$\theta'' + \sin(\theta) = 0$$

- Existence et unicité des solutions globales
- Intégrale première (=énergie totale du système)

$$E(\theta, \theta') = \frac{1}{2}|\theta'|^2 + (1 - \cos(\theta)).$$

- Ensembles de niveau de E dans le plan de phases



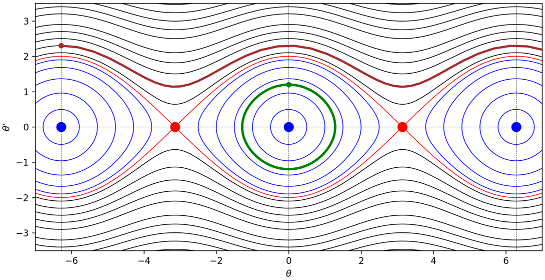
Exemples

Le pendule $$\theta'' + \sin(\theta) = 0$$

- Existence et unicité des solutions globales
- Intégrale première (=énergie totale du système)

$$E(\theta, \theta') = \frac{1}{2}|\theta'|^2 + (1 - \cos(\theta)).$$

- Ensembles de niveau de E dans le plan de phases



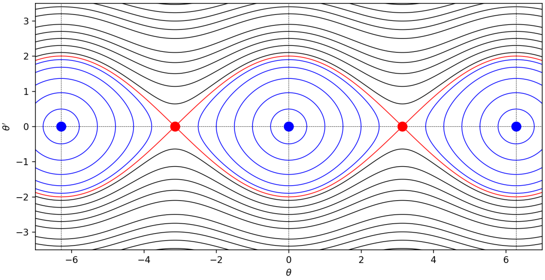
Exemples

Le pendule amorti $\theta'' + \mu\theta' + \sin(\theta) = 0$

- Existence et unicité des solutions globales
- Energie **dissipée**

$$E(\theta, \theta') = \frac{1}{2}|\theta'|^2 + (1 - \cos(\theta)).$$

- Ensembles de niveau de E dans le plan de phases



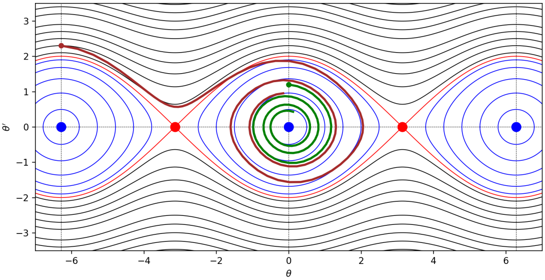
Exemples

Le pendule amorti $\theta'' + \mu\theta' + \sin(\theta) = 0$

- Existence et unicité des solutions globales
- Energie **dissipée**

$$E(\theta, \theta') = \frac{1}{2}|\theta'|^2 + (1 - \cos(\theta)).$$

- Ensembles de niveau de E dans le plan de phases



$\mu = 0.1$

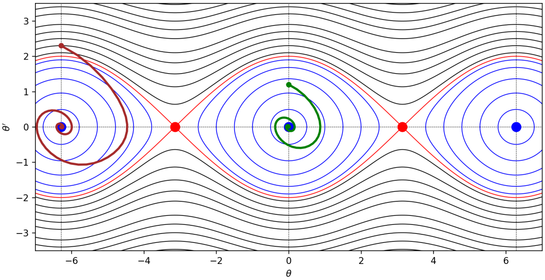
Exemples

Le pendule amorti $\theta'' + \mu\theta' + \sin(\theta) = 0$

- Existence et unicité des solutions globales
- Energie **dissipée**

$$E(\theta, \theta') = \frac{1}{2}|\theta'|^2 + (1 - \cos(\theta)).$$

- Ensembles de niveau de E dans le plan de phases



$\mu = 0.5$

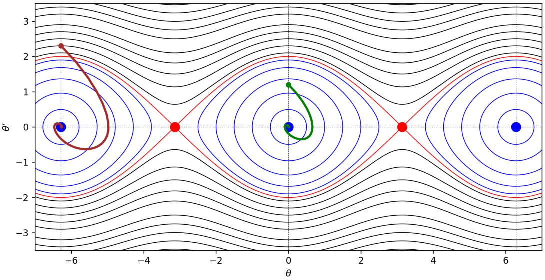
Exemples

Le pendule amorti $\theta'' + \mu\theta' + \sin(\theta) = 0$

- Existence et unicité des solutions globales
- Energie **dissipée**

$$E(\theta, \theta') = \frac{1}{2}|\theta'|^2 + (1 - \cos(\theta)).$$

- Ensembles de niveau de E dans le plan de phases

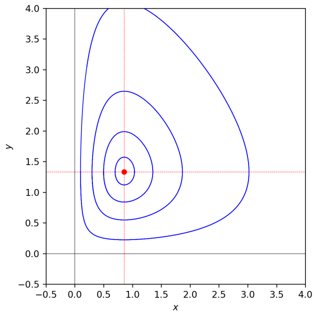


$\mu = 1.0$

Exemples

Le système proies-prédateurs (Lotka-Voltera) $a, b, c, d > 0$

$$\begin{cases} x' = & ax - bxy \\ y' = & -cy + dxy \end{cases}$$



- Existence et unicité **locale** : OK.
- Globalité ? Pas clair ...
- Les solutions restent positives si $x_0 > 0, y_0 > 0$.
- Intégrale première $E(x, y) = by + dx - a \log y - c \log x$.
- Stabilité de l'équilibre ?
- Trajectoires périodiques ?

Fin de la séance 5

6. Etude détailée d’un modèle de propagation d’épidémie

Présentation du modèle

On souhaite modéliser l'évolution d'une épidémie (non mortelle !) dans une population donnée.

Hypothèses de modélisation :

- La population totale est constante au cours du temps (à l'échelle de temps choisie).
