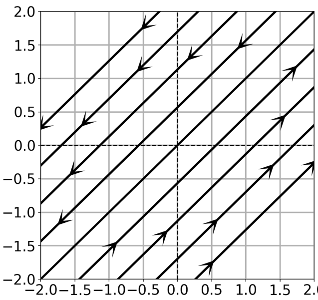
Master Maths et Applications. M1 ESR — Université Paul Sabatier - Toulouse 3 — Année 2018-2019

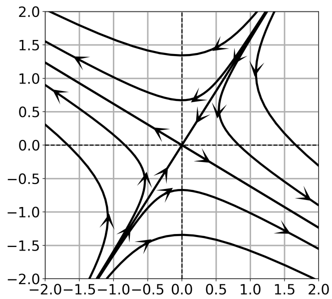
EDO/EDP - Partiel du 21 Février 2019
Avec son corrigé
Aucun document autorisé - Durée : 2h

Exercice 1 (Questions de cours)

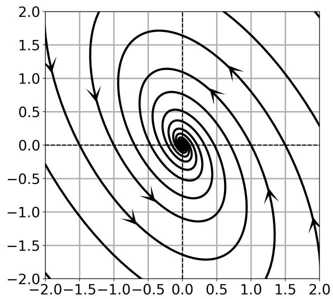
1. Démontrer le lemme de Gronwall :
   Soit $C \in \mathbb{R}$, $a : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue positive et $x : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si x vérifie
   $$x(t) \leq C + \int_0^t a(s)x(s)\, ds, \ \ \forall t \geq 0,$$
   alors on a
   $$x(t) \leq C \exp\left(\int_0^t a(s)\, ds\right), \ \ \forall t \geq 0.$$
2. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs globalement lipschitzien.
   (a) Donner la définition du flot $\varphi : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \mapsto \varphi(t, x) \in \mathbb{R}^d$ associé à ce champ de vecteurs.
   (b) Montrer que
   $$\varphi(t + s, \cdot) = \varphi(t, \cdot) \circ \varphi(s, \cdot), \ \forall t, s \in \mathbb{R}.$$
3. Associer à chacune des matrices suivantes
   $$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} -0.5 & 2 \\ 1 & -0.5 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0.4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
   $$M_4 = \begin{pmatrix} 0.2 & -1 \\ 1 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad M_5 = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ 1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$
   le portrait de phases correspondant parmi les figures ci-dessous. Toutes les réponses devront être (rapidement mais efficacement) justifiées. Il est déconseillé de se lancer dans de lourds calculs.



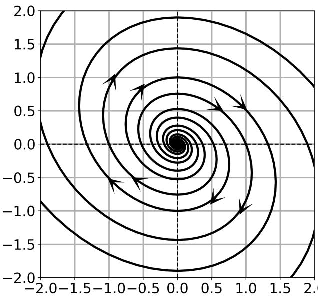
A



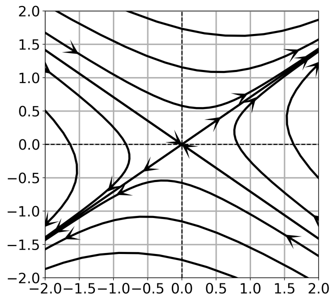
B



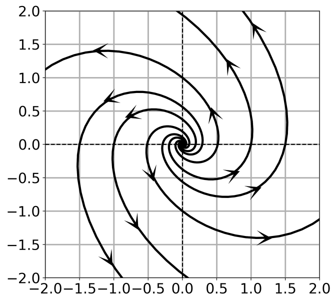
C



D



E



F

Corrigé :

1. Voir cours.

2. Voir cours.
3. On rappelle les propriétés suivantes pour une matrice réelle M de taille 2 :

   — Si $\det M < 0$: M a deux valeurs propres réelles de signes distincts

   — Si $\det M > 0$: ou bien M a deux valeurs propres réelles de même signe, ou bien deux valeurs propres complexes conjuguées. Dans les deux cas, les parties réelles des valeurs propres ont le même signe qui est donné par le signe de la trace.

