M1 ESR - Fiche d'exercices 3

Stabilité

Exercice 1 (Minimum et stabilité.) *Sur l'espace $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel, on considère le système différentiel du second ordre*

$$x'' = -grad\, U(x), x(0) = x_0, x'(0) = v_0, \qquad (*)$$

*où l'inconnue x est une fonction de la variable numérique t, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, où $'$ désigne la dérivation par rapport à t, et $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée de classe C^2 (*fonction potentiel*).*

Dans cet exercice, une position d'équilibre a (point critique de U) sera dite stable *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que toute solution de $(*)$ avec $\|x_0 - a\| \leq \alpha$ et $\|v_0\| \leq \alpha$ soit définie pour tout $t \geq 0$, et vérifie $\|x(t) - a\| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.*

1. *Dans cette question, on suppose que U est une forme quadratique, autrement dit, il existe une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$U(x) = \frac{1}{2}\langle x, Ax\rangle,$$

(on identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et le vecteur colonne correspondant dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

   (a) *Calculer $\nabla U(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.*

   (b) *On réduit A sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale et P inversible. Montrer qu'une fonction $x : t \mapsto x(t)$ est solution de $(*)$ si et seulement si la fonction $y : t \mapsto P^{-1}x(t)$ est solution du système*

$$y'' = -Dy, y(0) = P^{-1}x_0, y'(0) = P^{-1}v_0 \qquad (**).$$

   (c) *Montrer que l'origine est stable pour $(*)$ si et seulement si elle l'est pour $(**)$.*

   (d) *Montrer que l'origine est une position d'équilibre stable pour $(*)$ si et seulement si U possède un minimum strict en ce point.*

2. *Désormais, on ne suppose plus que U est quadratique. Etant donné une solution x de $(*)$, montrer que la quantité*

$$E(t) = \frac{1}{2}\|x'(t)\|^2 + U(x(t)) \qquad (1)$$

reste constante.

3. *On suppose que U est minorée sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que toute solution maximale $x : I \to \mathbb{R}^n$ de $(*)$ est définie sur $\mathbb{R}$ (on pourra d'abord justifier avec la question précédente que x' est bornée sur I).*

4. *On suppose que U admet un minimum local strict en un point a.*

   (a) *Justifier qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, on a*

$$U(a) < \min_{\partial B(a,\varepsilon)} U.$$

   (b) *Montrer que pour un tel ε, il existe $\alpha > 0$ tel que si $\|x_0 - a\| \leq \alpha$ et $\|v_0\| \leq \alpha$, alors la solution x correspondante vérifie $E < \min_{\partial B(a,\varepsilon)} U$ (E est la quantité définie en (1)).*

(c) *En déduire que cette solution x est à valeurs dans la boule $B(a,\varepsilon)$ et conclure.*

Exercice 2 (Partiel - 2019 : Espèces en compétition) *On considère le système différentiel suivant :*

$$\begin{cases} x'(t) &=& x(1-x-\beta y), \\ y'(t) &=& y(1-y-\alpha x), \\ x(0) &=& x_0, \\ y(0) &=& y_0, \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta > 0$.

Il modélise l'évolution des populations de deux espèces en compétition (elles partagent une même ressource pour survivre et sont donc en concurrence pour celle-ci).

1. *Montrer que ce système différentiel vérifie les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz local.*
2. *On se donne des données initiales x_0, y_0 positives ou nulles et on appelle $(J,(x,y))$ la solution maximale associée. Montrer que les fonctions x et y sont positives sur J.*
3. *Toujours pour des données initiales positives, montrer que*

$$x(t) \leq x_0 e^t, \qquad \forall t \geq 0,$$

$$y(t) \leq y_0 e^t, \qquad \forall t \geq 0.$$

En déduire que $[0,+\infty[\subset J$.

4. *A l'aide des résultats vus en cours, discuter en fonction des paramètres α et β la stabilité des trois points d'équilibre :*

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Peut-on interpréter ces résultats du point de vue du modèle ?

