

M1 ESR - Fiche d'exercices 3

Stabilité

Exercice 1 (Minimum et stabilité.) Sur l'espace \mathbb{R}^n muni du produit scalaire usuel, on considère le système différentiel du second ordre

$$x'' = -\text{grad } U(x), x(0) = x_0, x'(0) = v_0, \quad (*)$$

où l'inconnue x est une fonction de la variable numérique t , à valeurs dans \mathbb{R}^n , où $'$ désigne la dérivation par rapport à t , et $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction donnée de classe C^2 (fonction potentiel).

Une position d'équilibre a (point critique de U) est dite stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que toute solution de (*) avec $\|x_0 - a\| \leq \alpha$ et $\|v_0\| \leq \alpha$ soit définie pour tout $t \geq 0$, et vérifie $\|x(t) - a\| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$.

1. Dans cette question, on suppose que U est une forme quadratique. Montrer que l'origine est une position d'équilibre stable si et seulement si U possède un minimum strict en ce point. Indication : on pourra résoudre (*) dans un système de coordonnées où U est diagonale.
2. Désormais, on ne suppose plus que U est quadratique. Montrer que l'expression $E = \frac{1}{2}\|x'\|^2 + U(x)$ reste constante.
3. On suppose que U est minorée sur \mathbb{R}^n . Dédurre de la question précédente que toute solution maximale de (*) est définie sur \mathbb{R} tout entier. On pourra montrer que $x(t)$ et $x'(t)$ admettent des limites finies aux bornes de l'intervalle de définition.
4. On suppose que U admet un minimum local strict en un point a . Montrer que a est une position d'équilibre stable. On choisira les conditions initiales pour rendre assez petite la constante E de la question (b).

Exercice 2 (Stabilité par linéarisation ?) On considère les deux EDOs suivantes

$$(\mathcal{ED}\mathcal{O}_1) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 - y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ -y_1 - y_2(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix}, \quad (\mathcal{ED}\mathcal{O}_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2 + y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ -y_1 + y_2(y_1^2 + y_2^2) \end{pmatrix}$$

1. Montrer que, pour toute condition de Cauchy, les deux EDOs admettent une unique solution maximale.
2. Montrer que les deux EDOs admettent le même unique point d'équilibre.
3. Peut-on conclure sur la stabilité de ce point d'équilibre par linéarisation ?
4. Étudier la stabilité de ce point d'équilibre à l'aide de la fonction $t \mapsto y_1(t)^2 + y_2(t)^2$.

Exercice 3 (Flot potentiel et minimiseurs.) Soit f une fonction de classe C^2 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} x' = -\nabla f(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ et on suppose que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

1. Montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale sur $]T_*, T^*[$.
2. Montrer que $f^{-1}(K)$ est compacte pour tout compact K de \mathbb{R} (on dit que f est une application propre). En déduire que $T^* = +\infty$.
Indication : on pourra étudier la monotonie de f le long des trajectoires.
3. A-t-on nécessairement $T_* = -\infty$?
4. On suppose à partir de maintenant que f est strictement convexe. Montrer que f admet un unique point de minimum strict global $f(x^m) = m$. Justifier que x^m est l'unique zéro de $|\nabla f|$.
5. Montrer que, pour toute condition initiale (t_0, x_0) , on a $x(t) \rightarrow x^m$ quand $t \rightarrow +\infty$ (on pourra commencer par montrer que $r(t) = f(x(t)) \searrow m$).

Exercice 4 (Circuit RLC.) L'analyse des circuits RLC conduit à des EDOs sur \mathbb{R}^2 du type

$\begin{cases} L \frac{di}{dt} = v - h(i) \\ C \frac{dv}{dt} = -i \end{cases}$, avec $h : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 . Les variables v et i sont respectivement un voltage et une intensité, et les constantes positives L et C une résistance et une capacité.

1. Déterminer l'unique équilibre de l'EDO, et discuter sa stabilité en fonction de h .
2. On suppose que h vérifie $xh(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$. L'objectif de cette question est de montrer que l'équilibre est asymptotiquement stable. Pour cela, on introduit l'énergie du système $E(i, v) = \frac{1}{2}(Li^2 + Cv^2)$. On notera φ le flot associé au système : pour tout (i_0, v_0) , $t \mapsto \varphi(t, (i_0, v_0))$ est la solution du système qui vaut (i_0, v_0) à l'instant $t = 0$. Dans la suite, on fixe $(i_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$.
 - (a) En étudiant les variations de $t \mapsto E(\varphi(t, (i_0, v_0)))$, montrer que pour tout $(i_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$, l'intervalle de définition de $\varphi(\cdot, (i_0, v_0))$ contient \mathbb{R}^+ .
 - (b) Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$ tel que $(\varphi(t_n, (i_0, v_0)))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un couple (i_∞, v_∞) . Montrer que pour tout $s \geq 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} E(\varphi(s + t_n, (i_0, v_0))) = E((i_\infty, v_\infty)).$$

