EDO/EDP - Partiel du 4 Mars 2020
Avec son corrigé
Aucun document autorisé - Durée : 2h

Exercice 1

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. Soit $f : I \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs continu.
   (a) Donner la définition de « f est localement lipschitzien par rapport à la variable d'état ».
   (b) On se donne une donnée de Cauchy $x(t_0) = x_0$, avec $t_0 \in I$. Définir la notion de « solution maximale » pour le problème de Cauchy associé à l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.
2. On considère le problème de Cauchy
$$\begin{cases} x' = tx + (t^2+1)x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{1}$$
   (a) Montrer que (1) admet une unique solution maximale (J, x).
   (b) Démontrer que $x(t) > 0$ pour tout $t \in J$.
   (c) On pose $y(t) = \frac{1}{x(t)}$ pour tout $t \in J$. Montrer que y vérifie une équation différentielle $(\star)$ plus simple que l'équation originale que l'on donnera explicitement.
   (d) Calculer y (on pourra observer que $(\star)$ a une solution particulière évidente).
   En déduire que $]-\infty, 0] \subset J$ mais que $\sup J < +\infty$. Déterminer x.

Corrigé :

1. Voir cours.
2. (a) On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz local au champ de vecteurs $f(t, x) = tx + (t^2+1)x^2$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ dont continu et localement lipschitzien par rapport à la variable d'état.
   (b) La fonction $t \mapsto 0$ est solution de l'équation différentielle. Par le principe d'unicité dans Cauchy-Lipschitz on sait que toute autre solution ne peut jamais s'annuler. Ainsi notre solution x ne peut pas s'annuler et comme elle vaut 1 en $t = 0$, on sait, par le théorème des valeurs intermédiaires qu'elle doit nécessairement rester strictement positive en tout temps.
   (c) Un simple calcul montre que
$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x'}{x^2} \\ &= -\frac{t}{x} - t^2 - 1 \\ &= -ty - t^2 - 1. \end{aligned}$$
   Il s'agit donc d'une équation différentielle linéaire non homogène.
   (d) La solution générale de l'équation homogène satisfaite par y est
$$t \mapsto Ke^{-t^2/2},$$
   et une solution particulière évidente est donnée par
$$t \mapsto -t.$$
   Si on prend en compte la donnée de Cauchy associée à y, on trouve la solution
$$y(t) = -t + e^{-t^2/2}.$$
   On voit que y ne s'annule pas pour $t < 0$ mais qu'en revanche, il existe un unique $T > 0$ tel que $y(T) = 0$. En effet, un calcul élémentaire montre que $y' < 0$ sur $]0, +\infty[$ et par ailleurs que $y(0) = 1$ et $\lim_{+\infty} y = -\infty$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne donc l'existence et l'unicité d'un tel T.
   On conclut de ce qui précède que l'on ne peut retrouver x que sur l'intervalle maximal $J =]-\infty, T[$ par la formule
$$x(t) = \frac{1}{y(t)} = \frac{1}{e^{-t^2/2} - t}.$$

■

Exercice 2

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice carrée donnée.

1. Rappeler la condition nécessaire et suffisante sur A pour que l'équilibre $x^* = 0$ soit asymptotiquement stable pour l'équation différentielle $x' = Ax$.

   On suppose dans toute la suite de l'exercice que cette condition est vérifiée et on notera $\gamma > 0$ un nombre tel que
   $$\|e^{tA}\| \leq C_1 e^{-\gamma t}, \;\; \forall t \geq 0,$$
   pour un certain $C_1 > 0$.

2. Soit maintenant $P : t \in \mathbb{R} \to M_d(\mathbb{R})$ une application continue à valeurs matricielles.

   (a) Démontrer que, pour toute donnée initiale x_0, le problème de Cauchy
   $$\begin{cases} x' = (A + P(t))x, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{2}$$
   admet une unique solution globale.