   — Si $\det M = 0$, 0 est valeur propre et la seconde valeur propre est donnée par la trace.

   Regardons les propriétés des matrices proposées :

   — M_3 et M_4 ont un déterminant et une trace strictement positifs.

   — M_1 a un déterminant strictement négatif et une trace positive.

   — M_5 a un déterminant positif et une trace négative.

   — M_2 a un déterminant strictement négatif et une trace négative

   — M_6 a un déterminant et une trace nulle. Elle est donc de rang 1.

   La figure A montre que toutes les trajectoires sont des droites parallèles. Autrement dit, toutes les flèches définies par le champ de vecteurs linéaire $x \mapsto Mx$ sont parallèles. Cela montre que M doit être de rang 1, il ne peut donc s'agir que de la matrice M_6.

   La figure C montre un point d'équilibre asymptotiquement stable, ce qui correspond au cas où les valeurs propres de la matrice sont toutes les deux de partie réelle strictement négatives. Au vu des propriétés ci-dessus établies ci-dessus, la seule possibilité est M_5.

   Les figures B et E montrent un point instable avec toutefois l'existence de trajectoires particulières (rectilignes) qui convergent vers l'équilibre. On a donc affaire à un point hyperbolique (i.e. avec deux valeurs propres de signe différent). Les deux matrices correspondantes sont donc M_1 et M_2. Pour préciser les choses, on calcule le champ de vecteur en un point particulier, par exemple

$$M_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0.5 \end{pmatrix}.$$

   En ce point, le champ associé à M_1 est donc horizontal et orienté vers la gauche ce qui correspond bien à la figure B alors que le champ associé à M_2 est orienté en bas à droite ce qui correspond bien à la figure E.

   Il nous reste les deux spirales instables D et F qui ne se distinguent que par leur sens de rotation. On procède comme ci-dessus avec les deux matrices restantes M_3 et M_4

$$M_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$M_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0.8 \end{pmatrix}.$$

   Donc le portrait de phase associé à M_3 doit tourner dans le sens horaire c'est donc la figure D, et celui associé à M_4 dans le sens anti-horaire c'est donc la figure F.

   Les réponses sont donc:

$$A \leftrightarrow M_6, \quad B \leftrightarrow M_1 \quad C \leftrightarrow M_5 \quad D \leftrightarrow M_3 \quad E \leftrightarrow M_2 \quad F \leftrightarrow M_4.$$

   A noter que d'autres justifications étaient possibles. Par exemple, la matrice M_1 étant symétrique on sait que ses vecteurs propres sont orthogonaux, cela correspond bien au portrait de phase B.

■

Exercice 2 (Solutions périodiques d'EDO)

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localement lipschitzienne. Montrer que les seules solutions globales et périodiques de $x' = f(x)$ sont les solutions constantes.
2. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs continu et localement lipschitzien par rapport à la variable d'état. On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que
$$f(t+T, x) = f(t, x), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$
Soit (J, x) une solution maximale de l'équation $x' = f(t, x)$.
On suppose qu'il existe $t_1 \in J$, tel que $t_1 + T \in J$ et $x(t_1) = x(t_1 + T)$.
   (a) Montrer que, pour tout $t \in J$ tel que $t + T \in J$ on a $x(t) = x(t + T)$.
   (b) Montrer que $J = \mathbb{R}$ et que x est T-périodique.
3. Soit $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et T-périodique pour un certain $T > 0$.
   (a) Montrer que si $\int_0^T a(s)\,ds = 0$, alors toutes les solutions de $x' = a(t)x$ sont T-périodiques.
   (b) Montrer que si $\int_0^T a(s)\,ds \neq 0$, alors la seule solution T-périodique de $x' = a(t)x$ est la solution nulle.
   (c) Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une autre fonction continue T-périodique. On suppose que $\int_0^T a(s)\,ds \neq 0$. Montrer que l'équation $x' = a(t)x + b(t)$ admet une unique solution T-périodique.

