Equations différentielles ordinaires
Equations aux dérivées partielles

Partie 3 : EDP elliptiques

Franck Boyer

`franck.boyer@math.univ-toulouse.fr`

Bureau 204 - Bât. 1R3

Master 1 Mathématiques - Enseignement Supérieur et Recherche

2019/2020

Institut de Mathématiques de Toulouse

Menu de l'UE

Plan général

- Partie 1 : Equations différentielles ordinaires
- Partie 2 : Equations de transport
- **Partie 3 : Problèmes aux limites elliptiques**

Evaluation

- Un devoir à la maison
- Un partiel
- Un examen terminal

- Note de CC = 1/3DM + 2/3P
- Note finale = 0.4CC + 0.6CT

Remarque

- Contenu de base
- Contenu plus avancé

Plan de la partie 3

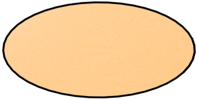
1. Motivations

1. Motivations

1.1. Le problème de la membrane élastique

Le problème physique

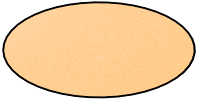
On considère une membrane élastique plane au repos



- Le bord de la membrane est fixé à un cadre.
- On applique une force verticale en chaque point de la membrane (par exemple en posant un objet dessus).
- On veut savoir quelle forme va prendre la membrane sous l'effet de cette force.

Le problème physique

On considère une membrane élastique plane au repos

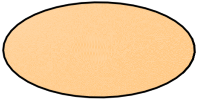


Mise en forme mathématique

- La membrane au repos est représentée par un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (plus exactement c'est l'ensemble $\Omega \times \{0\}$ dans $\mathbb{R}^3$).
- La densité de forces en $x \in \Omega$ est un nombre noté $f(x)$. La force verticale exercée sur le point $(x, 0), x \in \Omega$ est donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$.

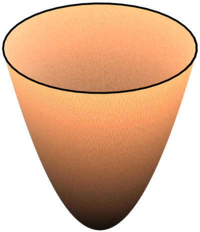
Le problème physique

On considère une membrane élastique plane au repos



Mise en forme mathématique

- Sous l'effet de la force exercée, la membrane va s'étirer et se déformer.
- **But du jeu :** Trouver la forme que va prendre la membrane à l'équilibre.
- On cherche donc une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ dont la surface représentative est solution du problème.



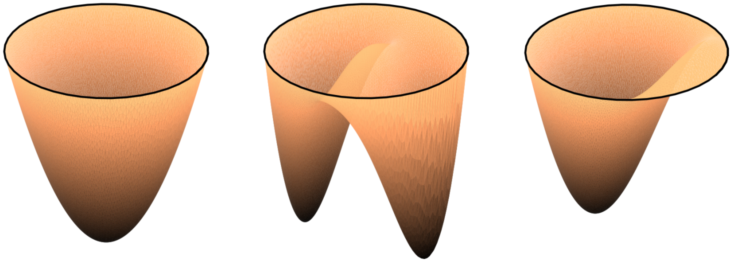
Le problème physique

Déformations admissibles

On va introduire l'ensemble

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}),\ \text{t.q. } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

dont voici quelques éléments



Déformations admissibles

On va introduire l'ensemble

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}),\ \text{t.q. } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\},$$

Le principe physique fondamental

La position d'équilibre adoptée par la membrane sous l'effet des forces appliquées est celle qui va **minimiser l'énergie totale**.

On va chercher $u \in X$ telle que

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v).$$

C'est un problème d'optimisation

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}),\ \text{t.q. } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Calcul de l'énergie pour un $u \in X$ donné

Il y a deux contributions à l'énergie $E(u) = E_1(u) + E_2(u)$.

- **Energie potentielle liée à la force f :**

$$E_1(u) := -\int_\Omega u(x)f(x)\,dx.$$

- **Energie élastique :**

$$E_2(u) := k\int_\Omega \left(\sqrt{1+|\nabla u|^2} - 1\right) dx,$$

où $k > 0$ est un coefficient de rigidité du matériau.

Le problème physique

Mise en équations 2/3

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}),\ \text{t.q. } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Calcul de l'énergie pour un $u \in X$ donné

$$E(u) = k \int_\Omega \left(\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1 \right) dx - \int_\Omega u(x) f(x)\, dx.$$

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}),\ \text{t.q. } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Calcul de l'énergie pour un $u \in X$ donné

$$E(u) = k \int_\Omega \left(\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1 \right) dx - \int_\Omega u(x) f(x)\, dx.$$

Hypothèse des petits déplacements

On suppose que la force exercée est **petite** et donc que le déplacement u recherché est **petit** !

Conséquence $\quad \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \approx 1 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \dots$

Dorénavant on prendra l'énergie simplifiée

$$\boxed{E(u) = \frac{k}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx - \int_\Omega u(x) f(x)\, dx.}$$

Le problème physique

Mise en équations 3/3

Résumé

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}),\ \text{t.q. } u = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

On cherche $u \in X$ qui vérifie

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v), \qquad (\star)$$

avec $E : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$E(v) = \frac{k}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \int_\Omega f(x) v(x) \, dx.$$

Les questions à résoudre :

1. Le problème $(\star)$ admet-il une solution ?
2. Si oui, cette solution est-elle unique ?
3. Si oui, peut-on la caractériser à l'aide d'une équation plus pratique à manipuler que le problème $(\star)$?

Le problème physique

Le cas monodimensionnel

Pour simplifier, regardons le même problème mais en dimension 1.

$$\text{Membrane élastique} \Longrightarrow \text{Corde élastique}$$

$$\Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2 \Longrightarrow I =]0,1[\text{ intervalle de } \mathbb{R}.$$

Le problème physique

Le cas monodimensionnel

Pour simplifier, regardons le même problème mais en dimension 1.

$$\text{Membrane élastique} \Longrightarrow \text{Corde élastique}$$
$$\Omega \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2 \Longrightarrow I =]0,1[\text{ intervalle de } \mathbb{R}.$$

Le problème 1D

$$X = \{u \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ \text{t.q. } u(0) = u(1) = 0.$$

On cherche $u \in X$ qui vérifie

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v), \qquad (\star)$$

avec $E : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

1. Motivations

1.2. Premiers pas vers la résolution mathématique

Unicité

Avant même d'étudier l'existence de la solution on peut montrer

Proposition

Si $u_1, u_2 \in X$ vérifient

$$E(u_1) = E(u_2) = \inf_{v \in X} E(v), \qquad \Longleftarrow \textit{on note } I_E \textit{ cet } \inf,$$

alors $u_1 = u_2$.

Unicité

Avant même d'étudier l'existence de la solution on peut montrer

Proposition

Si $u_1, u_2 \in X$ vérifient

$$E(u_1) = E(u_2) = \inf_{v \in X} E(v), \qquad \Longleftarrow \textit{on note } I_E \textit{ cet } \inf,$$

alors $u_1 = u_2$.

Preuve :

- On pose $u = \frac{u_1+u_2}{2}$ et on constate que $u \in X$.
- On calcule

$$E(u) = E\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = \frac{1}{2}E(u_1) + \frac{1}{2}E(u_2) - \frac{k}{8}\int_0^1 |u_1' - u_2'|^2\,dx$$

Unicité

Avant même d'étudier l'existence de la solution on peut montrer

Proposition

Si $u_1, u_2 \in X$ vérifient

$$E(u_1) = E(u_2) = \inf_{v \in X} E(v), \qquad \Longleftarrow \textit{on note } I_E \textit{ cet } \inf,$$

alors $u_1 = u_2$.

Preuve :

- On pose $u = \frac{u_1+u_2}{2}$ et on constate que $u \in X$.
- On calcule

$$E(u) = E\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = I_E - \frac{k}{8} \int_0^1 |u_1' - u_2'|^2 \, dx.$$

Unicité

Avant même d'étudier l'existence de la solution on peut montrer

Proposition

Si $u_1, u_2 \in X$ vérifient

$$E(u_1) = E(u_2) = \inf_{v \in X} E(v), \qquad \Longleftarrow \textit{on note } I_E \textit{ cet } \inf,$$

alors $u_1 = u_2$.

Preuve :

- On pose $u = \frac{u_1+u_2}{2}$ et on constate que $u \in X$.
- On calcule

$$E(u) = E\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = I_E - \frac{k}{8}\int_0^1 |u_1' - u_2'|^2\, dx.$$

- Par définition de l'infimum on doit avoir $E(u) \geqslant I_E$ et donc

$$\int_0^1 |u_1' - u_2'|^2\, dx = 0 \;\Rightarrow\; (u_1 - u_2)' = 0 \;\Rightarrow\; u_1 = u_2, \quad \text{cond. bord !.}$$

Unicité

Avant même d'étudier l'existence de la solution on peut montrer

Proposition

Si $u_1, u_2 \in X$ vérifient

$$E(u_1) = E(u_2) = \inf_{v \in X} E(v), \qquad \Longleftarrow \textit{on note } I_E \textit{ cet } \inf,$$

alors $u_1 = u_2$.

