M1 ESR - Fiche d'exercices 2

Théorème de Cauchy-Lipschitz, dépendance par rapport aux conditions initiales. Critères d'existence globale.

I. Lemme de Grönwall

Exercice 1 (Un lemme de Grönwall généralisé) . *Soit I un intervalle non vide, $t \mapsto a(t) \in \mathbb{R}$ une fonction continue positive et $b : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Soit $x : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie, pour un certain $s \in I$, la propriété suivante :*

$$x(t) \leq b(t) + \int_s^t a(\tau)x(\tau)\,d\tau, \qquad \forall t \in I, t \geq s.$$

Montrer que

$$x(t) \leq b(t) \exp\left(\int_s^t a(\tau)\,d\tau\right), \qquad \forall t \in I, t \geq s.$$

Exercice 2 (Semicontinuité du temps d'existence) *Considérons l'équation différentielle*

$$\dot{X} = f(X) \tag{1}$$

où $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est localement lipschitzienne. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^N$ et soit $T_{max}(X_0) > 0$ le temps maximal d'existence de la solution $X(t)$ de (1) de donnée initiale X_0 en $t = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout T vérifiant $0 < T < T_{max}(X_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si Y_0 est au plus à distance ε de X_0, alors $T_{max}(Y_0) > T$.

1. *Pour $X \in \mathbb{R}^N$, la boule fermée de centre X et de rayon R est notée $B_R(X)$.*
   a. *Montrer l'existence de $R > 0$ tel que $X(t) \in B_R(X_0)$ pour $t \leq T$.*
   b. *Montrer l'existence de $k_R > 0$ telle que f soit k_R-lipschitzienne sur $B_{R+1}(X_0)$.*

2. *Soit maintenant $\varepsilon < 1$, et $Y_0 \in B_\varepsilon(X_0)$.*
   a. *Montrer l'existence de $T' \in]0, T]$ tel que $Y(t) \in B_{R+1}(X_0)$ pour $t \leq T'$.*
   b. *Montrer que $|X(t) - Y(t)| \leq \varepsilon e^{k_R t}$ pour $t \leq T'$.*
   c. *On prend $\varepsilon < e^{-k_R T}$. Déduire de la question précédente que $T_{\max}(Y_0) > T$.*

3. *A la lumière de ce qui précède, étudier le flot de l'équation autonome suivante dans $\mathbb{R}^2$ (qui est aussi une équation dans $\mathbb{R}$ dépendant d'un paramètre) :*

$$\begin{cases} x' &= yx^2 \\ y' &= 0. \end{cases}$$

Exercice 3 (Différentiabilité par rapport aux paramètres) *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : (t, x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto f(t, x, \lambda) \in \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 qui est globalement lipschitzienne par rapport aux variables (x, λ).*

1. *Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe une unique solution globale x_λ de l'équation $x' = f(t, x, \lambda)$ pour la condition initiale $x(0) = 0$.*

2. *Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda \mapsto x_\lambda(t)$ est de classe C^1.* Indication : *On pourra considérer l'équation $y' = g(t, y)$ où y est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et $g(t, a, \alpha) = (f(t, a, \alpha), 0)$ pour tout $(t, a, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

3. *Justifier enfin que la fonction $k : (t, \lambda) \mapsto x_\lambda(t)$ est solution de l'équation :*

$$\partial_t \partial_\lambda k = Df(t, k, \lambda)[0, \partial_\lambda k, 1].$$

II. Unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 4 *Soient f, g deux solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = F(t, y)$ où F est une fonction C^1. On suppose qu'il existe t_0 tel que $f(t_0) < g(t_0)$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) < g(t)$.*

Exercice 5 (Partiel - 2019) *Le but de l'exercice est de décrire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle scalaire $x'' = |x|$.*

1. *Montrer que toutes les solutions maximales de l'équation sont globales et que x est croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. *Soit x une solution non identiquement nulle.*
   (a) *Soit t^* un zéro de x. Montrer que x change de signe au voisinage de t^*.*
   (b) *Montrer que x ne peut pas s'annuler strictement plus que deux fois.*
   (c) *Soit J un intervalle ouvert sur lequel x est strictement négative. Montrer que J est borné et de longueur inférieure ou égale à π.*
   (d) *Montrer que x ne peut pas s'annuler exactement une fois.*
3. *Déterminer toutes les solutions x qui ne s'annulent pas.*
4. *Soit x une solution qui s'annule exactement deux fois. On note $\alpha < \beta$ ses deux racines.*
   (a) *Montrer que x est positive sur $]-\infty, \alpha[\cup]\beta, +\infty[$ et négative sur $]\alpha, \beta[$.*
   (b) *Montrer que $\beta - \alpha = \pi$.*
   (c) *Déterminer complètement x.*

Exercice 6 *On considère l'équation $x' = 2\sqrt{|x|}$.*

1. *Soit x une solution sur un intervalle I et $t_0 < t_1$ deux réels dans I. On suppose que $x(t_0) = x(t_1) = 0$. Montrer que $x(t) = 0$ pour tout $t \in [t_0, t_1]$.*
2. *En déduire toutes les solutions de C^1 de l'équation. Quelles sont les solutions C^2 ?*

Exercice 7 (Zéros des solutions d'équations linéaires scalaires homogènes d'ordre 2.) *On considère l'équation différentielle*

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$$

définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b étant continues sur I. On considère deux solutions φ et ψ de I dans $\mathbb{R}$ non identiquement nulles et on suppose que φ a au moins un zéro dans I.