Corrigé :

1. Soit $(\mathbb{R}, x)$ une solution globale de $x' = f(x)$ telle que, pour un certain $T > 0$, on a $x(t + T) = x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
D'après le théorème de Rolle, nous savons qu'il existe un instant $t^* \in \mathbb{R}$ tel que $x'(t^*) = 0$. On pose $x^* = x(t^*)$ et on constate que, d'après l'équation vérifiée par x, on a
$$0 = x'(t^*) = f(x(t^*)) = f(x^*).$$
Le point x^* est donc un point d'équilibre de f. La fonction constante $t \mapsto x^*$ est donc une solution de l'équation qui coïncide avec x au point t^*. Par la propriété d'unicité dans Cauchy-Lipschitz, on en déduit que x est constante.
2. (a) On note $\tilde{J} = \{t \in J, \ \ t + T \in J\}$ qui est un sous-intervalle de J et on définit
$$\tilde{x}(t) = x(t + T), \ \forall t \in \tilde{J}.$$
Par hypothèse, $t_1 \in \tilde{J}$ et on a
$$\tilde{x}(t_1) = x(t_1 + T) = x(t_2) = x(t_1).$$
Par ailleurs, pour tout $t \in \tilde{J}$, en utilisant la périodicité de f, on a
$$\tilde{x}'(t) = x'(t + T) = f(t + T, x(t + T)) = f(t, x(t + T)) = f(t, \tilde{x}(t)).$$
Ainsi, $(\tilde{J}, \tilde{x})$ est une solution du problème de Cauchy associé au champ f et à la donnée $(t_1, x(t_1))$. Par la propriété d'unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, nous savons que $\tilde{x} = x$ sur $\tilde{J}$.
   (b) On pose $J =]\alpha, \beta[$ avec $\alpha \in [-\infty, +\infty[$ et $\beta \in] - \infty, +\infty]$.
Supposons que $\beta < +\infty$. D'après la première question nous avons
$$x(t) = x(t - T), \ \ \forall t \in [t_2, \beta[,$$
et donc
$$\sup_{t \in [t_2, \beta[} |x(t)| = \sup_{t \in [t_2, \beta[} |x(t - T)| = \sup_{t \in [t_1, \beta - T[} |x(t)| \leq \sup_{t \in [t_1, \beta - T]} |x(t)| < +\infty,$$
car x est bornée sur le compact $[t_1, \beta - T]$ (elle est continue sur cet intervalle). Ainsi, la solution x reste bornée au voisinage de β, ce qui contredit le théorème d'explosion en temps fini. On en déduit que $\beta = +\infty$. Le même raisonnement montre que $\alpha = -\infty$ et donc que x est globale.
3. (a) On utilise la formule explicite des solutions de l'équation linéaire non autonome
$$x(t) = x(0) \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right), \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$
Si $\int_0^T a(s)\,ds = 0$, ce calcul montre que l'on a nécessairement $x(T) = x(0)$ et donc que toute solution est périodique d'après la question précédente.

(b) Si $\int_0^T a(s)\,ds \neq 0$, on voit que l'on ne peut avoir l'égalité $x(T) = x(0)$ que si $x(0) = 0$ et donc si $x \equiv 0$.

(c) On utilise la formule de Duhamel pour exprimer la solution exacte associée à une donnée initiale x_0

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t a(\tau)\,d\tau\right) b(s)\,ds.$$

On cherche une donnée initiale x_0 telle que $x(T) = x(0)$ ce qui s'écrit

$$x_0 = x_0 \exp\left(\int_0^T a(s)\,ds\right) + \int_0^T \exp\left(\int_s^T a(\tau)\,d\tau\right) b(s)\,ds.$$

Comme $\int_0^T a \neq 0$, le facteur exponentiel dans le premier terme du second membre n'est pas égal à 1 et on peut donc trouver un unique x_0 qui vérifie cette équation. Cette valeur génère donc l'unique solution T-périodique de l'équation différentielle.