5. *Montrer que si $\alpha > 1$ et $\beta > 1$, ou bien si $\alpha < 1$ et $\beta < 1$, alors il existe un autre équilibre P_4 dans le quart de plan $]0,+\infty[^2$, que l'on déterminera. Etudier sa stabilité dans les deux cas.*

Exercice 3 (Stabilité par linéarisation ?) *On considère les deux EDOs suivantes*

$$(\mathcal{EDO}_1)\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 - y_1\,(y_1^2+y_2^2) \\ -y_1 - y_2\,(y_1^2+y_2^2) \end{pmatrix}, \qquad (\mathcal{EDO}_2)\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 + y_1\,(y_1^2+y_2^2) \\ -y_1 + y_2\,(y_1^2+y_2^2) \end{pmatrix}$$

1. *Montrer que, pour toute condition de Cauchy, les deux EDOs admettent une unique solution maximale.*
2. *Montrer que les deux EDOs admettent le même unique point d'équilibre.*
3. *Peut-on conclure sur la stabilité de ce point d'équilibre par linéarisation ?*
4. *Etudier la stabilité de ce point d'équilibre à l'aide de la fonction $r : t \mapsto y_1(t)^2 + y_2(t)^2$ (on pourra montrer que $r'(t) = -2r(t)^2$ pour $(\mathcal{EDO}_1)$ et $r'(t) = 2r(t)^2$pour $(\mathcal{EDO}_2)$).*

Exercice 4 (Flot potentiel et minimiseurs.) *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.*

On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = -\nabla f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ *et on suppose que* $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$.

1. *Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale x sur $]T_*, T^*[$.*

2. *Montrer que la fonction $t \mapsto f(x(t))$ est décroissante. En déduire que $T^* = +\infty$ et que x est bornée sur $[0, +\infty[$.*

3. *A-t-on nécessairement $T_* = -\infty$? (On pourra considérer l'exemple $n = 1$ avec $f(x) = x^4$.)*

4. *On suppose à partir de maintenant que f est strictement convexe. Montrer que f admet un unique point de minimum strict global $f(x^m) = m$.*

5. *Justifier que x^m est l'unique zéro de $|\nabla f|$. On pourra utiliser l'inégalité :*

$$\forall y, z \in \mathbb{R}^n, \qquad f(y) \geq f(z) + \langle \nabla f(z), y - z \rangle.$$

6. *On veut montrer que, pour toute condition initiale (t_0, x_0), on a $x(t) \to x^m$ quand $t \to +\infty$.*

   (a) *Justifier que la fonction $r(t) = f(x(t))$ tend en $+\infty$ vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.*

   (b) *Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $r'(t) \leq -\eta$ pour tout $t \in [0, +\infty[$ tel que $m + \varepsilon \leq f(x(t))$.*

   (c) *En déduire que $\ell = m$.*

   (d) *Conclure.*

Exercice 5 (Circuit RLC.) *L'analyse des circuits RLC conduit à des EDOs sur $\mathbb{R}^2$ du type* $\begin{cases} L\dfrac{di}{dt} = v - h(i) \\ C\dfrac{dv}{dt} = -i \end{cases}$, *avec $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1. Les variables v et i sont respectivement un voltage et une intensité, et les constantes strictement positives L et C une résistance et une capacité.*

1. *Déterminer l'unique équilibre de l'EDO, et discuter sa stabilité en fonction de h.*

2. *On suppose que h vérifie $xh(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. L'objectif de cette question est de montrer que l'équilibre est asymptotiquement stable. Pour cela, on introduit l'énergie du système $E(i, v) = \frac{1}{2}\left(L\, i^2 + C\, v^2\right))$. On notera φ le flot associé au système : pour tout (i_0, v_0), $t \mapsto \varphi(t, (i_0, v_0))$ est la solution du système qui vaut (i_0, v_0) à l'instant $t = 0$. Dans la suite, on fixe $(i_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.*