- Chaque individu peut, à chaque instant, être dans trois états différents (on parle de modèle compartimenté) :
  - *Etat infecté :* Individu maladie et contagieux.
  - *Etat résistant :* Individu qui ont contracté la maladie, qui sont guéris et qui sont maintenant résistants au virus.
  - *Etat susceptible :* Individu non malade susceptible de la contracter au contact d'un infividu contagieux.

Présentation du modèle

On souhaite modéliser l'évolution d'une épidémie (non mortelle !) dans une population donnée.

Mise en équation :

- Les nombres d'individus dans chacun des états à chaque instant t sont notés $I(t)$, $R(t)$ et $S(t)$ respectivement.
- Le système considéré est

$$\begin{cases} S'(t) = & & -\beta I(t)S(t) + \gamma R(t), \\ R'(t) = & \nu I(t) & - \gamma R(t), \\ I'(t) = & -\nu I(t) + \beta I(t)S(t), & \end{cases}$$

où

- $1/\nu$ est le temps moyen de guérison d'un patient infecté.
- β est le facteur de contamination.
- $1/\gamma$ est le temps moyen durant lequel un individu ayant contracté la maladie va en être immunisé.

Premiers éléments d'analyse du modèle

$$(\star) \qquad \begin{cases} S'(t) = & & -\beta I(t)S(t) + \gamma R(t), \\ R'(t) = & \nu I(t) & & -\gamma R(t), \\ I'(t) = & -\nu I(t) + \beta I(t)S(t). \end{cases}$$

Théorème

Pour toutes données initiales **positives** S_0, R_0, I_0*, il existe une unique solution de* $(\star)$ *définie sur* $[0, +\infty[$*. Par ailleurs, cette solution vérifie*

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad S(t) \geqslant 0, R(t) \geqslant 0, I(t) \geqslant 0,$$

et

$$\forall t \in [0, +\infty[, \qquad S(t) + R(t) + I(t) = S_0 + R_0 + I_0.$$

Par la suite, quitte à changer les paramètres, on suppose $S_0 + R_0 + I_0 = 1$.

Premiers éléments d'analyse du modèle

$$
(\star) \quad \begin{cases} S'(t) = & - \beta I(t)S(t) + \gamma R(t), \\ R'(t) = & \nu I(t) \qquad\qquad - \gamma R(t), \\ I'(t) = & -\nu I(t) + \beta I(t)S(t). \end{cases}
$$

Système réduit équivalent

$$
(\star\star) \quad \begin{cases} S'(t) = -\beta IS + \gamma(1 - S - I), \\ I'(t) = -\nu I + \beta IS. \end{cases}
$$

Premiers éléments d'analyse du modèle

Système réduit équivalent

$$(\star\star) \quad \begin{cases} S'(t) = -\beta IS + \gamma(1 - S - I), \\ I'(t) = -\nu I + \beta IS. \end{cases}$$

Etats d'équilibre

- Equilibre 1 : **absence de la maladie**

$$I^* = 0, \; S^* = 1, \text{ et donc } R^* = 0.$$

- Equilibre 2 (si $\beta > \nu$) : **épidémie persistente**

$$I^* = \frac{\gamma(\beta - \nu)}{\beta(\nu + \gamma)}, \; S^* = \frac{\nu}{\beta}, \text{ et donc } R^* = \frac{\nu(\beta - \nu)}{\beta(\nu + \gamma)}.$$