En déduire que

$$\forall s \geq 0, \quad E(\varphi(s, (i_\infty, v_\infty))) = E((i_\infty, v_\infty)). \quad (1)$$

- (c) Montrer que pour tout $s > 0$, $\varphi(s, (i_\infty, v_\infty)) = (i_\infty, v_\infty)$ (on pourra dériver la relation (1) par rapport à s).
- (d) Conclure.

Exercice 5 (Pendule non linéaire.) On étudie l'équation suivante

$$\theta'' + \mu\theta' + \sin(\theta) = 0,$$

où $\mu > 0$ est une constante donnée.

1. En réécrivant l'équation sous la forme d'un système du premier ordre $Y' = f(Y)$ avec $Y = (\theta', \theta)^t$, montrer que pour toutes conditions initiales $\theta(t_0) = \theta_0$ et $\theta'(t_0) = \theta_1$ il existe une unique solution globale.

3. En étudiant l'énergie $E(t) = \frac{1}{2} (\theta'(t))^2 - \cos(\theta(t))$, montrer que le point d'équilibre $\theta = \theta' = 0$ est asymptotiquement stable.
Indication : on pourra prendre $\theta_0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et θ_1 tel que $E(\theta_0) < 0$.
4. Retrouver le résultat de la question précédente en étudiant la linéarisation du système en $\theta = \theta' = 0$.
5. Que peut-on dire du point d'équilibre $\theta = \pi, \theta' = 0$?

Exercice 6 (Spirales.) On considère le champ de vecteurs défini par

$$V(x, y) = \begin{pmatrix} -y + x \cos(x^2 + y^2) \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \\ x + y \cos(x^2 + y^2) \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \end{pmatrix}$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$, et par $V(0, 0) = (0, 0)$.

1. Montrer que V définit une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R}^2 et que, si $Y = (x, y)^t$ le problème de Cauchy $\begin{cases} Y' = V(Y) \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$ est localement bien posé.
2. Montrer qu'il existe une infinité de cercles $(C_k)_{k \geq 0} > 0$, de rayons $R_k \nearrow +\infty$, qui sont des courbes intégrales du champ¹. En déduire que toute trajectoire est globale. Indication : décomposer le champ de vecteurs en une partie radiale et une partie tangentielle.
3. Trouver les points d'équilibre du système et étudier leur stabilité linéaire. Qu'en déduire ?
4. Dessiner le champ de vecteurs V . Si $Y(0)$ est strictement compris entre deux cercles C_k et C_{k+1} , comment se comporte la trajectoire correspondante quand $t \rightarrow \pm\infty$? Et si $Y(0) \neq 0$ est à l'intérieur du cercle C_1 ? Quelle information en tirer par rapport à la question 3?

Problème 1 (Examen - 2015) On considère l'équation différentielle suivante, d'inconnue $u(t)$:

$$(2) \quad u'' = u^2 - u, \quad u(0) = 0.$$

Le but de l'exercice est de trouver une solution de (2) telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 1$.

1. Le théorème de Cauchy-Lipschitz est-il applicable pour résoudre cette question?
2. On complète le problème (2) par la condition

$$(3) \quad u'(0) = \lambda$$

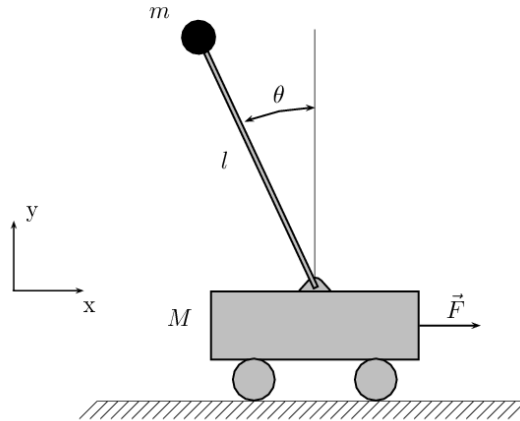
avec $\lambda \geq 0$.