Argument général de convexité :

- E est **strictement** convexe
- X est un ensemble convexe

Caractérisation de la solution

On suppose encore qu'il existe une solution $u \in X$ du problème

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v). \qquad (\star)$$

Lemme (Résultat fondamental de l'analyse)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $t^* \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\textit{Si on a } \ \varphi(t^*) = \inf_{\mathbb{R}} \varphi(t), \ \textit{alors } \varphi'(t^*) = 0.$$

Ce lemme est à la base de toute l'analyse réelle ou presque :

- Lemme de Rolle
- Théorème des accroissements finis
- Formules de Taylor. Développements limités.
- Interpolation de Lagrange
- etc ...

Caractérisation de la solution

On suppose encore qu'il existe une solution $u \in X$ du problème

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v). \tag{$\star$}$$

Lemme (Résultat fondamental de l'analyse)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $t^* \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\textit{Si on a } \; \varphi(t^*) = \inf_{\mathbb{R}} \varphi(t), \; \textit{alors } \varphi'(t^*) = 0.$$

Preuve :

- On prend $h > 0$ et on écrit

$$\varphi(t^* + h) - \varphi(t^*) \geqslant 0,$$

Caractérisation de la solution

On suppose encore qu'il existe une solution $u \in X$ du problème

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v). \qquad (\star)$$

Lemme (Résultat fondamental de l'analyse)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $t^* \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\textit{Si on a } \ \varphi(t^*) = \inf_{\mathbb{R}} \varphi(t), \ \textit{alors } \varphi'(t^*) = 0.$$

Preuve :

- On prend $h > 0$ et on écrit

$$\frac{\varphi(t^* + h) - \varphi(t^*)}{h} \geqslant 0,$$

Caractérisation de la solution

On suppose encore qu'il existe une solution $u \in X$ du problème

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v). \tag{$\star$}$$

Lemme (Résultat fondamental de l'analyse)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $t^* \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\textit{Si on a } \; \varphi(t^*) = \inf_{\mathbb{R}} \varphi(t), \; \textit{alors } \varphi'(t^*) = 0.$$

Preuve :

- On prend $h > 0$ et on écrit

$$\varphi'(t^*) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\varphi(t^* + h) - \varphi(t^*)}{h} \geqslant 0,$$

Caractérisation de la solution

On suppose encore qu'il existe une solution $u \in X$ du problème

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v). \qquad (\star)$$

Lemme (Résultat fondamental de l'analyse)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $t^* \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\textit{Si on a } \ \varphi(t^*) = \inf_{\mathbb{R}} \varphi(t), \ \textit{alors } \varphi'(t^*) = 0.$$

Preuve :

- On prend $h > 0$ et on écrit

$$\varphi'(t^*) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\varphi(t^* + h) - \varphi(t^*)}{h} \geqslant 0,$$

- On prend $h < 0$ et on écrit

$$\varphi(t^* + h) - \varphi(t^*) \geqslant 0,$$

Caractérisation de la solution

On suppose encore qu'il existe une solution $u \in X$ du problème

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v). \qquad (\star)$$

Lemme (Résultat fondamental de l'analyse)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $t^* \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\textit{Si on a } \ \varphi(t^*) = \inf_{\mathbb{R}} \varphi(t), \ \textit{alors } \varphi'(t^*) = 0.$$

Preuve :

- On prend $h > 0$ et on écrit

$$\varphi'(t^*) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\varphi(t^* + h) - \varphi(t^*)}{h} \geqslant 0,$$

- On prend $h < 0$ et on écrit

$$\frac{\varphi(t^* + h) - \varphi(t^*)}{h} \leqslant 0,$$

Caractérisation de la solution

On suppose encore qu'il existe une solution $u \in X$ du problème

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v). \tag{$\star$}$$

Lemme (Résultat fondamental de l'analyse)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $t^* \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\textit{Si on a } \ \varphi(t^*) = \inf_{\mathbb{R}} \varphi(t), \ \textit{alors } \varphi'(t^*) = 0.$$

Preuve :

- On prend $h > 0$ et on écrit

$$\varphi'(t^*) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\varphi(t^* + h) - \varphi(t^*)}{h} \geqslant 0,$$

- On prend $h < 0$ et on écrit

$$\varphi'(t^*) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\varphi(t^* + h) - \varphi(t^*)}{h} \leqslant 0,$$

Caractérisation de la solution

On suppose encore qu'il existe une solution $u \in X$ du problème

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v). \tag{$\star$}$$

Lemme (Résultat fondamental de l'analyse)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $t^* \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\text{Si on a } \ \varphi(t^*) = \inf_{\mathbb{R}} \varphi(t), \ \text{alors } \varphi'(t^*) = 0.$$

Proposition (Equations d'Euler-Lagrange)

Si $u \in X$ vérifie ($\star$), alors on a

$$k \int_0^1 u'(x)v'(x) - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx = 0, \quad \forall v \in X. \tag{$\star\star$}$$

Preuve : On fixe $v \in X$.

On pose $t \mapsto \varphi(t) = E(u + tv)$ et on applique le lemme à $t^* = 0$.

Caractérisation de la solution

On suppose encore qu'il existe une solution $u \in X$ du problème

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v). \qquad (\star)$$

Lemme (Résultat fondamental de l'analyse)

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $t^* \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\textit{Si on a } \ \varphi(t^*) = \inf_{\mathbb{R}} \varphi(t), \ \textit{alors } \varphi'(t^*) = 0.$$

Proposition (Equations d'Euler-Lagrange)

Si $u \in X$ vérifie $(\star)$, alors on a

$$k \int_0^1 u'(x)v'(x) - \int_0^1 f(x)v(x)\, dx = 0, \quad \forall v \in X. \qquad (\star\star)$$

Dans ce cas particulier, on peut vérifier que la réciproque est vraie :

$$u \in X \text{ vérifie } (\star\star) \Longrightarrow u \text{ vérifie } (\star).$$

Caractérisation de la solution

Proposition (Equations d'Euler-Lagrange)

Si $u \in X$ vérifie $(\star)$, alors on a

$$k\int_0^1 u'(x)v'(x) - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx = 0, \quad \forall v \in X. \qquad (\star\star)$$

Caractérisation de la solution

Proposition (Equations d'Euler-Lagrange)

Si $u \in X$ vérifie $(\star)$, alors on a

$$k \int_0^1 u'(x)v'(x) - \int_0^1 f(x)v(x)\, dx = 0, \quad \forall v \in X. \tag{$\star\star$}$$

Théorème

Si $u \in X$ vérifie $(\star\star)$ **et que de plus** $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$*, alors on a*

$$\begin{cases} -ku''(x) = f(x), & \textit{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{$\star\star\star$}$$

La réciproque est vraie.

Caractérisation de la solution

Proposition (Equations d'Euler-Lagrange)

Si $u \in X$ vérifie $(\star)$, alors on a

$$k \int_0^1 u'(x)v'(x) - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx = 0, \quad \forall v \in X. \qquad (\star\star)$$

Théorème

Si $u \in X$ vérifie $(\star\star)$ **et que de plus** $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$, *alors on a*

$$\begin{cases} -ku''(x) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \qquad (\star\star\star)$$

La réciproque est vraie.

Vocabulaire : $(\star\star\star)$ est appelé un problème aux limites

= 1 EDP + des conditions au bord (ou aux limites)

Résumé

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v), \qquad (\star)$$

$$k \int_0^1 u'(x)v'(x) - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx = 0, \quad \forall v \in X, \qquad (\star\star)$$

$$\begin{cases} -ku''(x) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \qquad (\star\star\star)$$

Relations

$$(\star) \Rightarrow (\star\star), \quad \text{et} \quad (\star\star) \Rightarrow (\star),$$

$$(\star\star) \overset{\text{si } u \in \mathcal{C}^2}{\Longleftrightarrow} (\star\star\star)$$

- $(\star\star)$ sont les équations d'Euler-Lagrange associées au problème d'optimisation $(\star)$.
- $(\star\star)$ est une formulation variationnelle associée au problème aux limites $(\star\star\star)$.

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Stratégie en 4 étapes

1. On démontre que $I_E := \inf_{v \in X} E(v) > -\infty.$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Stratégie en 4 étapes

1. On démontre que $I_E := \inf_{v \in X} E(v) > -\infty.$
2. On prend une suite minimisante $(u_n)_n \subset X$ pour cet infimum, c'est-à-dire une suite qui vérifie

$$\lim_{n \to \infty} E(u_n) = I_E.$$

Remarque

Une telle suite existe toujours !

Sans hypothèse sur E et X autre que la finitude de l'infimum.

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Stratégie en 4 étapes

1. On démontre que $I_E := \inf_{v \in X} E(v) > -\infty.$
2. On prend une suite minimisante $(u_n)_n \subset X$ pour cet infimum, c'est-à-dire une suite qui vérifie
$$\lim_{n\to\infty} E(u_n) = I_E.$$
3. On essaie de montrer que cette suite (ou une sous-suite) converge en un certain sens vers une limite $u \in X$.

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Stratégie en 4 étapes

1. On démontre que $I_E := \inf_{v \in X} E(v) > -\infty$.
2. On prend une suite minimisante $(u_n)_n \subset X$ pour cet infimum, c'est-à-dire une suite qui vérifie
$$\lim_{n \to \infty} E(u_n) = I_E.$$
3. On essaie de montrer que cette suite (ou une sous-suite) converge en un certain sens vers une limite $u \in X$.
4. On essaie de montrer que E satisfait une propriété de continuité pour établir que $E(u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} E(u)$.