■

Exercice 3 (Espèces en compétition)

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = x(1 - x - \beta y), \\ y'(t) = y(1 - y - \alpha x), \\ x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

avec $\alpha, \beta > 0$. Il modélise l'évolution des populations de deux espèces en compétition (elles partagent une même ressource pour survivre et sont donc en concurrence pour celle-ci).

1. Montrer que ce système différentiel vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz local.
2. On se donne des données initiales x_0, y_0 **positives ou nulles** et on appelle $(J, (x, y))$ la solution maximale associée. Montrer que les fonctions x et y sont positives sur J.
3. Toujours pour des données initiales positives, montrer que

$$x(t) \leq x_0 e^t, \quad \forall t \geq 0,$$

$$y(t) \leq y_0 e^t, \quad \forall t \geq 0.$$

En déduire que $[0, +\infty[\subset J$.

4. A l'aide des résultats vus en cours, discuter en fonction des paramètres α et β la stabilité des trois points d'équilibre

$$P_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, P_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, P_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Peut-on interpréter ces résultats du point de vue du modèle ?

5. Montrer que si

$$\alpha > 1 \text{ et } \beta > 1 \tag{C1}$$

ou bien si

$$\alpha < 1 \text{ et } \beta < 1, \tag{C2}$$

alors il existe un autre équilibre $P_4 := \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$ du système dans le quart de plan $]0, +\infty[^2$, que l'on déterminera. Etudier sa stabilité dans les deux cas (C1) et (C2).

Corrigé :

1. Le champ de vecteurs associé à ce système est donné par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(1 - x - \beta y) \\ y(1 - y - \alpha x) \end{pmatrix},$$

qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc, en particulier, localement lipschitzien par rapport aux variables x, y. On peut donc appliquer à bon droit le théorème de Cauchy-Lipschitz local à ce système différentiel.

2. Si on pose $a(t) = 1 - x(t) - \beta y(t)$ pour $t \in J$, on voit que x vérifie l'équation linéaire

$$x' = a(t)x,$$

et donc on peut écrire

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_0^t a(s)\,ds\right),$$

ce qui prouve que x est positive sur J. Idem pour la variable y.

3. Comme x et y sont positives, on voit directement sur le système que

$$x' \leq x, \;\; y' \leq y,$$

et les résultats du cours sur les inégalités différentielles nous donnent le résultat attendu.
Ces estimations montrent que la solution ne peut pas exploser au voisinage de n'importe quel temps $\beta > 0$ et donc, par le théorème d'explosion en temps fini, nous savons que $[0, +\infty[\subset J$.

4. Calculons la jacobienne du champ en tout point

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - \beta y & -\beta x \\ -\alpha y & 1 - 2y - \alpha x \end{pmatrix}.$$

— Point P_1:

$$Df(P_1) = I,$$

on a donc affaire à un point instable.
Cela montre que quand les deux populations sont faibles, les effets de compétition sont peu significatifs (il y a assez de ressources pour tout le monde) et donc les deux populations croissent.

— Point P_2:

$$Df(P_2) = \begin{pmatrix} -1 & -\beta \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}.$$

— Si $\alpha > 1$ les deux valeurs propres de cette matrice sont strictement négatives, donc le point P_2 est asymptotiquement stable.
Du point de vue du modèle, ce cas correspond à un fort impact sur l'espèce y de la compétition entre les deux espèces. Autrement dit, la lutte pour la survie entre x et y est très défavorable à y. La stabilité du point P_2 dit que, si à l'instant initial la population y est faible devant celle de x, alors elle va finir par s'éteindre et l'espèce x sera finalement la seule à survivre.

