M1 ESR - Fiche d'exercices 5

Equations de transport

Exercice 1 *Soient $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'équation*

$$\partial_t u(t,x) + c\partial_x u(t,x) = 0 \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{2}$$

1. *On suppose que $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ est solution de (1)-(2). Pour $(t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on pose*

$$\tilde{u}(t,y) = u(t, y+ct)$$

(autrement dit, on fait le changement de variable $x = y + ct$).

   (a) *Montrer que $\tilde{u}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

   (b) *Montrer que*
   $$\forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \partial_t \tilde{u}(t,y) = 0.$$

   (c) *Exprimer $\tilde{u}$ en fonction de u_0.*

   (d) *En déduire une expression de u en fonction de u_0.*

   (e) *Montrer que la fonction u obtenue à la question précédente est bien solution de (1)-(2).*

   (f) *Conclure quant à l'existence et à l'unicité d'une solution C^1 pour ce problème.*

   (g) *Dessiner les droites du plan (x,t) le long desquelles la solution u est constante quelle que soit la condition initiale u_0.*

2. *On note u la solution du problème (1)-(2).*

   (a) *On suppose que u_0 est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ pour un certain $k \geq 1$. Montrer qu'alors u est de classe C^k sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

   (b) *On suppose que supp $u_0 \subset [a,b]$ pour $a < b$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ le support de la fonction $x \mapsto u(t,x)$ est inclus dans $[a+ct, b+ct]$.*

   (c) *Montrer que pour tous $p \in [1, +\infty]$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $\|u(t,\cdot)\|_{L^p} = \|u_0\|_{L^p}$.*

Exercice 2 *Soient $c \in \mathbb{R}$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ et $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'équation*

$$\partial_t u + c\partial_x u = f(t,x) \tag{3}$$

avec la condition initiale (2). En reprenant la stratégie de l'exercice précédent, montrer que le problème (3)-(2) admet une unique solution C^1 que l'on explicitera en fonction des données.

Exercice 3 *Soient $c \in \mathbb{R}$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ et $a \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'équation*

$$\partial_t u + c\partial_x u + a(t,x)u = f(t,x) \tag{4}$$

avec la condition initiale (2). En reprenant la stratégie de l'exercice précédent, montrer que le problème (4)-(2) admet une unique solution que l'on explicitera en fonction des données.

Exercice 4 *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ $v \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et $a \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. On considère sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ l'équation*

$$\partial_t u + v \cdot \nabla_x u + a(t,x)u = f(t,x) \tag{5}$$

avec la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{6}$$

1. *En reprenant la stratégie des exercices précédents, montrer que le problème* (5)-(6) *admet une unique solution* C^1 *que l'on explicitera en fonction des données.*

2. *On s'intéresse maintenant au cas où la vitesse* v *dépend du temps et de la position.*

   (a) *Commençons par le cas de la dimension 1. On reprend le problème* (1) *en supposant maintenant que* $c = c(t,x)$ *est une fonction de classe* C^1 *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *:*

   $$\forall (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \partial_t u(t,x) + c(t,x)\partial_x u(t,x) = 0. \tag{7}$$

   Le changement de variable $x = y + ct$ *n'a plus de sens ici. On cherche donc par quoi le remplacer. On suppose que* $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ *est solution de* (7)*. Montrer que si la fonction* $X \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *est solution d'une E.D.O. (par rapport à* t*) bien choisie, alors indépendamment de la condition initiale on a toujours*

   $$\forall (t,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt} u\big(t, X(t,y)\big) = 0.$$

   Comparer avec le changement de variable effectué pour le cas c *constant.*

   (b) *Même question en dimension quelconque, en remplaçant* v *par* $v(t,x)$ *dans* (5) *(avec* $a = f = 0$*), et où* X *est maintenant une fonction de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$*.*