Conclusion

On aura bien résolu le problème
$$E(u) = \lim_{n \to \infty} E(u_n) = I_E = \inf_{v \in X} E(v).$$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 1

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Proposition

On a la propriété : $\inf_{v\in X} E(v) \geqslant -\frac{\|f\|_{L^1}^2}{2k}$.

Analysons la définition de E : Nous avons

- Un « gentil » terme (le premier) qui est toujours positif,
- Un terme qui n'a pas de signe (le second).

Morale : Le premier terme va prendre le dessus sur le second car il est **quadratique** alors que le second est seulement **linéaire** : pour v « grand », le premier terme va dominer le second.

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 1

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Proposition

On a la propriété : $\inf_{v\in X} E(v) \geqslant -\frac{\|f\|_{L^1}^2}{2k}.$

Lemme

Pour tout $v \in X$, on a $\|v\|_{L^\infty} \leqslant \|v'\|_{L^2}$.

Preuve de la proposition : Pour tout $v \in X$, on a
$$\left|\int_0^1 fv\,dx\right| \leqslant \|f\|_{L^1}\|v\|_{L^\infty} \overset{Lem.}{\leqslant} \|f\|_{L^1}\|v'\|_{L^2} \overset{Young}{\leqslant} \frac{1}{2k^2}\|f\|_{L^1}^2 + \frac{k}{2}\|v'\|_{L^2}^2.$$

Inégalité de Young : pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$: $ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 1

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Proposition

On a la propriété : $\inf_{v\in X} E(v) \geqslant -\frac{\|f\|_{L^1}^2}{2k}$.

Lemme

Pour tout $v \in X$*, on a* $\|v\|_{L^\infty} \leqslant \|v'\|_{L^2}$.

Preuve du Lemme : Pour tout $v \in X$, et $x \in [0,1]$, on peut écrire
$$|v(x)| = \left|\underbrace{v(0)}_{=0} + \int_0^x v'(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^1 |v'(t)|\,dt \overset{C.-S.}{\leqslant} \|v'\|_{L^2}.$$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 2

Il existe (toujours) une suite minimisante !

- Comme $I_E > -\infty$, pour tout $n \geqslant 1$, le nombre

$$I_E + \frac{1}{n}$$

n'est pas un minorant de l'ensemble des valeurs de E sur X.

Rappel : La borne inférieure est le plus grand des minorants !

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 2

Il existe (toujours) une suite minimisante !

- Comme $I_E > -\infty$, pour tout $n \geqslant 1$, le nombre
$$I_E + \frac{1}{n}$$
n'est pas un minorant de l'ensemble des valeurs de E sur X.
Rappel : La borne inférieure est le plus grand des minorants !
- Comme ce n'est pas un minorant, il existe au moins un élément de X (noté u_n) tel que
$$I_E \leqslant E(u_n) \leqslant I_E + \frac{1}{n}.$$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 2

Il existe (toujours) une suite minimisante !

- Comme $I_E > -\infty$, pour tout $n \geqslant 1$, le nombre
$$I_E + \frac{1}{n}$$
n'est pas un minorant de l'ensemble des valeurs de E sur X.
Rappel : La borne inférieure est le plus grand des minorants !
- Comme ce n'est pas un minorant, il existe au moins un élément de X (noté u_n) tel que
$$I_E \leqslant E(u_n) \leqslant I_E + \frac{1}{n}.$$
- Par le théorème des gendarmes on a bien
$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Remarque

Pas besoin de topologie sur X ni de propriétés de E.

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels : $X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$

$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est

$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est
$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Une question plus simple

Est-ce que la suite $(u_n)_n$ est bornée ?

La réponse dépend de la norme qu'on prend sur X !

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est
$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Une question plus simple

Est-ce que la suite $(u_n)_n$ est bornée ?

La réponse dépend de la norme qu'on prend sur X !

- Norme usuelle sur X : $\|v\|_{\mathcal{C}^1} = \|v\|_{L^\infty} + \|v'\|_{L^\infty}$
  Problème : Il existe des suites $(v_n)_n$ telles que $(E(v_n))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$ mais $\|v_n\|_{\mathcal{C}^1}$ n'est pas bornée !

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels : $X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$

$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est

$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Une question plus simple

Est-ce que la suite $(u_n)_n$ est bornée ?

La réponse dépend de la norme qu'on prend sur X !

- Norme sur X adaptée au problème : $\|v\|_{H^1}^2 := \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$
  C'est gagné ! Toute suite vérifiant $(E(v_n))_n$ est bornée dans $\mathbb{R}$, vérifie $(v_n)_n$ est bornée dans $(X, \|.\|_{H^1})$.

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est
$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Proposition

La suite minimisante $(u_n)_n$ pour $(\star)$ est de Cauchy dans $(X, \|.\|_{H^1})$.

Preuve

Rappel : $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$.

$$\frac{k}{8}\int_0^1 |u_n' - u_{n+p}'|^2\,dx = \frac{E(u_n) + E(u_{n+p})}{2} - E\left(\frac{u_n + u_{n+p}}{2}\right).$$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels : $$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$

$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est

$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Proposition

La suite minimisante $(u_n)_n$ pour $(\star)$ est de Cauchy dans $(X, \|.\|_{H^1})$.

Preuve

Rappel : $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2.$

$$\frac{k}{8}\int_0^1 |u_n' - u_{n+p}'|^2\,dx \leqslant \frac{E(u_n) + E(u_{n+p})}{2} - I_E.$$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est
$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Proposition

La suite minimisante $(u_n)_n$ pour $(\star)$ est de Cauchy dans $(X, \|.\|_{H^1})$.

Preuve

Rappel : $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$.

$$\|u_n' - u_{n+p}'\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{unif. en } p.$$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est
$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Proposition

La suite minimisante $(u_n)_n$ pour $(\star)$ est de Cauchy dans $(X, \|.\|_{H^1})$.

Preuve

Rappel : $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$.
$$\|u_n - u_{n+p}\|_{L^\infty} \leqslant \|u_n' - u_{n+p}'\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{unif. en } p.$$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est
$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Proposition

La suite minimisante $(u_n)_n$ pour $(\star)$ est de Cauchy dans $(X, \|.\|_{H^1})$.

Preuve

Rappel : $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$.

$$\|u_n - u_{n+p}\|_{L^2} \leqslant \|u_n - u_{n+p}\|_{L^\infty} \leqslant \|u_n' - u_{n+p}'\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{unif. en } p.$$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est
$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Proposition

La suite minimisante $(u_n)_n$ pour $(\star)$ est de Cauchy dans $(X, \|.\|_{H^1})$.

Preuve

Rappel : $\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2$.

$$\|u_n - u_{n+p}\|_{L^2} \leqslant \|u_n - u_{n+p}\|_{L^\infty} \leqslant \|u_n' - u_{n+p}'\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \text{unif. en } p.$$

Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Etape 3

Rappels :
$$X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ v(0) = v(1)\},$$
$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Objectif

Montrer que $(u_n)_n$, ou une de ses sous-suites, converge en un certain sens.

Difficulté : la seule information dont on dispose sur u_n c'est
$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I_E.$$

Proposition

La suite minimisante $(u_n)_n$ pour $(\star)$ est de Cauchy dans $(X, \|.\|_{H^1})$.

Problème

L'espace $(X, \|.\|_{H^1})$ n'est pas complet !

Fin de la séance 10

2. Espaces de Sobolev en dimension 1

2. Espaces de Sobolev en dimension 1

2.1. L'espace $H^1(I)$

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert **borné** de $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle **espace de Sobolev** $H^1(I)$*, l'ensemble des fonctions u de* $L^2(I)$ *dont la dérivée au sens des distrib. est une fonction de* $L^2(I)$*.*

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert **borné** de $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle **espace de Sobolev** $H^1(I)$*, l'ensemble des fonctions u de* $L^2(I)$ *dont la dérivée au sens des distrib. est une fonction de* $L^2(I)$*.*

Explication / Interprétation

Une fonction $u \in L^2(I)$ est dans $H^1(I)$ **si et seulement si** il existe $g \in L^2(I)$ telle que

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

Cette fonction g est nécessairement unique. On la note $\partial_x u$ ou u'.

On peut donc définir $H^1(I)$ sans utiliser les distributions !

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert **borné** de $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle **espace de Sobolev** $H^1(I)$*, l'ensemble des fonctions* u *de* $L^2(I)$ *dont la dérivée au sens des distrib. est une fonction de* $L^2(I)$.

Définition

On munit l'espace vectoriel $H^1(I)$ *du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} := (u, v)_{L^2} + (\partial_x u, \partial_x v)_{L^2} = \int_I (u\, v + \partial_x u\, \partial_x v)\, dx,$$

et de la norme associée $\|u\|_{H^1} := \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u\|_{L^2}^2}$.

$$\left(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } H^1(I)\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } L^2(I) \\ \partial_x u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \partial_x u \text{ dans } L^2(I) \end{array}\right)$$

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Soit $I =]a, b[$ un intervalle ouvert **borné** de $\mathbb{R}$.