   (b) La donnée initiale x_0 étant fixée démontrer que x vérifie l'égalité
   $$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}P(s)x(s)\,ds, \quad \forall t \geq 0.$$

   (c) On suppose maintenant que P vérifie l'hypothèse
   $$\int_0^{+\infty} \|P(t)\|\,dt < +\infty.$$
   Démontrer que la fonction $t \mapsto \psi(t) := e^{\gamma t}\|x(t)\|$ vérifie l'inégalité
   $$\psi(t) \leq C_1\|x_0\|e^{C_1 \int\limits_0^{+\infty} \|P(s)\|\,ds}, \quad \forall t \geq 0.$$
   En déduire que 0 est un équilibre asymptotiquement stable pour le système (2).

   (d) On suppose maintenant que P est une application bornée et on note $M > 0$ un nombre tel que
   $$\sup_{t \geq 0} \|P(t)\| \leq M.$$
   En reprenant la preuve de la question précédente, montrer que si la condition
   $$MC_1 < \gamma,$$
   est vérifiée, alors la solution 0 est aussi asymptotiquement stable pour le système (2).

Corrigé :

1. La condition vue en cours est que toutes les valeurs propres de A doivent avoir une partie réelle strictement négative.
2. (a) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, donc le théorème de Cauchy-Lipschitz global (ou linéaire ...) s'applique et donne l'existence et l'unicité d'une solution globale à tout problème de Cauchy associé.

   (b) Si on pose $b(t) = P(t)x(t)$ on voit que x vérifie
   $$x' = Ax + b(t),$$
   et on peut donc utiliser la formule de Duhamel [1] pour obtenir
   $$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}b(s)\,ds,$$
   ce qui donne bien la formule attendue quand on remplace b par sa définition.

1. i.e. la méthode de variation de « la constante »

(c) On suppose $t \geq 0$ et on prend la norme dans l'égalité précédente

$$\|x(t)\| \leq \|e^{tA}\|\|x_0\| + \int_0^t \|e^{(t-s)A}\|\|P(s)\|\|x(s)\|\,ds,$$

puis on utilise la borne sur $\|e^{tA}\|$ rappelée dans l'énoncé

$$\|x(t)\| \leq C_1 e^{-\gamma t}\|x_0\| + C_1 \int_0^t e^{-\gamma(t-s)}\|P(s)\|\|x(s)\|\,ds.$$

En terme de la fonction ψ, cela donne

$$\psi(t) \leq C_1\|x_0\| + C_1 \int_0^t \|P(s)\|\psi(s)\,ds.$$

On peut alors appliquer le lemme de Gronwall et obtenir

$$\psi(t) \leq C_1\|x_0\| e^{C_1 \int_0^t \|P(s)\|\,ds}, \tag{$\star$}$$

l'estimation attendue s'en suit.
In fine, on a donc montré que, pour une certaine constante $C > 0$, on a

$$\|x(t)\| \leq C\|x_0\|e^{-\gamma t},$$

ce qui prouve bien la stabilité asymptotique de l'équilibre 0 pour l'équation considérée.

(d) On reprend l'estimation ($\star$) mais avec la nouvelle hypothèse sur P, qui donne

$$\psi(t) \leq C_1\|x_0\|e^{C_1 M t},$$

et donc

$$\|x(t)\| \leq C_1\|x_0\|e^{(C_1 M - \gamma)t},$$

ce qui donne le résultat attendu dès lors que $\gamma > C_1 M$.

■

Exercice 3

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{E}) \qquad z'' + z + z^3 = 0.$$

1. Parmi les quatre champs de vecteurs suivants sur $\mathbb{R}^2$

$$\text{a) } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x^3 \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{b) } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x + x^3 \end{pmatrix}$$
$$\text{c) } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - x^3 \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{d) } f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x - x^3 \end{pmatrix},$$

déterminer, en le justifiant, lequel permet d'écrire une équation équivalente à $(\mathcal{E})$ sous la forme

$$(\mathcal{E}_1) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Quelle version du théorème de Cauchy-Lipschitz peut-on appliquer à $(\mathcal{E}_1)$? On énoncera précisément le théorème et on en vérifiera ses hypothèses dans ce cas précis.