Exercice 5 *Soient* $n \in \mathbb{N}^*$, $v \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *et* $a \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$*. On suppose de plus que* v *est une fonction bornée. On considère sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *l'équation*

$$\partial_t u + v(t,x) \cdot \nabla_x u + a(t,x) u = f(t,x) \tag{8}$$

avec la condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{9}$$

1. *Soit* $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*. On considère l'E.D.O.*

   $$\frac{d}{dt} X(t; t_0, y_0) = v\big(t, X(t; t_0, y_0)\big), \quad X(t_0; t_0, y_0) = y_0. \tag{10}$$

   (a) *Montrer que* (10) *admet une unique solution, et qu'elle est bien définie sur* $\mathbb{R}$*.*

   (b) *Montrer que cela définit une fonction de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*.*

   (c) *Montrer que pour* $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *et* $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ *on a*

   $$X\big(t_1; t_2, X(t_2; t_3, y_0)\big) = X(t_1; t_3, y_0).$$

   (d) *En dérivant par rapport à* t *l'égalité*

   $$X\big(s, t, X(t, s, x)\big) = x,$$

   montrer que pour tout $(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *on a*

   $$\partial_{t_0} X(t; t_0, y_0) + v(t_0, y_0) \cdot \partial_{y_0} X(t; t_0, y_0) = 0.$$

   Afin de simplifier les notations, on pourra se contenter dans un premier temps du cas $n = 1$*.*

2. *On suppose que* u *est solution de* (8)-(9)*. Pour* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*, calculer*

   $$\frac{d}{dt} u\big(t, X(t; t_0, x_0)\big).$$

3. *Montrer que le problème* (8)-(9) *admet une unique solution* $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ *donnée par*

$$u(t,x) = \exp\left(-\int_0^t a\big(s, X(s; t, x)\big)\, ds\right) u_0\big(X(0; t, x)\big)$$
$$+ \int_0^t f\big(s, X(s; t, x)\big) \exp\left(-\int_s^t a\big(t, X(t; t, x)\big)\, dt\right) ds.$$

Exercice 6 *Soit* $v \in C^1(\mathbb{R} \times [0,1])$ *telle que pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *on a*

$$v(t,0) = v(t,1) = 0.$$

Soit u_0 *une fonction de classe* C^1 *sur* $[0,1]$. *On considère le problème*

$$\begin{cases} \partial_t u + v\,\partial_x u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times [0,1] \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } [0,1]. \end{cases} \tag{11}$$

1. *Soit* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times [0,1]$. *On considère comme à l'exercice précédent la solution maximale* $X(\cdot; t_0, x_0)$ *à l'EDO* (10). *Montrer que* X *est bien définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $[0,1]$.

2. *Montrer que le problème* (11) *admet une unique solution* $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0,1])$ *que l'on explicitera en fonction de* u_0 *et* X.

Exercice 7 *Soient* $c \in \mathbb{R}$ *et* $u_0 \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *une fonction* **bornée**. *On s'intéresse au problème* **non-linéaire** *suivant:*

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u - u^2 = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{12}$$

1. *On suppose dans cette question que la fonction* u_0 *est négative. Montrer que le problème* (12) *admet une unique solution* C^1 *définie sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. *Calculer explicitement cette solution en fonction des données.*

2. *On suppose dans cette question que* u_0 *est positive (et non identiquement nulle). Montrer cette fois que le problème* (12) *admet une unique solution* C^1 *définie sur un domaine contenant* $[0, T^*[\times\mathbb{R}$, *pour une valeur* T^* *dont on donnera la valeur maximale en fonction des données.*

3. *Reprendre les questions précédentes en remplaçant la vitesse constante* c *par une fonction* C^1 *et bornée* $(t,x) \mapsto c(t,x)$. *Quel commentaire peut-on faire sur le temps d'existence* T^* *?*

Exercice 8 *On s'intéresse dans cet exercice à la résolution d'un* **système** *de transport monodimensionnel à coefficients constants de la forme*

$$\begin{cases} \partial_t U + A\partial_x U = 0, & \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(0,x) = U_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{13}$$

où $U(t,x) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}$ *est une inconnue à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *et* A *une matrice carrée de taille* 2×2 *à coefficients constants. On suppose la donnée initiale* U_0 *continue et bornée sur* $\mathbb{R}$.