Définition

On appelle **espace de Sobolev** $H^1(I)$*, l'ensemble des fonctions* u *de* $L^2(I)$ *dont la dérivée au sens des distrib. est une fonction de* $L^2(I)$.

Commentaires

- La lettre H vient du fait que, comme on va le voir, ces espaces sont des Hilbert.
- L'exposant 1 renvoie au nombre de dérivées.
  On peut, en effet, définir $H^k(I)$ pour tout $k \geqslant 1$ comme par exemple
  $$H^2(I) := \{u \in L^2(I), \text{ tel que } \partial_x u, \partial_x^2 u \in L^2(I)\}.$$
- Par extension, certains auteurs posent $H^0(I) := L^2(I)$.

Proposition

On a l'inclusion **topologique**

$$\mathcal{C}^1(\overline{I}) \subset H^1(I). \tag{$\star$}$$

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Lien avec les espaces usuels 1/3

Proposition

On a l'inclusion **topologique**

$$\mathcal{C}^1(\bar{I}) \subset H^1(I). \tag{$\star$}$$

Cela signifie que, dans $\mathcal{C}^1(\bar{I})$ la notion de dérivée faible coïncide avec la notion de dérivée usuelle et que l'inclusion $(\star)$ est continue au sens suivant

$$\|u\|_{H^1} \leqslant \sqrt{2|I|}\,\|u\|_{\mathcal{C}^1}, \quad \forall u \in \mathcal{C}^1(\bar{I}).$$

Rappel :

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0(\bar{I})} := \|u\|_{L^\infty(I)},$$
$$\|u\|_{\mathcal{C}^1(\bar{I})} := \|u\|_{L^\infty(I)} + \|\partial_x u\|_{L^\infty(I)}.$$

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Lien avec les espaces usuels 1/3

Proposition

On a l'inclusion **topologique**

$$\mathcal{C}^1(\overline{I}) \subset H^1(I). \qquad (\star)$$

Cela signifie que, dans $\mathcal{C}^1(\overline{I})$ la notion de dérivée faible coïncide avec la notion de dérivée usuelle et que l'inclusion $(\star)$ est continue au sens suivant

$$\|u\|_{H^1} \leqslant \sqrt{2|I|}\, \|u\|_{\mathcal{C}^1}, \quad \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{I}).$$

Preuve

- Intégration par parties !
  Si u est $\mathcal{C}^1$ alors sa dérivée au sens des distributions est la dérivée au sens usuel ...
- $\|f\|_{L^2(I)} \leqslant \sqrt{|I|}\|f\|_{L^\infty}$.

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Lien avec les espaces usuels 1/3

Proposition

On a l'inclusion **topologique**

$$\mathcal{C}^1(\overline{I}) \subset H^1(I). \qquad (\star)$$

Cela signifie que, dans $\mathcal{C}^1(\overline{I})$ la notion de dérivée faible coïncide avec la notion de dérivée usuelle et que l'inclusion $(\star)$ est continue au sens suivant

$$\|u\|_{H^1} \leqslant \sqrt{2|I|}\,\|u\|_{\mathcal{C}^1}, \quad \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{I}).$$

Concrètement :

$$\left(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } \mathcal{C}^1(\overline{I})\right) \Longrightarrow \left(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } H^1(I)\right)$$

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Lien avec les espaces usuels 2/3

Proposition

On a l'injection **topologique**

$$H^1(I) \subset \mathcal{C}^0(\bar{I}). \qquad (\star\star)$$

Proposition

On a l'injection **topologique**

$$H^1(I) \subset \mathcal{C}^0(\bar{I}). \qquad (\star\star)$$

Cela signifie que toute fonction $u \in H^1(I)$ admet un (unique !) représentant continu et que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0} \leqslant \left(\frac{1}{|I|} + |I|\right) \|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H^1(I).$$

Propriété essentielle :

Le théorème fondamental de l'analyse est vrai dans $H^1(I)$:

$$u(\beta) - u(\alpha) = \int_\alpha^\beta (\partial_x u)\, dx, \quad \forall \alpha, \beta \in I, \forall u \in H^1(I).$$

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Lien avec les espaces usuels 2/3

Proposition

On a l'injection **topologique**

$$H^1(I) \subset \mathcal{C}^0(\bar{I}). \qquad (\star\star)$$

Cela signifie que toute fonction $u \in H^1(I)$ admet un (unique !) représentant continu et que

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0} \leqslant \left(\frac{1}{|I|} + |I|\right) \|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H^1(I).$$

Concrètement : convergence H^1 implique convergence uniforme

$$\left(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } H^1(I)\right) \Longrightarrow \left(u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u \text{ dans } \mathcal{C}^0(\bar{I})\right)$$

Toutes les fonctions H^1 ne sont pas $\mathcal{C}^1$!

- $I =]-1, 1[$ et $u : x \in I \mapsto |x|$

$$\text{alors on a } u \in H^1(I) \text{ et } \partial_x u(x) = \mathcal{H}(x) := \begin{cases} -1, \text{ sur }]-1, 0[, \\ \ \ 1, \text{ sur }]0, 1[. \end{cases}$$

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Lien avec les espaces usuels 3/3

Toutes les fonctions H^1 ne sont pas $\mathcal{C}^1$!

- $I =]-1,1[$ et $u : x \in I \mapsto |x|$

  alors on a $u \in H^1(I)$ et $\partial_x u(x) = \mathcal{H}(x) := \begin{cases} -1, \text{ sur }]-1,0[, \\ 1, \text{ sur }]0,1[. \end{cases}$

- La fonction $\mathcal{H}$ elle-même n'est pas dans $H^1(I)$, car elle n'est pas continue !
  En fait, on peut être plus précis et calculer dans $\mathcal{D}'(I)$

$$\partial_x \mathcal{H} = 2\delta_0 \notin L^2(I).$$

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Lien avec les espaces usuels 3/3

Toutes les fonctions H^1 ne sont pas $\mathcal{C}^1$!

- $I =]-1,1[$ et $u : x \in I \mapsto |x|$

  $$\text{alors on a } u \in H^1(I) \text{ et } \partial_x u(x) = \mathcal{H}(x) := \begin{cases} -1, \text{ sur }]-1,0[, \\ 1, \text{ sur }]0,1[. \end{cases}$$

- La fonction $\mathcal{H}$ elle-même n'est pas dans $H^1(I)$, car elle n'est pas continue !
  En fait, on peut être plus précis et calculer dans $\mathcal{D}'(I)$

  $$\partial_x \mathcal{H} = 2\delta_0 \notin L^2(I).$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère $u : x \in I \mapsto |x|^\alpha$, alors

  $$u \in H^1(I) \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}.$$

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Propriétés topologiques 1/2

Théorème

L'espace $(H^1(I), \|\cdot\|_{H^1})$ *est un espace de Hilbert.*

Théorème

L'espace $(H^1(I), \|\cdot\|_{H^1})$ est un espace de Hilbert.

Preuve :

- Soit $(u_n)_n$ de Cauchy dans $H^1(I)$. Comme nous avons
$$\|u_n - u_{n+p}\|_{H^1}^2 = \|u_n - u_{n+p}\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u_n - \partial_x u_{n+p}\|_{L^2}^2,$$
nous savons que $(u_n)_n$ et $(\partial_x u_n)_n$ sont de Cauchy dans $L^2(I)$.
- Comme $L^2(I)$ est complet, il existe $u, g \in L^2(I)$ telles que
$$\|u_n - u\|_{L^2} + \|\partial_x u_n - g\|_{L^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \qquad (\star)$$
- Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ nous avons
$$\int_I u_n (\partial_x \varphi)\, dx = -\int_I (\partial_x u_n) \varphi\, dx.$$
- On a donc montré que $u \in H^1(I)$ et $\partial_x u = g$.
- $(\star)$ montre que $\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Propriétés topologiques 1/2

Théorème

L'espace $(H^1(I), \|\cdot\|_{H^1})$ *est un espace de Hilbert.*

Preuve :

- Soit $(u_n)_n$ de Cauchy dans $H^1(I)$. Comme nous avons
$$\|u_n - u_{n+p}\|_{H^1}^2 = \|u_n - u_{n+p}\|_{L^2}^2 + \|\partial_x u_n - \partial_x u_{n+p}\|_{L^2}^2,$$
nous savons que $(u_n)_n$ et $(\partial_x u_n)_n$ sont de Cauchy dans $L^2(I)$.
- Comme $L^2(I)$ est complet, il existe $u, g \in L^2(I)$ telles que
$$\|u_n - u\|_{L^2} + \|\partial_x u_n - g\|_{L^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \qquad (\star)$$
- Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ nous avons
$$\int_I u(\partial_x \varphi)\, dx = -\int_I g\varphi\, dx.$$
- On a donc montré que $u \in H^1(I)$ et $\partial_x u = g$.
- $(\star)$ montre que $\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

L'espace de Sobolev $H^1(I)$

Propriétés topologiques 1/2

Théorème

L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\bar{I})$ est dense dans $H^1(I)$.

Preuve admise :

- Extension à $\mathbb{R}$ tout entier des fonctions de $H^1(I)$.
- Convolution

Conséquence

$H^1(I)$ est **le complété** de $\mathcal{C}^1(\bar{I})$ pour la norme $\|.\|_{H^1}$.