2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit une partie de $\mathbb{R}^2$ par

$$\Gamma_a := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2(x^2+y^2)+x^4 = a \right\}.$$

   (a) Montrer que pour toute condition initiale $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que la solution maximale de $(\mathcal{E}_1)$ qui vaut X_0 au temps 0 est contenue dans Γ_a.
   (b) Montrer que Γ_a est un compact de $\mathbb{R}^2$. Expliquer pourquoi cela implique que toutes les solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le seul équilibre de $\mathcal{E}_1$. Pourquoi le critère spectral vu en cours ne permet-il pas de déterminer la stabilité de cet équilibre ?
   (d) En utilisant la question 2.a, montrer que X^* est un équilibre stable. Est-il asymptotiquement stable ?

3. On pose désormais $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on considère $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ la solution associée de $(\mathcal{E}_1)$.
   On veut tout d'abord montrer que y n'a pas de limite en $+\infty$. On suppose par l'absurde que $\ell = \lim_{t\to+\infty} y(t)$ existe.
   (a) Montrer que si $\ell \neq 0$ alors $\lim_{t\to+\infty} |x(t)| = +\infty$. En déduire que nécessairement $\ell = 0$.
   (b) En déduire que x tend vers une limite $m \in \mathbb{R}$ qui est solution de l'équation $2m^2 + m^4 = 2$.
   (c) Montrer qu'on doit avoir $m + m^3 = 0$. Conclure.
4. On veut maintenant montrer que cette solution X est périodique.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x(t) > 0$ sur $]0, \varepsilon]$. On définit alors

$$S := \{t \in [\varepsilon, +\infty[, \quad x(t) = 0\}.$$

   (b) Montrer que S est fermé.
   (c) On va montrer que S est non vide. Par l'absurde, on suppose que S est vide.
   Montrer qu'alors $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ existe (on pourra commencer par constater que $x(t)y'(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$). Conclure.
   (d) On pose $T := \inf S$. Montrer que $x(T) = 0$ et $y(T) = -1$.
   (e) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit

$$\tilde{x}(t) = -x(T+t), \text{ et } \tilde{y}(t) = -y(T+t).$$

   Montrer que $\tilde{X} : t \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ puis en déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\tilde{X}(t) = X(t).$$

   (f) Montrer que X est $2T$-périodique.
   (g) Dessiner l'allure de la trajectoire X dans le plan de phases (x, y).

Corrigé :

1. Il s'agit de la réponse d. En effet si on a

$$x' = y$$
$$y' = -x - x^3,$$

   on a bien finalement $x'' = y' = -x - x^3$ et donc x est bien solution de $(\mathcal{E})$.
   Le champ f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, il est donc en particulier localement lipschitzien par rapport aux variables d'état. Le théorème de Cauchy-Lipschitz local s'applique donc à ce problème. Il nous assure l'existence et l'unicité des solutions maximales pour toute donnée de Cauchy.
2. (a) Il suffit de démontrer que la fonction $E : (x, y) \to 2(x^2+y^2)+x^4$ est une intégrale première du système.

Pour cela, on dérive $E(x(t), y(t))$ par rapport à t.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E(x(t), y(t)) &= 4xx' + 4yy' + 4x^3x' \\ &= 4x'(x + x^3) + 4y'y \\ &= 4y(x + x^3) + 4(-x - x^3)y \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) On commence par remarquer que Γ_a est vide pour $a < 0$. Supposons donc $a \geq 0$.
Γ_a est clairement fermé comme image réciproque du fermé $\{a\}$ par la fonction continue E définie à la question précédente. Par ailleurs, comme $x^4 \geq 0$, il est clair que tout point de Γ_a est contenu dans la boule fermée de rayon de $\sqrt{a/2}$ et donc Γ_a est un borné de $\mathbb{R}^2$.
On a bien établi la compacité de Γ_a.