— Si $\alpha < 1$ les valeurs propres sont de signe différent donc le point est hyperbolique et instable (via le th. d'Hartman-Grobman), on a affaire à un col.
Cette fois, la lutte pour les ressources n'est pas trop défavorable à y et donc, quand y est faible, l'espèce peut croître tranquillement et éviter d'être anéantie par l'autre espèce.

— Si $\alpha = 1$, les théorèmes du cours ne permettent pas de conclure aisément.

— Point P_3 : on obtient les mêmes résultats que pour P_2 en échangeant les rôles de x et de y (et ceux de α et β).

5. Si on veut trouver un autre équilibre, il s'agit nécessairement d'un état où aucune des deux composantes n'est nulle. Dans ce cas, les équations à résoudre sont donc

$$1 - x^* - \beta y^* = 0,$$

$$1 - y^* - \alpha x^* = 0.$$

La solution s'obtient aisément par élimination et on trouve

$$x^* = \frac{\beta - 1}{\alpha\beta - 1},$$

$$y^* = \frac{\alpha - 1}{\alpha\beta - 1}.$$

Dans les deux cas proposés on a bien affaire à des valeurs strictement positives et donc à un état d'équilibre admissible du point de vue du modèle.
La jacobienne du champ en ce point est donnée par

$$Df(P_4) = \begin{pmatrix} -x^* & -\beta x^* \\ -\alpha y^* & -y^* \end{pmatrix}.$$

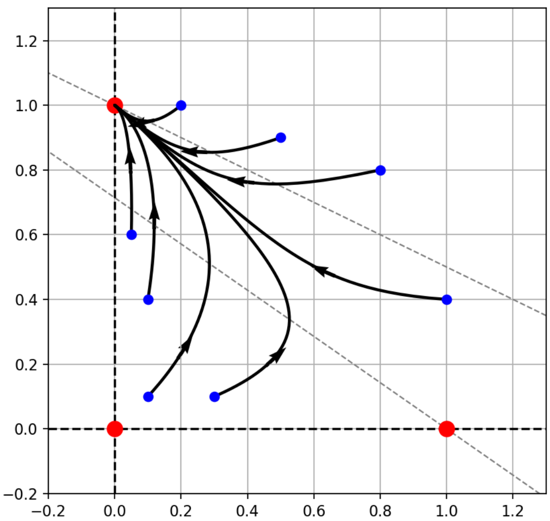
La trace de cette jacobienne est $-x^* - y^*$ qui est strictement négative et son déterminant est $(1 - \alpha\beta)x^* y^*$.

— Dans le cas (C1), le déterminant est négatif donc la matrice a deux valeurs propres réelles de signes différents et donc le point d'équilibre P_4 n'est pas stable. Dans ce cas, comme on l'a vu les deux points P_2 et P_3 sont stables.

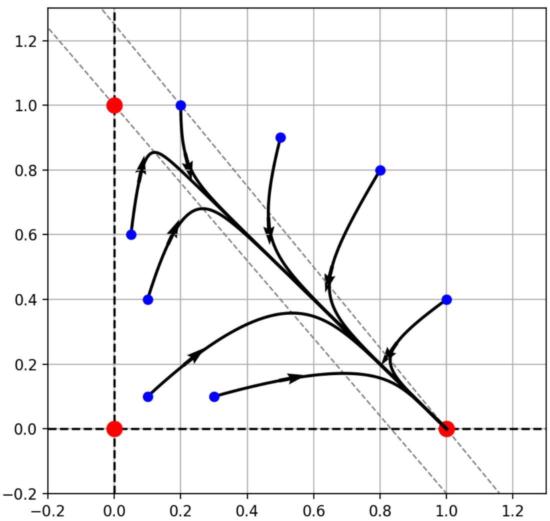
— Dans le cas (C2), le déterminant est positif et la trace est toujours négative donc la matrice a deux valeurs propres de partie réelle strictement négative. On a donc affaire à un point d'équilibre stable. Dans ce cas, les trois autres points sont instables.