2. Espaces de Sobolev en dimension 1

2.2. L'espace $H_0^1(I)$

L'espace $H_0^1(I)$

Définition

On définit l'espace $H_0^1(I) := \{u \in H^1(I),\ u(0) = u(1) = 0\}$.

Remarques :

- Cette définition a un sens car on a choisi le représentant continu sur $\overline{I}$.
- L'indice 0 indique que les fonctions sont nulles au bord.

L'espace $H^1_0(I)$

Définition

On définit l'espace $H^1_0(I) := \{u \in H^1(I),\ u(0) = u(1) = 0\}$*.*

Proposition

$H^1_0(I)$ *est un sous-espace fermé de* $H^1(I)$*.*

En particulier, c'est un espace de Hilbert.

Preuve :

- L'application linéaire

$$\gamma : u \in H^1(\Omega) \mapsto \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

  est continue, grâce à l'injection topologique $H^1(I) \subset \mathcal{C}^0(\bar{I})$.
- $H^1_0(I)$ est le noyau de γ, c'est donc un fermé de $H^1(I)$.

L'espace $H^1_0(I)$

Définition

On définit l'espace $H^1_0(I) := \{u \in H^1(I),\ u(0) = u(1) = 0\}$.

Proposition

$H^1_0(I)$ *est un sous-espace fermé de* $H^1(I)$.

En particulier, c'est un espace de Hilbert.

Proposition (Inégalité de Poincaré)

Pour tout $u \in H^1_0(I)$, *on a* $\|u\|_{L^2} \leqslant |I|\,\|\partial_x u\|_{L^2}$.

Remarque : Cette inégalité **n'est pas** vraie dans $H^1(I)$!

L'espace $H^1_0(I)$

Définition

On définit l'espace $H^1_0(I) := \{u \in H^1(I),\ u(0) = u(1) = 0\}$.

Proposition

$H^1_0(I)$ *est un sous-espace fermé de* $H^1(I)$.

En particulier, c'est un espace de Hilbert.

Proposition (Inégalité de Poincaré)

Pour tout $u \in H^1_0(I)$, *on a* $\|u\|_{L^2} \leqslant |I|\, \|\partial_x u\|_{L^2}$.

Conséquence principale

$$\|\partial_x u\|^2_{L^2} \leqslant \|u\|^2_{L^2} + \|\partial_x u\|^2_{L^2} \leqslant (1 + |I|^2)\|\partial_x u\|^2_{L^2}.$$

L'espace $H_0^1(I)$

Définition

On définit l'espace $H_0^1(I) := \{u \in H^1(I),\ u(0) = u(1) = 0\}$.

Proposition

$H_0^1(I)$ *est un sous-espace fermé de* $H^1(I)$.

En particulier, c'est un espace de Hilbert.

Proposition (Inégalité de Poincaré)

Pour tout $u \in H_0^1(I)$, *on a* $\|u\|_{L^2} \leqslant |I|\, \|\partial_x u\|_{L^2}$.

Conséquence principale

$$\|\partial_x u\|_{L^2}^2 \leqslant \|u\|_{H^1}^2 \leqslant (1 + |I|^2)\|\partial_x u\|_{L^2}^2.$$

Donc

$$u \in H_0^1(I) \mapsto \|\partial_x u\|_{L^2},$$

est une norme sur $H_0^1(I)$ équivalente à $\|.\|_{H^1}$.

L'espace $H^1_0(I)$

Définition

On définit l'espace $H^1_0(I) := \{u \in H^1(I),\ u(0) = u(1) = 0\}$.

Proposition

$H^1_0(I)$ *est un sous-espace fermé de* $H^1(I)$.

En particulier, c'est un espace de Hilbert.

Proposition (Inégalité de Poincaré)

Pour tout $u \in H^1_0(I)$, *on a* $\|u\|_{L^2} \leqslant |I|\, \|\partial_x u\|_{L^2}$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{C}^\infty_c(I)$ *est dense dans* $H^1_0(I)$.

Preuve admise

L'espace $H_0^1(I)$

Définition

On définit l'espace $H_0^1(I) := \{u \in H^1(I),\ u(0) = u(1) = 0\}$.

Proposition

$H_0^1(I)$ *est un sous-espace fermé de* $H^1(I)$.

En particulier, c'est un espace de Hilbert.

Proposition (Inégalité de Poincaré)

Pour tout $u \in H_0^1(I)$, *on a* $\|u\|_{L^2} \leqslant |I|\,\|\partial_x u\|_{L^2}$.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ *est dense dans* $H_0^1(I)$.

Conséquence

$H_0^1(I)$ est **le complété** de $X = \{u \in \mathcal{C}^1(\bar{I}), u(0) = u(1) = 0\}$ pour la norme H^1.

2. Espaces de Sobolev en dimension 1

2.3. Résolution du problème de la corde élastique

Retour sur le problème de la corde élastique

Problème initial : On cherche $u \in X$ tel que

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v),$$

avec

$$X := \{v \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), v(0) = v(1) = 0\},$$

$$E(v) := \frac{k}{2} \int_0^1 |v'|^2 \, dx - \int_0^1 fv \, dx.$$

Retour sur le problème de la corde élastique

Problème initial : On cherche $u \in X$ tel que

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v),$$

avec

$$X := \{v \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), v(0) = v(1) = 0\},$$

$$E(v) := \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Changement d'espace de travail : On cherche $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} E(v). \tag{$\star$}$$

Retour sur le problème de la corde élastique

$$E(v) := \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Changement d'espace de travail : On cherche $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$E(u) = \inf_{v\in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

On reprend la démarche générale

Retour sur le problème de la corde élastique

$$E(v) := \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Changement d'espace de travail : On cherche $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$E(u) = \inf_{v\in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

On reprend la démarche générale

- Etape 1 : $\inf_{H_0^1} E > -\infty \Longrightarrow$ OK même preuve !

Retour sur le problème de la corde élastique

$$E(v) := \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Changement d'espace de travail : On cherche $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$E(u) = \inf_{v\in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

On reprend la démarche générale

- Etape 1 : $\inf_{H_0^1} E > -\infty \Longrightarrow$ OK même preuve !
- Etape 2 : $\exists$ suite minimisante $(u_n)_n \Longrightarrow$ OK c'est toujours vrai !

Retour sur le problème de la corde élastique

$$E(v) := \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Changement d'espace de travail : On cherche $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

On reprend la démarche générale

- Etape 1 : $\inf_{H_0^1} E > -\infty \Longrightarrow$ OK même preuve !
- Etape 2 : $\exists$ suite minimisante $(u_n)_n \Longrightarrow$ OK c'est toujours vrai !
- Etape 3 : $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $H_0^1 \Longrightarrow$ OK même preuve !

H_0^1 est complet $\Rightarrow$ il existe $u \in H_0^1(]0,1[)$ t.q. $\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Retour sur le problème de la corde élastique

$$E(v) := \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Changement d'espace de travail : On cherche $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

On reprend la démarche générale

- Etape 1 : $\inf_{H_0^1} E > -\infty \Longrightarrow$ OK même preuve !
- Etape 2 : $\exists$ suite minimisante $(u_n)_n \Longrightarrow$ OK c'est toujours vrai !
- Etape 3 : $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $H_0^1 \Longrightarrow$ OK même preuve !

H_0^1 est complet $\Rightarrow$ il existe $u \in H_0^1(]0,1[)$ t.q. $\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

- Etape 4 : On a bien la convergence

$$E(u_n) = \frac{k}{2}\|\partial_x u_n\|_{L^2}^2 - \int_0^1 fu_n\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{k}{2}\|\partial_x u\|_{L^2}^2 - \int_0^1 fu\,dx = E(u).$$

Retour sur le problème de la corde élastique

$$E(v) := \frac{k}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$

Changement d'espace de travail : On cherche $u \in H_0^1(]0,1[)$ tel que

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

On reprend la démarche générale

- Etape 1 : $\inf_{H_0^1} E > -\infty \Longrightarrow$ OK même preuve !
- Etape 2 : $\exists$ suite minimisante $(u_n)_n \Longrightarrow$ OK c'est toujours vrai !
- Etape 3 : $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $H_0^1 \Longrightarrow$ OK même preuve !

H_0^1 est complet $\Rightarrow$ il existe $u \in H_0^1(]0,1[)$ t.q. $\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

- Etape 4 : On a bien la convergence

$$E(u_n) = \frac{k}{2}\|\partial_x u_n\|_{L^2}^2 - \int_0^1 fu_n\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{k}{2}\|\partial_x u\|_{L^2}^2 - \int_0^1 fu\,dx = E(u).$$

- Conclusion : u vérifie $(\star)$

Retour sur le problème de la corde élastique

Où en est-on ?

On vient de montrer qu'il existe un $u \in H_0^1(I)$ vérifiant

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

Retour sur le problème de la corde élastique

Où en est-on ?

On vient de montrer qu'il existe un $u \in H_0^1(I)$ vérifiant

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

Unicité : Même preuve qu'avant (par stricte convexité de E)

Retour sur le problème de la corde élastique

Où en est-on ?