1. *On suppose que* A *est diagonalisable à valeurs propres réelles ;* $A = P^{-1}DP$, *avec* $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *et* P *une matrice inversible. Montrer que le problème* (13) *admet une unique solution* U *que l'on calculera explicitement en fonction de* U_0, *de* P *et des* λ_i.

2. *Vérifier que dans le cas précédent, il existe une constante* $C > 0$ *qui dépend de* A, *telle que*

$$\sup_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} \|U(t,x)\| \leq C\|U_0\|_\infty.$$

3. *On suppose que* A *est symétrique réelle et que* U_0 *est à support compact. Démontrer que la solution* $U(t,.)$ *de* (13) *reste à support compact* $K(t)$ *et vérifie*

$$\forall t \geq 0, \quad \|U(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

4. *On souhaite comprendre ce qui passe dans le cas d'une matrice qui n'est pas diagonalisable. On suppose désormais* U_0 *de classe* C^1 *et bornée.*

(a) *Dans le cas où* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *calculer explicitement la solution de* (13) *en fonction de* U_0. *Est-ce que la solution* U *est bornée sur* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$? *Démontrer tout de même que:*

$$\forall T > 0,\ \exists C_T > 0, \quad \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} ||U(t,x)|| \leq C_T ||U_0||_{C^1}. \tag{14}$$

(b) *On considère maintenant le cas où* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Vérifier que, pour tout* $n \geq 1$, *la fonction* U_n *définie par*

$$U_n(t,x) = e^{tn} \begin{pmatrix} \sin(nx) \\ -\cos(nx) \end{pmatrix},$$

est solution du système (13) *pour une donnée initiale* U_0 *bien choisie. En déduire qu'une inégalité du type* (14) *ne peut pas être vraie dans ce cas.*

Exercice 9 *Soient* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *et* $c > 0$. *Montrer que la fonction* u *définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad u(t,x) = f(x - ct),$$

est dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ *et vérifie au sens des distributions :*

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0.$$

Exercice 10 *On considère l'équation non linéaire*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x \Big(F(u(t,x)) \Big) = 0, & t \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{15}$$

où $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sont deux fonctions données. On suppose que* F *est de classe* $C^2(\mathbb{R})$ *et on note* $c = F'$.

1. *On suppose que* u *est une solution de classe* C^1. *On définit les courbes caractéristiques* $X(t,x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} \partial_t X(t,x) = c(u(t, X(t,x))), \\ X(0,x) = x. \end{cases}$$

Calculer $u(t, X(t,x))$ *puis* $X(t,x)$ *en fonction de* u_0.

2. *Dans la suite, on suppose que* u_0 *est de classe* C^1, *bornée et à dérivée bornée sur* $\mathbb{R}$. *On définit le temps* T^* *par*

$$T^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } c(u_0) \text{ croissante,} \\ -\frac{1}{\inf_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(c(u_0))} & \text{sinon .} \end{cases}$$

Dessiner les caractéristiques dans le plan (t,x) *dans les deux cas, et interpréter géométriquement* T^*.

3. *Montrer qu'il existe* $Y \in C^1([0, T^* \times \mathbb{R}[)$ *tel que pour tout* $t \in [0, T^*[$, *tout* $x \in \mathbb{R}$, *tout* $y \in \mathbb{R}$,

$$y = X(t,x) \Longleftrightarrow x = Y(t,y).$$

4. *Montrer qu'il existe une unique solution* $u \in C^1([0, T^*[\times\mathbb{R})$ *à* (15).

5. *Montrer que si* $T^* < +\infty$, *alors* $\lim_{t \to T^*} \|\partial_x u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = +\infty$.