Du point de vue du modèle on obtient que, si l'agressivité des deux espèces est faible alors les deux populations vont converger vers un équilibre correspondant à une situation de compromis entre les deux espèces, qui peuvent ainsi cohabiter sans que l'une ne prenne l'ascendant sur l'autre.

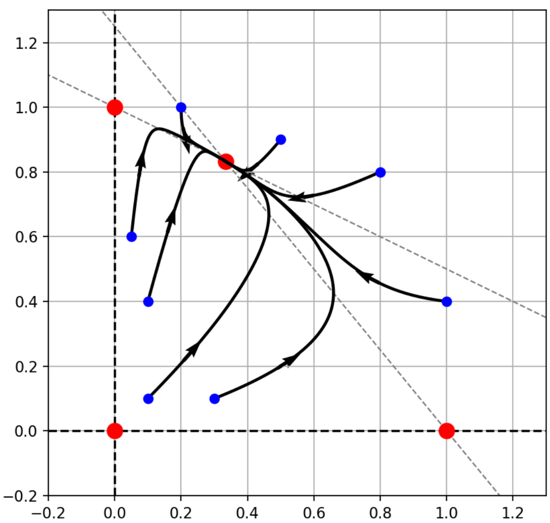
Pour illustrer l'étude fait dans cet exercice, on donne ci-dessous quatre portraits de phase du système pour diverses valeurs des paramètres (points rouges = équilibres, points bleus = points de départ des trajectoires)



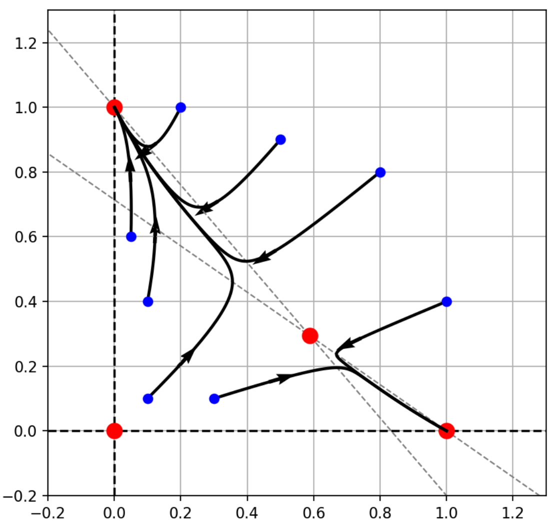
(a) $\alpha = 0.5, \beta = 1.4$ - La deuxième population anéantit la première dans tous les cas



(b) $\alpha = 1.2, \beta = 0.8$ - La première population anéantit la seconde dans tous les cas



(c) $\alpha = 0.5, \beta = 0.8$ - Les deux populations finissent dans un état de cohabitation



(d) $\alpha = 1.2, \beta = 1.4$ - L'une des deux populations prend le dessus sur l'autre, en fonction de la donnée initiale

FIGURE 1: Quelques plans de phase pour le système étudié

■

Exercice 4

Le but de l'exercice est de décrire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle scalaire $x'' = |x|$.

1. Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation sont globales et que x' est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Soit x une solution non identiquement nulle.
   (a) Soit t^* un zéro de x. Montrer que x change de signe au voisinage de t^*.
   (b) Montrer que x ne peut pas s'annuler strictement plus que deux fois.
   (c) Soit J un intervalle ouvert sur lequel x est strictement négative. Montrer que J est borné et de longueur inférieure ou égale à π.
   (d) Montrer que x ne peut pas s'annuler exactement une fois.
3. Déterminer toutes les solutions x qui ne s'annulent pas.
4. Soit x une solution qui s'annule exactement deux fois. On note $\alpha < \beta$ ses deux racines.
   (a) Montrer que x est positive sur $]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$ et négative sur $]\alpha, \beta[$.
   (b) Montrer que $\beta - \alpha = \pi$.
   (c) Déterminer complètement x.