On vient de montrer qu'il existe un $u \in H^1_0(I)$ vérifiant

$$E(u) = \inf_{v \in H^1_0(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

Unicité : Même preuve qu'avant (par stricte convexité de E)

Equations d'Euler-Lagrange :

$$k \int_0^1 \partial_x u \partial_x v \, dx - \int_0^1 f v \, dx = 0, \quad \forall v \in H^1_0(]0,1[), \qquad (\star\star)$$

On a l'équivalence (même preuve qu'avant) $\quad (\star) \Leftrightarrow (\star\star)$.

Retour sur le problème de la corde élastique

Où en est-on ?

On vient de montrer qu'il existe un $u \in H_0^1(I)$ vérifiant

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

Unicité : Même preuve qu'avant (par stricte convexité de E)

Equations d'Euler-Lagrange :

$$k \int_0^1 \partial_x u \partial_x v \, dx - \int_0^1 f v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[), \qquad (\star\star)$$

On a l'équivalence (même preuve qu'avant) $\quad (\star) \Leftrightarrow (\star\star)$.

Proposition (Régularité)

Si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ alors la solution de $(\star)/(\star\star)$ est dans $\mathcal{C}^2([0,1])$ et vérifie

$$\begin{cases} -ku''(x) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \qquad (\star\star\star)$$

Retour sur le problème de la corde élastique

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

$$k \int_0^1 \partial_x u \partial_x v \, dx - \int_0^1 f v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[), \qquad (\star\star)$$

$$\begin{cases} -k u''(x) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \qquad (\star\star\star)$$

- On vient de montrer l'existence et l'unicité d'une solution de $(\star)$ qui est aussi l'unique solution de $(\star\star)$.
- Puis on a montré que, si $f \in \mathcal{C}^0$, alors cette solution est régulière et est l'unique solution du problème aux limites $(\star\star\star)$.
- **Quelque chose de troublant :** Finalement la solution appartient à l'espace X qu'on avait initialement envisagé ...

Retour sur le problème de la corde élastique

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(]0,1[)} E(v). \qquad (\star)$$

$$k \int_0^1 \partial_x u \partial_x v \, dx - \int_0^1 f v \, dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(]0,1[), \qquad (\star\star)$$

$$\begin{cases} -ku''(x) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \qquad (\star\star\star)$$

La suite de l'aventure :

- Mettre en place une méthodologie générale / générique pour résoudre des problèmes du type $(\star)$, $(\star\star)$ et/ou $(\star\star\star)$ qui utilise tous les outils introduits.
- Eviter de tout refaire *à la main* à chaque fois ...

Fin de la séance 11

3. Formulations variationnelles d'un problème aux limites

3. Formulations variationnelles d'un problème aux limites

3.1. Principes généraux

Problématique

Episode précédent

Pour $k > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ on a montré l'existence et l'unicité d'une solution au problème aux limites

$$\begin{cases} -ku''(x) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

par une méthode d'optimisation dans un espace de Sobolev.

Problématique

Episode précédent

Pour $k > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ on a montré l'existence et l'unicité d'une solution au problème aux limites

$$\begin{cases} -ku''(x) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

par une méthode d'optimisation dans un espace de Sobolev.

Question

Que faire pour d'autres problèmes aux limites du type

$$\begin{cases} Au = f, \quad \text{dans } I, \\ \quad + \text{ conditions au bord.} \end{cases} \tag{P}$$

- A est un opérateur différentiel (linéaire) du second ordre
- les conditions au bord (linéaires) impliquent u et/ou $\partial_x u$

Formulation variationnelle

$$\begin{cases} Au = f, \quad \text{dans } I, \\ \quad + \text{ conditions au bord.} \end{cases} \tag{P}$$

Scenario : **pour l'instant tout est formel !**

Formulation variationnelle

$$\begin{cases} Au = f, \quad \text{dans } I, \\ \quad + \text{ conditions au bord.} \end{cases} \tag{P}$$

Scenario : **pour l'instant tout est formel !**

- On multiplie l'équation par une fonction test v et on intègre sur I

$$\int_I (Au)v\,dx = \int_I fv\,dx.$$

Formulation variationnelle

$$\begin{cases} Au = f, \quad \text{dans } I, \\ \quad + \text{ conditions au bord.} \end{cases} \tag{P}$$

Scenario : **pour l'instant tout est formel !**

- On multiplie l'équation par une fonction test v et on intègre sur I

$$\int_I (Au)v\,dx = \int_I fv\,dx.$$

- On fait des intégrations par parties (combien ? lesquelles ? …)

$$\int_I (B_1 u)(B_2 v)\,dx = \int_I fv\,dx + \text{Termes de bord éventuels.} \tag{FV}$$

Formulation variationnelle

$$\begin{cases} Au = f, & \text{dans } I, \\ & \text{+ conditions au bord.} \end{cases} \qquad (P)$$

Scenario : **pour l'instant tout est formel !**

- On multiplie l'équation par une fonction test v et on intègre sur I

$$\int_I (Au)v\,dx = \int_I fv\,dx.$$

- On fait des intégrations par parties (combien ? lesquelles ? ...)

$$\int_I (B_1u)(B_2v)\,dx = \int_I fv\,dx + \text{Termes de bord éventuels.} \qquad (FV)$$

- On choisit des espaces fonctionnels pour u et v, resp. X et V.

Critères de choix

- Tous les termes dans (FV) doivent être bien définis.
- On doit pouvoir remonter de (FV) jusqu'à (P).
- On doit pouvoir résoudre (FV).

Formulation variationnelle

$$\begin{cases} Au = f, \quad \text{dans } I, \\ \qquad + \text{ conditions au bord.} \end{cases} \tag{P}$$

Scenario : **pour l'instant tout est formel !**

- On multiplie l'équation par une fonction test v et on intègre sur I

$$\int_I (Au)v\,dx = \int_I fv\,dx.$$

- On fait des intégrations par parties (combien ? lesquelles ? ...)

$$\int_I (B_1u)(B_2v)\,dx = \int_I fv\,dx + \text{Termes de bord éventuels.} \tag{FV}$$

- On choisit des espaces fonctionnels pour u et v, resp. X et V.
- Le problème (FV) devient de la forme : trouver $u \in X$ tel que

$$\boxed{\text{Trouver } u \in X, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V,}$$

avec a bilinéaire et L linéaire.

L'outil central

Le théorème de Lax-Milgram

$$\boxed{\text{Trouver } u \in X, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V,}$$

avec $a : X \times V \to \mathbb{R}$ bilinéaire et $L : V \to \mathbb{R}$ linéaire.

Pourquoi cette stratégie a une chance de fonctionner ?

L'outil central

$$\boxed{\text{Trouver } u \in X, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V,}$$

avec $a : X \times V \to \mathbb{R}$ bilinéaire et $L : V \to \mathbb{R}$ linéaire.

Pourquoi cette stratégie a une chance de fonctionner ?

Théorème (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. On suppose :

1. *L est continue.*
2. *a est continue.*
3. *a est coercive : $\exists \alpha > 0$, tel que $a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_H^2$.*

Alors, le problème suivant admet une unique solution

$$\text{Trouver } u \in H, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

L'outil central

$$\boxed{\text{Trouver } u \in X, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V,}$$

avec $a : X \times V \to \mathbb{R}$ bilinéaire et $L : V \to \mathbb{R}$ linéaire.

Pourquoi cette stratégie a une chance de fonctionner ?

Théorème (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. On suppose :

1. *L est continue.*
2. *a est continue.*
3. *a est coercive : $\exists \alpha > 0,$ tel que $a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_H^2$.*

Alors, le problème suivant admet une unique solution

$$\text{Trouver } u \in H, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

L'outil central

$$\boxed{\text{Trouver } u \in X, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in V,}$$

avec $a : X \times V \to \mathbb{R}$ bilinéaire et $L : V \to \mathbb{R}$ linéaire.

Pourquoi cette stratégie a une chance de fonctionner ?

Théorème (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire et $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire. On suppose :

1. *L est continue.*
2. *a est continue.*
3. *a est coercive : $\exists \alpha > 0$, tel que $a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_H^2$.*

Alors, le problème suivant admet une unique solution

$$\textit{Trouver } u \in H, \textit{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

L'outil central

Théorème (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire **continue** *et $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire* **continue***. On suppose que*

$$a \text{ est } \textbf{coercive} \ : \exists \alpha > 0, \ \text{tel que } a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_H^2.$$

Alors, le problème suivant admet une unique solution

$$\text{Trouver } u \in H, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

Preuve : Voir le cours d'Analyse Fonctionnelle (ou dans le poly ...)

- Cas symétrique (i.e. $a(u,v) = a(v,u)$)
  $\rightsquigarrow$ Preuve par l'argument d'optimisation du début du chapitre !
- Cas non symétrique
  $\rightsquigarrow$ Une technique de point fixe.