- a. Montrer l'existence de $t_{\max}(\lambda) > 0$ tel que (2)-(3) ait une unique solution maximale u_λ sur $[0, t_{\max}(\lambda)[$.
 - b. Que valent u_0 et $t_{\max}(0)$?
3. On multiplie l'équation (2) par u' et on intègre entre 0 et t . Montrer que $u'^2(t) = \lambda^2 + 2(u^3(t)/3 - u^2(t)/2)$.
 4. Soit \mathcal{C}_λ la courbe plane d'équation $y^2 = \lambda^2 + 2(x^3/3 - x^2/2)$.
 - a. Choisir $\lambda_0 > 0$ pour que $(1, 0) \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$, et tracer la courbe \mathcal{C}_{λ_0} dans le quadrant $\{x \geq 0, y \geq 0\}$.
 - b. Étudier la tangente au point $(1, 0)$.
 5. On choisit toujours $\lambda = \lambda_0$.
 - a. En utilisant le fait que $(u_{\lambda_0}(t), u'_{\lambda_0}(t)) \in \mathcal{C}_{\lambda_0}$ pour $t < t_{\max}(\lambda_0)$, montrer que $(u_{\lambda_0}(t), u'_{\lambda_0}(t))$ ne peut jamais être égal à $(1, 0)$.
 - b. En déduire une borne sur $|u_{\lambda_0}(t)|$ et $|u'_{\lambda_0}(t)|$, puis que $t_{\max}(\lambda_0) = +\infty$.
 - c. Montrer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_{\lambda_0}(t) = 1$.
 6. On poursuit l'étude de (2)-(3) pour $\lambda > \lambda_0$.
 - a. Pour $x \geq 0$ et $\lambda > \lambda_0$, quel est le signe de $\lambda^2 + 2(x^3/3 - x^2/2)$? Toujours grâce au fait que $(u_\lambda(t), u'_\lambda(t)) \in \mathcal{C}_\lambda$ pour $t < t_{\max}(\lambda)$, montrer que

$$\int_0^{u(t)} \left(\lambda^2 + 2(v^3/3 - v^2/2) \right)^{-1/2} dv = t.$$

- b. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(\lambda^2 + 2(v^3/3 - v^2/2) \right)^{-1/2} dv$?
- c. En déduire que $t_{\max}(\lambda)$ est fini.

Problème 2 (Pendule et chariot.) On considère un pendule, de masse m et longueur l , fixé sur un chariot de masse M se déplaçant selon l'axe $(0x)$. Le chariot est soumis à une force d'intensité $F(t)$ selon toujours l'axe $(0x)$, le pendule n'est soumis qu'à son propre poids. À un instant $t \geq 0$, le chariot est en position $x(t)$, et le pendule fait un angle $\theta(t)$ avec la verticale (cf schéma ci-dessous²). On note g l'intensité du champ de pesanteur.



En appliquant la seconde loi de Newton, on obtient les équations du mouvement du système chariot-pendule :

$$\begin{cases} x'' = \frac{m g \sin(\theta) \cos(\theta) - m l (\theta')^2 \sin(\theta) + F}{M + m \sin(\theta)^2}, \\ \theta'' = \frac{g \sin(\theta) (M + m) - m l (\theta')^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + F \cos(\theta)}{l(M + m \sin(\theta)^2)} \end{cases} \quad (2)$$

1 - Étude du système libre

On suppose dans cette partie que $F \equiv 0$.

- a. Montrer que $Y(t) = [x(t) \ x'(t) \ \theta(t) \ \theta'(t)]^T$ est solution d'une EDO autonome d'ordre un $Y' = \mathcal{F}(Y)$, avec \mathcal{F} que l'on explicitera.
- b. Montrer que le problème de Cauchy $Y' = \mathcal{F}(Y)$, $Y(0) = Y_0 \in \mathbb{R}^4$ admet une unique solution maximale.

On définit l'énergie du système

$$E(x, x', \theta, \theta') = \frac{1}{2}(M + m)(x')^2 + \frac{1}{2}m(\theta')^2 l^2 - l m \theta' x' \cos(\theta) + m g l \cos(\theta)$$

- c. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $E(x(t), x'(t), \theta(t), \theta'(t)) = E(x(0), x'(0), \theta(0), \theta'(0))$.
- d. En déduire que toute solution maximale du problème de Cauchy est globale.

Indication : on pourra montrer que $E(a, b, c, d) \xrightarrow{(c,d) \rightarrow \infty} +\infty$.

- e. Déterminer l'ensemble des équilibres de l'EDO. Interprétation ?

²source : <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b6/Cart-pendulum.png>

2 - Étude de l'équilibre bas

On suppose toujours que $F \equiv 0$. On s'intéresse à la stabilité de la position d'équilibre basse du système : $Y_0 = [0 \ 0 \ \pi \ 0]^T$.