Corrigé :

1. Si on met l'équation sous la forme d'un système d'ordre 1 de taille 2, le champ de vecteurs associé est $f(x, x') = (x', |x|)$ qui est globalement lipschitzien et donc toutes les solutions sont globales, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz global.
   D'après l'équation on voit que x'' est nécessairement positive et donc que x' est bien croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) On va montrer que $x'(t^*) \neq 0$ ce qui donnera le résultat. Pour cela on raisonne par l'absurde en supposant que $x'(t^*) = 0$. Dans ce cas, x vérifie la même donnée de Cauchy en t^* que la solution identiquement nulle. Par unicité, x serait alors identiquement nulle, ce qui est contraire à l'hypothèse.
   (b) Supposons que x admet (au moins) trois zéros distincts $t_1 < t_2 < t_3$. Par le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $\tau_1 < \tau_2$ tels que $x'(\tau_1) = x'(\tau_2) = 0$. Comme x' est croissante, nous déduisons que $x' = 0$ sur tout l'intervalle $[\tau_1, \tau_2]$. En dérivant cette propriété on obtient que $x'' = 0$ sur $]\tau_1, \tau_2[$. D'après l'équation, on en déduit que $x = 0$ sur $]\tau_1, \tau_2[$. Par unicité dans Cauchy-Lipschitz, on en déduit que x est nécessairement identiquement nulle, ce qui est absurde.
   (c) Sur l'intervalle J, l'équation s'écrit $x'' = -x$ et donc x est de la forme $x(t) = A\cos(t + \varphi)$ avec A et φ à déterminer. Si J est de longueur strictement supérieure à π, il contient nécessairement un zéro de la fonction $\cos(t + \varphi)$ et donc x doit nécessairement s'annuler dans J ce qui est exclu.
   (d) Si x s'annule exactement une fois en un point t^*, d'après la question a) x change de signe en t^* et donc x doit être strictement négative sur $]-\infty, t^*[$ ou sur $]t^*, +\infty[$ qui sont des intervalles infinis. Cela contredit la question précédente.
3. Supposons que $x > 0$ sur $\mathbb{R}$. L'équation devient $x'' = x$ et donc x est de la forme

$$x(t) = Ae^t + Be^{-t}.$$

   En considérant les limites de x en $\pm\infty$ et le signe de x, on trouve que $A \geq 0$ et $B \geq 0$ et comme x ne s'annule pas on doit exclure le cas $A = B = 0$.
4. (a) On a vu que x doit changer de signe en α et en β et qu'elle ne peut être négative sur des intervalles infinis, donc la seule solution possible est celle de l'énoncé : x est strictement négative sur $]\alpha, \beta[$ et strictement positive sur $]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$.
   (b) Comme on l'a vu plus haut, dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, x doit s'écrire sous la forme $x(t) = A\cos(t + \varphi)$ avec de plus $\cos(\alpha + \varphi) = \cos(\beta + \varphi)$. Ceci prouve que $\beta - \alpha \in \pi\mathbb{Z}$ mais comme $0 < \beta - \alpha \leq \pi$ d'après la question 2.b), la seule possibilité est que $\beta - \alpha = \pi$.
   (c) On vient de voir que sur $[\alpha, \alpha + \pi]$ on a

$$x(t) = A\cos(t - \alpha - \pi/2),$$

   avec $A < 0$. En particulier on a

$$x'(\alpha) = A,\ x'(\beta) = -A.$$

Sur $]-\infty,\alpha]$ on a donc $x''=x$ et $x(\alpha)=0$, $x'(\alpha)=A$. L'unique solution de ce problème de Cauchy est

$$x(t)=A\sinh(t-\alpha),\ \ \forall t\leq\alpha.$$

Sur $]\beta,+\infty[$ on a de même $x''=x$ et $x(\beta)=0$ et $x'(\beta)=-A$. L'unique solution de ce problème de Cauchy est donnée par

$$x(t)=-A\sinh(t-\beta),\ \ \forall t\geq\beta.$$

■