Premiers éléments d'analyse du modèle

Système réduit équivalent

$$(\star\star) \quad \begin{cases} S'(t) = -\beta IS + \gamma(1 - S - I), \\ I'(t) = -\nu I + \beta IS. \end{cases}$$

Etats d'équilibre

- Equilibre 1 : **absence de la maladie**

$$I^* = 0, \; S^* = 1, \text{ et donc } R^* = 0.$$

Cet équilibre est asymptotiquement stable ssi $\beta \leqslant \nu$ et même mieux si $\beta < \nu$!

- Equilibre 2 (si $\beta > \nu$) : **épidémie persistente**

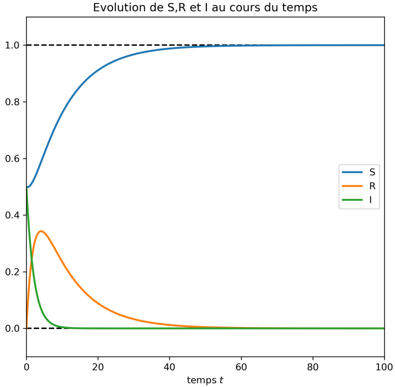
$$I^* = \frac{\gamma(\beta - \nu)}{\beta(\nu + \gamma)}, \; S^* = \frac{\nu}{\beta}, \text{ et donc } R^* = \frac{\nu(\beta - \nu)}{\beta(\nu + \gamma)}.$$

Cet équilibre est asymptotiquement stable ($\beta > \nu$)

Quelques exemples

Epidémie de force modérée

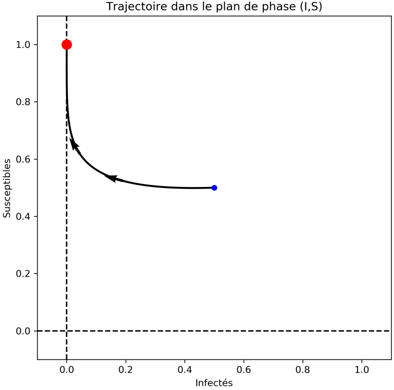
- Population infectée à l'instant initial : $I_0 = S_0 = 1/2$, $R_0 = 0$.
- Durée moyenne d'infection de 2 jours : $\nu = 1/2$
- Taux de contagion : $\beta = 1/30$
- Durée d'immunité de 10 jours : $\gamma = 1/10$



Quelques exemples

Epidémie de force modérée

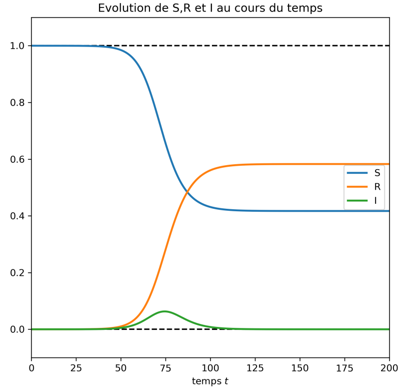
- Population infectée à l'instant initial : $I_0 = S_0 = 1/2$, $R_0 = 0$.
- Durée moyenne d'infection de 2 jours : $\nu = 1/2$
- Taux de contagion : $\beta = 1/30$
- Durée d'immunité de 10 jours : $\gamma = 1/10$



Quelques exemples

Epidémie de grippe à New-York dans les années 60

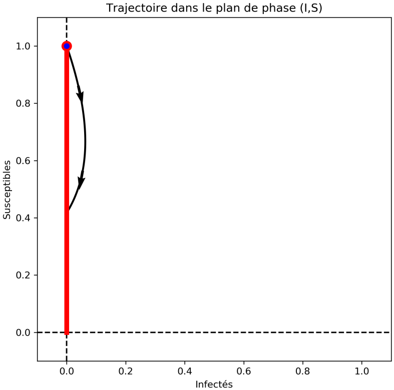
- Initialement 10 malades / 8 millions d'habitants : $I_0 = 1.25\,10^{-6}$
- Durée moyenne d'infection de 3 jours : $\nu = 1/3$
- Taux de contagion : $\beta = 1/2$
- Immunité permanente : $\gamma = 0$