Théorème (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire **continue** *et $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire* **continue**. *On suppose que*

$$a \text{ est } \textbf{coercive} : \exists \alpha > 0, \text{ tel que } a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_H^2.$$

Alors, le problème suivant admet une unique solution

$$\text{Trouver } u \in H, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

Notre problème : $a(u,v) = \int_I (B_1 u)(B_2 v)\,dx + \ldots,\ L(v) = \int_I fv\,dx + \ldots$

L'outil central

Théorème (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire **continue** *et $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire* **continue**. *On suppose que*

$$a \text{ est } \textbf{coercive} : \exists \alpha > 0, \text{ tel que } a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_H^2.$$

Alors, le problème suivant admet une unique solution

$$\text{Trouver } u \in H, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

Notre problème : $a(u,v) = \int_I (B_1 u)(B_2 v)\, dx + \ldots,\ L(v) = \int_I fv\, dx + \ldots$

- Continuité : Il faut que B_1 et B_2 soient tous les deux continus sur H

  $\boxed{\Longrightarrow H \text{ doit être petit}}$

L'outil central

Théorème (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire **continue** *et $L : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire* **continue**. *On suppose que*

$$a \text{ est } \textbf{coercive} : \exists \alpha > 0, \text{ tel que } a(u,u) \geqslant \alpha \|u\|_H^2.$$

Alors, le problème suivant admet une unique solution

$$\text{Trouver } u \in H, \text{ tel que } a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

Notre problème : $a(u,v) = \int_I (B_1 u)(B_2 v)\,dx + \ldots,\ L(v) = \int_I fv\,dx + \ldots$

- Continuité : Il faut que B_1 et B_2 soient tous les deux continus sur H

  $\Longrightarrow$ H doit être petit

- Coercivité : Il faut que $a(u,u) = \int_I (B_1 u)(B_2 u)\,dx$ majore $\|u\|_H^2$

  $\Longrightarrow$ H ne doit pas être trop petit

3. Formulations variationnelles d'un problème aux limites

3.2. Exemples en dimension 1

Exemples de problèmes aux limites

Ex 1 : Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{P}$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k : I \to \mathbb{R}$ mesurable, bornée, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 1 : Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{P}$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k : I \to \mathbb{R}$ mesurable, bornée, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

$$H = H_0^1(I), \quad \Leftarrow \text{contient les conditions aux limites},$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 1 : Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k : I \to \mathbb{R}$ mesurable, bornée, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

$$H = H^1_0(I), \quad \Leftarrow \text{contient les conditions aux limites},$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Peut-on appliquer le théorème de Lax-Milgram ?

- H est un Hilbert.
- L est continue : $|L(v)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_H$.
- a est continue : $|a(u,v)| \leqslant \|k\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2}\|\partial_x v\|_{L^2} \leqslant \|k\|_{L^\infty}\|u\|_H\|v\|_H$.
- a est coercive : $a(u,u) = \int_I k(x)|\partial_x u|^2\,dx \geqslant \alpha\|\partial_x u\|^2_{L^2} \geqslant C\|u\|^2_H$.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 1 : Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k : I \to \mathbb{R}$ mesurable, bornée, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

$$H = H_0^1(I), \quad \Leftarrow \text{contient les conditions aux limites},$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Qu'a-t'on obtenu ? Un élément $u \in H$ qui vérifie

$$\int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx = \int_I fv\,dx, \quad \forall v \in H.$$

Mais encore ?

- Comme $\mathcal{D}(I) \subset H$, on a $-\partial_x\Big[k(\partial_x u)\Big] = f$ au sens de $\mathcal{D}'(I)$.
- Si $k \in \mathcal{C}^1$ et $f \in \mathcal{C}^0$, alors $u \in \mathcal{C}^2$ et vérifie (P) au sens usuel.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 2 : Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet non-homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u_g, \; u(1) = u_d, \end{cases} \tag{P}$$

avec $f \in L^2(I)$, $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$, $u_g, u_d \in \mathbb{R}$.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 2 : Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet non-homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u_g,\ u(1) = u_d, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$, $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$, $u_g, u_d \in \mathbb{R}$.

Remarques

- On ne peut plus travailler dans $H = H_0^1(I)$!

Ex 2 : Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet non-homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u_g,\ u(1) = u_d, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$, $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$, $u_g, u_d \in \mathbb{R}$.

Remarques

- On ne peut plus travailler dans $H = H^1_0(I)$!
- On ne peut pas non plus travailler dans $H = H^1(I)$ ...
  Sinon les intégrations par parties vont faire apparaître des termes de la forme
  $$\Big[(\partial_x u)v\Big]_0^1,$$
  dont on ne saura pas quoi faire (car v est **aussi dans** H !)

Exemples de problèmes aux limites

Ex 2 : Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet non-homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u_g, \ u(1) = u_d, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$, $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$, $u_g, u_d \in \mathbb{R}$.

Remarques

- On ne peut plus travailler dans $H = H_0^1(I)$!
- On ne peut pas non plus travailler dans $H = H^1(I)$ ...
  Sinon les intégrations par parties vont faire apparaître des termes de la forme
  $$\Big[(\partial_x u)v\Big]_0^1,$$
  dont on ne saura pas quoi faire (car v est **aussi dans** H !)
- On pourrait refaire le travail d'optimisation dans l'espace affine
  $$A = \big\{u \in H^1(I), u(0) = u_g, u(1) = u_d\big\}.$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 2 : Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet non-homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u_g, \; u(1) = u_d, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$, $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$, $u_g, u_d \in \mathbb{R}$.

Technique de relèvement des données au bord

- On choisit une fonction R qui vérifie

$$R(0) = u_g, \quad R(1) = u_d.$$

- On cherche la solution de (P) sous la forme $u = R + w$.
- La nouvelle inconnue w doit vérifier

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x w\big) = f(x) + \partial_x\big(k(x)\partial_x R\big), \\ w(0) = w(1) = 0. \end{cases} \qquad (\tilde{P})$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 2 : Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet non-homogènes

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u_g,\ u(1) = u_d, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$, $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$, $u_g, u_d \in \mathbb{R}$.

- La nouvelle inconnue w doit vérifier

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x w\big) = f(x) + \partial_x\big(k(x)\partial_x R\big), \\ w(0) = w(1) = 0. \end{cases} \qquad (\tilde{P})$$

- On peut appliquer le théorème de Lax-Milgram à $(\tilde{P})$.
  La seule chose qui change c'est

$$L(v) = \int_I fv\,dx - \int_I \big(k(x)\partial_x R\big)(\partial_x v)\,dx,$$

qui est bien continue

$$|L(v)| \leqslant \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|k\|_{L^\infty}\|\partial_x R\|_{L^2}\|\partial_x v\|_{L^2} \leqslant C\|v\|_H.$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 3 : Problème de Poisson avec un terme d'ordre 0

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) + \gamma u = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 3 : Problème de Poisson avec un terme d'ordre 0

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) + \gamma u = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Le cadre fonctionnel

$$H = H_0^1(I), \quad \Leftarrow \text{contient les conditions aux limites},$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx + \gamma \int_I uv\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

- H est toujours un Hilbert, la continuité de a et L demeurent.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 3 : Problème de Poisson avec un terme d'ordre 0

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) + \gamma u = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

Point délicat : la coercivité de a

$$a(u,u) = \int_I k(x)|\partial_x u|^2\,dx + \gamma \int_I |u|^2\,dx.$$

- Si $\gamma \geqslant 0$, le nouveau terme a le bon signe $\Rightarrow$ OK.
- Si $\gamma < 0$, le nouveau terme a le mauvais signe ...
  - Si $|\gamma|$ est petit, on peut s'en sortir.
  - Sinon, le problème peut ne pas avoir de solution !

Exemples de problèmes aux limites

Ex 4 : Problème de convection-diffusion

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) + b(x)\partial_x u = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$ et $b \in L^\infty(I)$.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 4 : Problème de convection-diffusion

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) + b(x)\partial_x u = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$ et $b \in L^\infty(I)$.

Le cadre fonctionnel

$$H = H_0^1(I), \quad \Leftarrow \text{contient les conditions aux limites},$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx + \int_I b(x)(\partial_x u)v\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

- H est toujours un Hilbert, la continuité de a et L demeurent.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 4 : Problème de convection-diffusion

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) + b(x)\partial_x u = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$ et $b \in L^\infty(I)$.

Point délicat : la coercivité de a

$$a(u,u) = \int_I k(x)|\partial_x u|^2\,dx + \int_I b(x)(\partial_x u)u\,dx.$$

Le nouveau terme n'a pas de signe évident …

Ex 4 : Problème de convection-diffusion

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) + b(x)\partial_x u = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$ et $b \in L^\infty(I)$.

Point délicat : la coercivité de a

$$a(u,u) = \int_I k(x)|\partial_x u|^2\,dx + \int_I b(x)(\partial_x u)u\,dx.$$

Le nouveau terme n'a pas de signe évident ...

- Si $\|b\|_{L^\infty}$ est petit, on peut s'en sortir.

$$\begin{aligned} \left|\int_I b(x)(\partial_x u)u\,dx\right| &\leqslant \|b\|_{L^\infty}\|\partial_x u\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \\ &\leqslant \|b\|_{L^\infty} C_P \|u\|_H^2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_H^2 - \|b\|_{L^\infty} C_P\|u\|_H^2.$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 4 : Problème de convection-diffusion

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) + b(x)\partial_x u = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$ et $b \in L^\infty(I)$.