(c) D'après la formule du champ de vecteurs f, un équilibre $X^* = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ doit vérifier

$$y = 0,$$

$$x + x^3 = 0.$$

Il est clair que seuls $x = 0$ et $y = 0$ sont les solutions (réelles) de ces équations.
La jacobienne de f en X^* est donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

dont les valeurs propres sont $\pm i$. Le critère spectral ne permet donc pas de conclure (ni même le théorème de Hartman-Grobman ...).
En revanche si on suppose que $x_0^2 + y_0^2 \leq \delta$, alors nous savons que la trajectoire est contenue dans Γ_a avec $a = 2(x_0^2 + y_0^2) + x_0^4$, ce qui donne

$$a \leq 2\delta + \delta^2.$$

On sait alors que pour tout t, la solution vérifie

$$x^2(t) + y^2(t) \leq a/2 \leq \delta + \frac{\delta^2}{2}.$$

Ceci prouve bien que la solution restera aussi proche que l'on veut de l'origine.
Par ailleurs, comme Γ_a est fermé et que X^* n'est pas dans Γ_a pour $a \neq 0$, il n'est pas possible que la trajectoire converge vers X^* quand $t \to +\infty$. L'équilibre n'est donc pas asymptotiquement stable.

3. (a) Supposons par exemple que $\ell > 0$ (l'autre cas est similaire). On sait donc que $y(t) \geq \ell/2$ pour tout t assez grand, disons $t \geq t^*$ pour un certain t^*. Comme par ailleurs, on a $x' = y$, on déduit que

$$x(t) - x(t^*) = \int_{t^*}^{t} y(s)\, ds \geq \frac{\ell}{2}(t - t^*) \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty.$$

Comme nous avons vu que les trajectoires sont toutes bornées (car incluses dans un ensemble compact) cela n'est pas possible.

(b) Comme la trajectoire est contenue dans un compact, il existe une valeur d'adhérence m de $x(t)$ quand $t \to +\infty$. Par passage à la limite dans l'équation $E(x(t), y(t)) = E(0, 1) = 2$ on trouve que $E(0, m) = 2$ ce qui donne bien l'équation $2m^2 + m^4 = 2$.
Montrons maintenant que m est la seule valeur d'adhérence de x. En effet, s'il existait une autre valeur d'adhérence $\tilde{m}$, celle-ci serait aussi solution de $2\tilde{m}^2 + \tilde{m}^4 = 2$, distincte de m, autrement dit on aurait $\tilde{m} = -m$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, 0 serait aussi valeur d'adhérence de x, ce qui est exclu.
Comme $x(t)$ reste dans un compact et possède une unique valeur d'adhérence quand $t \to +\infty$, on a bien $m = \lim_{t \to +\infty} x(t)$.

(c) On sait que x et y ont des limites en $+\infty$, grâce aux équations

$$x' = y, \quad \text{et} \quad y' = -x - x^3,$$

on déduit que

$$\lim_{t \to +\infty} x'(t) = \ell = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = -m - m^3.$$

La fonction y admet une limite en $+\infty$ ainsi que sa dérivée y', un lemme du cours nous dit alors que la limite de y' est nécessairement nulle. On doit donc avoir

$$m + m^3 = 0,$$

ce qui impose $m = 0$ et contredit l'équation $2m^2 + m^4 = 2$.

Au final, on a bien obtenu une contradiction et prouvé que y n'a pas de limite en $+\infty$.

4. (a) Par construction on a $x'(0) = y(0) = 1$. Donc x est strictement croissante au voisinage de 0. Comme $x(0) = 0$, on a bien $x(t) > 0$ sur $]0, \varepsilon]$ pour ε bien choisi.