Quelques exemples

Epidémie de grippe à New-York dans les années 60

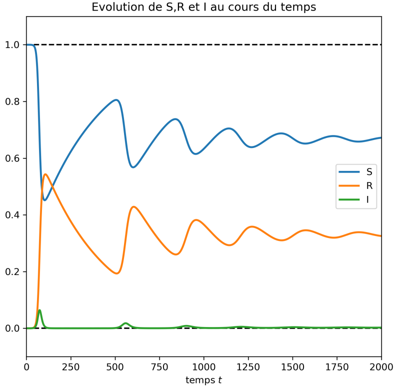
- Initialement 10 malades / 8 millions d'habitants : $I_0 = 1.25\,10^{-6}$
- Durée moyenne d'infection de 3 jours : $\nu = 1/3$
- Taux de contagion : $\beta = 1/2$
- Immunité permanente : $\gamma = 0$



Quelques exemples

Même exemple avec mutation du virus

- Initialement 10 malades / 8 millions d'habitants : $I_0 = 1.25\,10^{-6}$
- Durée moyenne d'infection de 3 jours : $\nu = 1/3$
- Taux de contagion : $\beta = 1/2$
- Immunité perdue au bout d'un an : $\gamma = 1/365$

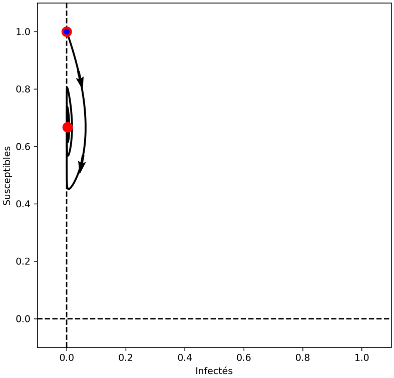


Quelques exemples

Même exemple avec mutation du virus

- Initialement 10 malades / 8 millions d'habitants : $I_0 = 1.25\,10^{-6}$
- Durée moyenne d'infection de 3 jours : $\nu = 1/3$
- Taux de contagion : $\beta = 1/2$
- Immunité perdue au bout d'un an : $\gamma = 1/365$

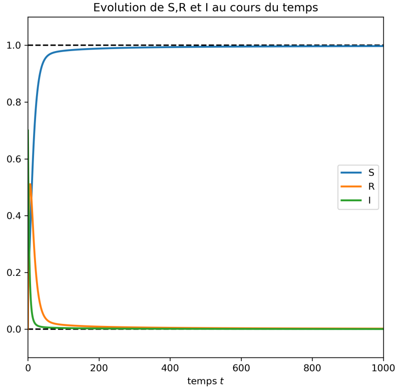
Trajectoire dans le plan de phase (I,S)



Quelques exemples

Le cas $\beta = \nu$

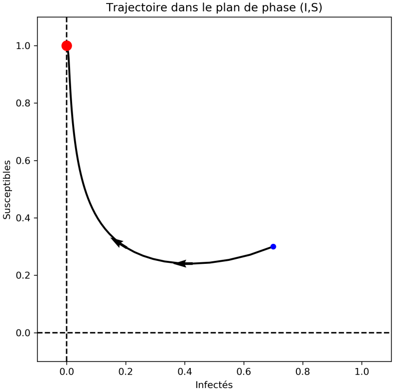
- Initialement $I_0 = 0.7$
- Durée moyenne d'infection de 3 jours : $\nu = 1/3$
- Taux de contagion : $\beta = 1/3$
- Immunité perdue au bout de dix jours : $\gamma = 1/10$



Quelques exemples

Le cas $\beta = \nu$

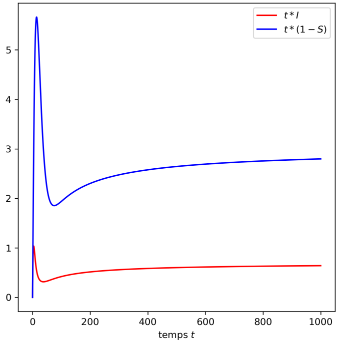
- Initialement $I_0 = 0.7$
- Durée moyenne d'infection de 3 jours : $\nu = 1/3$
- Taux de contagion : $\beta = 1/3$
- Immunité perdue au bout de dix jours : $\gamma = 1/10$



Quelques exemples

Le cas $\beta = \nu$

- Initialement $I_0 = 0.7$
- Durée moyenne d'infection de 3 jours : $\nu = 1/3$
- Taux de contagion : $\beta = 1/3$
- Immunité perdue au bout de dix jours : $\gamma = 1/10$



Fin de la séance 6