   (a) *En étudiant les variations de $t \mapsto E(\varphi(t, (i_0, v_0)))$, montrer que pour tout $(i_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, l'intervalle de définition de $\varphi(\cdot, (i_0, v_0))$ contient $\mathbb{R}^+$.*

   (b) *Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$ tel que $(\varphi(t_n, (i_0, v_0)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un couple (i_∞, v_∞). Montrer que pour tout $s \geq 0$,*

   $$\lim_{n\to+\infty} E(\varphi(s + t_n, (i_0, v_0))) = E((i_\infty, v_\infty)).$$

   En déduire que

   $$\forall s \geq 0, \qquad E(\varphi(s, (i_\infty, v_\infty))) = E((i_\infty, v_\infty)). \tag{2}$$

(c) *Montrer que pour tout $s > 0$, $(i_\infty, v_\infty) = (0,0)$ (on pourra dériver la relation (2) par rapport à s).*

(d) *Conclure.*

Exercice 6 (Pendule non linéaire.) *On étudie l'équation suivante*

$$\theta'' + \mu\theta' + \sin\theta = 0,$$

où $\mu > 0$ est une constante donnée.

1. *En réécrivant l'équation sous la forme d'un système du premier ordre $Y' = f(Y)$ avec $Y = (\theta', \theta)^t$, montrer que pour toutes conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = \theta_1$ il existe une unique solution globale.*

2. *Trouver les points d'équilibre du système.*

3. *On veut montrer que le point d'équilibre $(0,0)$ est asymptotiquement stable. Soient $\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{2}\theta_1^2 - \cos\theta_0 < 0$. On définit pour la solution θ correspondante l'énergie $E(t) = \frac{1}{2}\left(\theta'(t)\right)^2 - \cos(\theta(t))$.*

   (a) *Montrer que E est décroissante et admet une limite finie en $+\infty$.*
   (b) *Montrer que $\theta(t) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.*
   (c) *Montrer que θ' est globalement Lipschitz sur $\mathbb{R}^+$.*
   (d) *En déduire que $\lim_{t\to+\infty} \theta'(t) = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde et supposer que $\limsup_{t\to+\infty} \theta'(t)^2 > 0$ pour obtenir que $\lim_{t\to+\infty} E(t) = -\infty$).*
   (e) *En déduire que θ tend vers 0 en $+\infty$.*

4. *Retrouver le résultat de la question précédente en étudiant la linéarisation du système en $(0,0)$.*

5. *Que peut-on dire du point d'équilibre $(\pi, 0)$?*

Exercice 7 (Spirales.) *On considère le champ de vecteurs défini par*

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} -y + x\cos\left(x^2+y^2\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) \\ x + y\cos\left(x^2+y^2\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) \end{pmatrix}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$, et par $V(0,0) = (0,0)$.

1. *Montrer que V définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ et que, si $Y = (x,y)^t$ le problème de Cauchy $\begin{cases} Y' = V(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ est localement bien posé.*

2. *Montrer qu'il existe une infinité de cercles $(C_k)_{k\geq 0} > 0$, de rayons $R_k \nearrow +\infty$, qui sont des courbes intégrales du champ*[1]*. En déduire que toute trajectoire est globale.* Indication : décomposer le champ de vecteurs en une partie radiale et une partie tangentielle.

3. *Trouver les points d'équilibre du système et étudier leur stabilité linéaire. Qu'en déduire ?*

4. *Dessiner le champ de vecteurs V. Si $Y(0)$ est strictement compris entre deux cercles C_k et C_{k+1}, comment se comporte la trajectoire correspondante quand $t \to \pm\infty$? Et si $Y(0) \neq 0$ est à l'intérieur du cercle C_1? Quelle information en tirer par rapport à la question 3?*

[1] autrement dit, si $Y_0 \in C_k$, $Y(t) \in C_k$ pour tout t.