   (b) S est fermé car c'est l'intersection du fermé $[\varepsilon, +\infty[$ avec l'image réciproque de 0 par l'application continue x.

   (c) On a en effet $xy' = -x^2 - x^4 \leq 0$. Si S est vide, alors $x > 0$ sur $]0, +\infty[$ et donc $y' \leq 0$. La fonction y est donc décroissante et minorée (rappelons que la trajectoire est contenue dans un compact), ce qui prouve que y doit admettre une limite en $+\infty$. Ceci est exclu comme nous l'avons établi à la question 3.

   Ainsi, l'ensemble S n'est pas vide.

   (d) Comme S est un fermé non vide et minoré, sa borne inférieure T est bien définie et c'est un élément de S. Autrement dit, nous avons $x(T) = 0$. Par ailleurs, par définition de ε et de S, on a

$$x(t) > 0, \quad \forall t \in]0, T[.$$

   Par l'équation, on a $y' = -x - x^3 < 0$ sur $]0, T[$ et donc y est strictement décroissante sur $[0, T]$ et en particulier $y(T) < y(0) = 1$.

   Par ailleurs, on a l'égalité $E(x(T), y(T)) = E(0, 1) = 2$ qui s'écrit

$$2y(T)^2 = 2.$$

   On ne peut donc avoir que $y(T) = 1$ ou $y(T) = -1$, le premier cas étant exclu par la discussion précédente. On a donc bien $y(T) = -1$.

   (e) On effectue les calculs suivants

$$\tilde{x}'(t) = -x'(T + t) = -y(T + t) = \tilde{y}(t),$$

$$\tilde{y}'(t) = -y'(T + t) = x(T + t) + x^3(T + t) = -\tilde{x}(t) - \tilde{x}^3(t).$$

   Le couple $(\tilde{x}, \tilde{y})$ est donc bien solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$. Par ailleurs, nous avons

$$\tilde{x}(0) = -x(T) = 0, \quad \text{et} \quad \tilde{y}(0) = -y(T) = 1.$$

   Donc $\tilde{X}$ vérifie la même donnée de Cauchy que X. Par unicité dans Cauchy-Lipschitz, on en déduit que $X(t) = \tilde{X}(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qu'il fallait démontrer.

   (f) On a établi à la question précédente que

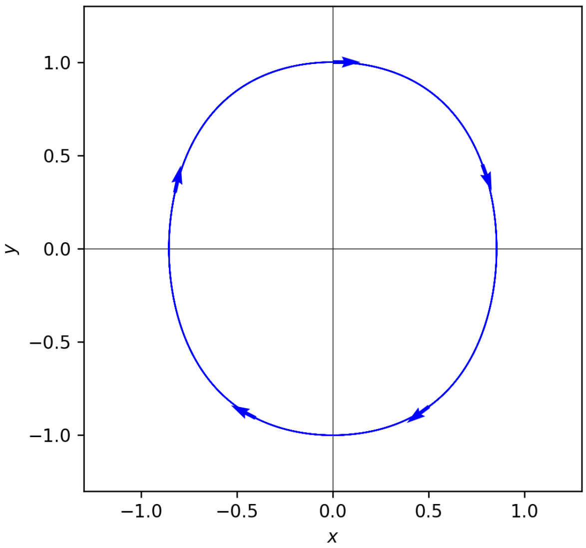
$$X(t) = -X(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

   ce qui implique, en l'appliquant deux fois,

$$X(t) = X(t + 2T), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

   et donc la $2T$-périodicité de X.

   (g) La trajectoire obtenue est dessinée dans la figure ci-dessous. Elle est périodique et symétrique par rapport à l'origine. Numériquement on peut évaluer sa période à $T = 5.057$ ce qui n'était pas demandé bien entendu.


1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
y
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
x

■