Point délicat : la coercivité de a

$$a(u,u) = \int_I k(x)|\partial_x u|^2\,dx + \int_I b(x)(\partial_x u)u\,dx.$$

Le nouveau terme n'a pas de signe évident ...

- Si $\|b\|_{L^\infty}$ est petit, on peut s'en sortir.
- Si $b \in \mathcal{C}^1$ on peut intégrer le nouveau terme par parties

$$\int_I b(x)(\partial_x u)u\,dx = \frac{1}{2}b(x)\int_I \partial_x(u^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int_I b'(x)u^2\,dx.$$

  - Si $b' \leqslant 0$, ce terme a le bon signe !
  - Si $\|b'\|_{L^\infty}$ est petit on s'en sort : $a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_H^2 - \|b'\|_{L^\infty}\frac{C_P^2}{2}\|u\|_H^2$.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 5 : Problème de Poisson avec conditions aux limites Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = 0, \; u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 5 : Problème de Poisson avec conditions aux limites Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} \quad -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \color{red}{\partial_x u(0) = 0}, \; u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

- On ne peut pas prendre $H = H_0^1(I)$ car on ne demande pas $u(0) = 0$!

Exemples de problèmes aux limites

Ex 5 : Problème de Poisson avec conditions aux limites Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

- On ne peut pas prendre $H = H^1_0(I)$ car on ne demande pas $u(0) = 0$!
- Peut-on prendre

$$H = \{u \in H^1(I),\ (\partial_x u)(0) = u(1) = 0\} \quad ?$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 5 : Problème de Poisson avec conditions aux limites Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

- On ne peut pas prendre $H = H^1_0(I)$ car on ne demande pas $u(0) = 0$!
- Peut-on prendre

$$\xcancel{H = \{u \in H^1(I),\ (\partial_x u)(0) = u(1) = 0\} \quad ?}$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 5 : Problème de Poisson avec conditions aux limites Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

- On ne peut pas prendre $H = H^1_0(I)$ car on ne demande pas $u(0) = 0$!
- Peut-on prendre

$$\cancel{H = \{u \in H^1(I),\ (\partial_x u)(0) = u(1) = 0\} \quad ?}$$

- Essayons donc, pour l'instant, d'oublier la condition en $x = 0$

$$H = \{u \in H^1(I),\ u(1) = 0\}.$$

  - C'est un sous-espace fermé de H^1 donc un Hilbert.
  - L'inégalité de Poincaré est valable dans H.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 5 : Problème de Poisson avec conditions aux limites Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

$$H = \{u \in H^1(I),\ u(1) = 0\}.$$

Que se-passe-t'il au niveau de l'équation ?

$$-\int_I \partial_x(k(x)\partial_x u)v\,dx = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx - \big[k(x)(\partial_x u)v\big]_0^1$$

- Le terme de bord en $x = 1$ est nul car $v(1) = 0$!
- *A priori*, on ne peut rien faire du terme de bord en $x = 0$

$$k(0)(\partial_x u)(0)v(0),$$

mais on se rappelle qu'on veut $\partial_x u(0) = 0$ et donc **on oublie ce terme dans la formulation variationnelle !**

Exemples de problèmes aux limites

Ex 5 : Problème de Poisson avec conditions aux limites Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

$$H = \{u \in H^1(I),\ u(1) = 0\}.$$

On pose donc

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 5 : Problème de Poisson avec conditions aux limites Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = 0, \; u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

$$H = \{u \in H^1(I), \; u(1) = 0\}.$$

On pose donc

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\, dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\, dx.$$

- Continuité de a et L : OK.

Exemples de problèmes aux limites

Ex 5 : Problème de Poisson avec conditions aux limites Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

$$H = \{u \in H^1(I),\ u(1) = 0\}.$$

On pose donc

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

- Continuité de a et L : OK.
- Coercivité de a : OK (grâce à Poincaré dans H !)

$$a(u,u) = \int_I k(x)|\partial_x u|^2\,dx \geqslant \alpha\|\partial_x u\|_{L^2}^2 \geqslant C\|u\|_H^2.$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 5 : Problème de Poisson avec conditions aux limites Dirichlet-Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = 0,\ u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Le cadre fonctionnel

$$H = \{u \in H^1(I),\ u(1) = 0\}.$$

On pose donc

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

- Continuité de a et L : OK.
- Coercivité de a : OK (grâce à Poincaré dans H !)
- Donc, le théorème de Lax-Milgram donne un $u \in H$ tel que

$$a(u,v) = L(v), \quad \forall v \in H.$$

- Il faut vérifier qu'on a bien résolu le problème initial !

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \qquad \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Quelques remarques :

- S'il existe une solution de (P), on a

$$\int_I f\,dx = -\int_I \partial_x\big(k(x)\partial_x u\big)\,dx = \Big[k(x)\partial_x u\Big]_0^1 = 0.$$

$\Rightarrow$ Condition nécessaire sur f pour avoir l'existence !

- Si u est solution de (P) alors $u + \mathrm{cte}$ est aussi solution $\forall \mathrm{cte} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ pas unicité ! ... ou plutôt unicité à constante près

- Il faut prendre un espace de travail H qui *lutte* contre ce problème

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \Big\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\Big\}, \qquad m(u) = \frac{1}{|I|}\int_I u\,dx.}$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), \quad \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

- H est un fermé de $H^1(I)$ donc c'est un Hilbert.
- L'inégalité de Poincaré est vraie dans $H^1_m(I)$!
- Continuité de a et L : OK.
- Coercivité de a : OK par Poincaré !
- Problème : $\mathcal{C}^\infty_c(I)$ n'est pas inclus dans H !!

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

- Problème : $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ n'est pas inclus dans H !!

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\displaystyle\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

- Problème : $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ n'est pas inclus dans H !!

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. On prend $v = \varphi - m(\varphi) \in H$ dans la formulation

$$a(u, \varphi - m(\varphi)) = L(\varphi - m(\varphi)),$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\displaystyle\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

- Problème : $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ n'est pas inclus dans H !!

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. On prend $v = \varphi - m(\varphi) \in H$ dans la formulation

$$\int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x(\varphi - m(\varphi)))\,dx = \int_I f(\varphi - m(\varphi))\,dx.$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\displaystyle\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

- Problème : $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ n'est pas inclus dans H !!

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. On prend $v = \varphi - m(\varphi) \in H$ dans la formulation

$$\int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x \varphi)\,dx = \int_I f\varphi\,dx - m(\varphi)\left(\int_I f\,dx\right).$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

- Problème : $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ n'est pas inclus dans H !!

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. On prend $v = \varphi - m(\varphi) \in H$ dans la formulation

$$\int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x \varphi)\,dx = \int_I f\varphi\,dx.$$

Donc, u vérifie l'équation au sens des distributions !

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Si f et k sont régulières, on obtient $u \in \mathcal{C}^2$ (comme d'habitude).

- On prend $v \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ telle que $m(v) = 0$ et on utilise l'équation

$$-\int_I \partial_x\Big(k(x)(\partial_x u)\Big)v\,dx = \int_I fv\,dx.$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Si f et k sont régulières, on obtient $u \in \mathcal{C}^2$ (comme d'habitude).

- On prend $v \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ telle que $m(v) = 0$ et on utilise l'équation

$$\int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx + [k(\partial_x u)v]_0^1 = \int_I fv\,dx.$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Si f et k sont régulières, on obtient $u \in \mathcal{C}^2$ (comme d'habitude).

- On prend $v \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$ telle que $m(v) = 0$ et on utilise l'équation

$$a(u,v) + [k(\partial_x u)v]_0^1 = L(v).$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \left\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\right\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Si f et k sont régulières, on obtient $u \in \mathcal{C}^2$ (comme d'habitude).

- On prend $v \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$ telle que $m(v) = 0$ et on utilise l'équation

$$(FV) \ \Rightarrow \left([k(\partial_x u)v]_0^1 = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{I}), m(v) = 0\right).$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \Big\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\Big\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Si f et k sont régulières, on obtient $u \in \mathcal{C}^2$ (comme d'habitude).

- On prend $v \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$ telle que $m(v) = 0$ et on utilise l'équation

$$(FV) \Rightarrow \Big((k\partial_x u)(1)v(1) - (k\partial_x u)(0)v(0) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{I}), m(v) = 0\Big)$$

Exemples de problèmes aux limites

Ex 6 : Problème de Poisson avec conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x\big(k(x)\partial_x u\big) = f(x), & \text{pour tout } x \in]0,1[, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, & \end{cases} \qquad (P)$$

avec $f \in L^2(I)$ et $k \in L^\infty(I)$, avec $\alpha := \inf_I k > 0$.

Cadre fonctionnel : On suppose désormais que $\int_I f\,dx = 0$.

$$\boxed{H = H^1_m(I) := \Big\{u \in H^1(I),\ m(u) = 0\Big\}.}$$

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad \text{et} \quad L(v) = \int_I fv\,dx.$$

Si f et k sont régulières, on obtient $u \in \mathcal{C}^2$ (comme d'habitude).

- On prend $v \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$ telle que $m(v) = 0$ et on utilise l'équation

$$(FV) \Rightarrow \Big((k\partial_x u)(1)v(1) - (k\partial_x u)(0)v(0) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}^1(\bar{I}), m(v) = 0\Big)$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0}$$

Fin de la séance 12