- Peut-on conclure quant à la stabilité de cet équilibre par linéarisation ?
- Quelle est la solution du problème de Cauchy avec condition initiale $Y_0 = [0 \ \eta \ \pi \ 0]^T$, avec $\eta \in \mathbb{R}$? Conclure quant à la stabilité de l'équilibre bas.

On va s'intéresser plus précisément au mouvement du pendule lorsque l'on part d'une position proche de l'équilibre bas. En effet, l'équation qui régit le mouvement du pendule

$$\theta'' = \frac{g \sin(\theta) (M + m) - m l (\theta')^2 \sin(\theta) \cos(\theta)}{l(M + m \sin^2(\theta))}$$

ne dépend pas de x et x' , on peut donc espérer une stabilité du pendule seul proche de la position basse.

- Écrire l'EDO vérifiée par $\Theta(t) = [\theta(t), \theta'(t)]^T$.

$\Theta_0 = [\pi \ 0]^T$ est bien entendu un équilibre de cette EDO. On définit

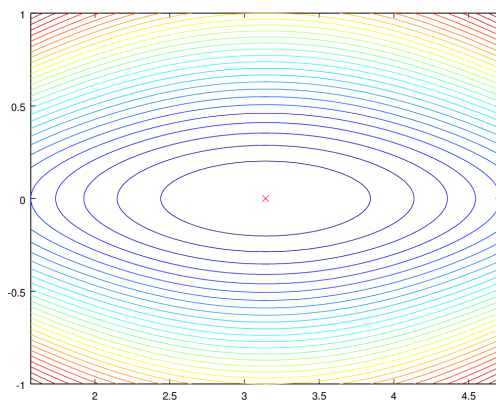
$$\tilde{E}(a, b) = \frac{lM}{2}b^2 + \frac{lm}{2}b^2 \sin(a)^2 + g(M + m)(1 + \cos(a)).$$

- Montrer que $\tilde{E}(\theta(t), \theta'(t)) = \tilde{E}(\theta(0), \theta'(0))$ pour tout $t \geq 0$.
- Montrer que $(\pi, 0)$ est un minimum local strict de E . En déduire que Θ_0 est un équilibre stable de l'EDO vérifiée par Θ .

On va faire mieux : on va montrer que si Θ_0 est dans un voisinage suffisamment proche de $[\pi \ 0]^T$, $\Theta(t)$ est périodique. Comme la hessienne de E en $(\pi, 0)$ est la matrice définie positive³

$$\text{Hess}(E)(\pi, 0) = \begin{bmatrix} g(M + m) & 0 \\ 0 & lM \end{bmatrix},$$

les courbes de niveaux de E aux voisinages de $(\pi, 0)$ sont fermées :



On note \mathcal{C} une de ces courbes. D'après le point d., si $\Theta_0 \in \mathcal{C}$, $\Theta(t) \in \mathcal{C}$ pour tout $t \geq 0$. On définit

$$HD := \{(a, b) \in \mathcal{C}, \pi < a, 0 < b\}, \quad BD := \{(a, b) \in \mathcal{C}, \pi < a, b < 0\},$$

- Montrer que si $\Theta_0 \in HD$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\theta''(t) < -\alpha$ tant que $\Theta(t) \in HD$.

- g. En déduire qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $\Theta(t_1) = [\theta(t_1) \ 0]^T$. Que se passe-t-il pour $t > t_1$, t proche de t_1 .
- h. Expliquer succinctement pourquoi il existe $T > 0$ tel que $\Theta(T) = \Theta_0$.
- i. En déduire que pour toute condition initiale Θ_0 suffisamment proche de $[\pi \ 0]^T$, la solution du problème de Cauchy Θ est périodique.

2 - Étude de l'équilibre haut - Stabilisation

On suppose toujours que $F \equiv 0$. On s'intéresse à la stabilité de la position d'équilibre haute du système : $Y_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$.

- a. Montrer que l'équilibre haut est instable.

On suppose que l'on peut mesurer à tout instant l'état du système, c'est-à-dire le vecteur $[x(t) \ x'(t) \ \theta(t) \ \theta'(t)]^T$. On cherche alors stabiliser l'équilibre haut par retour d'état linéaire : autrement dit, on va chercher à agir sur le chariot avec une force F de la forme

$$F(t) = k_1 x(t) + k_2 x'(t) + k_3 \theta(t) + k_4 \theta'(t), \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{R}$$

pour rendre l'équilibre haut localement asymptotiquement stable.

- b. Montrer que l'on peut choisir k_1, k_2, k_3, k_4 pour que l'équilibre haut soit localement asymptotiquement stable.