1. *Montrer que les zéros de φ sont isolés puis que tout segment de I n'en contient qu'un nombre fini.*
2. *Montrer que si φ et ψ ont un zéro commun, alors elles sont proportionnelles.*
3. *On suppose désormais que φ et ψ n'ont pas de zéro commun.*
   (a) *Justifier que le wronskien de φ et ψ ne s'annule pas.*
   (b) *On considère deux zéros successifs a et b de φ. Montrer que ψ s'annule exactement une fois entre a et b. Indication : on pourra procéder par l'absurde et montrer que la fonction $f = \varphi/\psi$ est strictement monotone sur $[a, b]$.*

Exercice 8 *Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $u : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que*

$$(*) \begin{cases} u' = f(u), \\ u(a) = u(b). \end{cases}$$

1. *Montrer que u est nécessairement constante.*

2. *Montrer que le résultat persiste si f est supposée seulement continue.*

Exercice 9 *On considère l'équation $u' = f(u)$, avec $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Soit u une solution maximale dont on note I l'intervalle de définition. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $T > 0$ tel que $t_0, t_0 + T \in I$ et $u(t_0) = u(t_0 + T)$. Montrer que $I = \mathbb{R}$ et que u est périodique de période T.*

III. Temps de vie des solutions.

Exercice 10

1. *On considère l'équation $x' = -\frac{1}{x}$ où x est une fonction à valeurs réelles. Quelle est la solution maximale pour la condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^*$?*
2. *On considère l'équation $x' = f(t, x)$ avec $f : (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto a\, b^2 \in \mathbb{R}$. Quelle est la solution maximale pour la condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^*$?*

Exercice 11 (Explosion en temps fini) *On considère l'équation différentielle $u' = f(u)$ où f est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'une solution (maximale) u est définie sur un intervalle $]a, b[$ avec $b < +\infty$.*

1. *Montrer que* $\limsup_{t \to b^-} \|u(t)\| = +\infty$.
2. *On veut montrer que* $\lim_{t \to b^-} \|u(t)\| = +\infty$. *On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas.*
   - (a) *Montrer qu'il existe une constante M et une suite $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ croissante qui converge vers b avec $\|u(t_{2p})\| \geq 2M$ et $\|u(t_{2p+1})\| \leq M$.*
   - (b) *Montrer alors qu'il existe $\delta > 0$ tel que $t_{2p+1} - t_{2p} \geq \delta$.*
   - (c) *Conclure.*

Exercice 12 *On considère l'équation différentielle $u' = f(u)$ où $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est C^1.*

1. *On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,*
$$|f(u)| \leq M.$$
Montrer que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.
2. *Même question si on suppose qu'il existe $M, K > 0$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,*
$$|f(u)| \leq M|u| + K.$$
3. *On suppose maintenant qu'il existe $M, K > 0$ tels que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$,*
$$\langle f(u), u \rangle \leq M|u|^2 + K.$$
Montrer que l'intervalle de définition d'une solution maximale contient $\mathbb{R}^+$.

Exercice 13 *On considère le système d'équations différentielles*

$$\begin{cases} x' &= -x + \sin y \\ y' &= \frac{x}{chy} - \frac{y}{2} \exp(x^2 + y^2) \end{cases}$$

1. *Montrer que toutes les solutions maximales $u(t) = (x(t), y(t))$ sont définies sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que si $|u(0)| < R$ alors pour tout $t \geq 0$, $|u(t)| < R$. (Indication : On pourra montrer qu'il suffit de trouver $R > 0$ tel que pour tout x, y sur la sphère centrée en 0 de rayon R, $\langle X(x, y), (x, y) \rangle < 0$, où X est le champ de vecteurs associé à l'équation).*

Exercice 14 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$. On considère l'EDO $X' = -XAX$, $X(0) = Id$.*

1. *Justifier l'application du théorème de Cauchy-Lipschitz.*

2. *Montrer que le temps de vie est* $\geq \|A\|^{-1}$ *(où* $\|\cdot\|$ *est une norme d'algèbre sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*) et que près de l'origine,* $X(t) = (Id + tA)^{-1}$.

IV. Problèmes.

Problème 1 (Examen - 2016) *On considère l'équation différentielle ordinaire*

$$(1) \qquad \begin{cases} y'' = 1 - 3\,y^2 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

L'objectif de l'exercice est de démontrer que cette EDO admet une unique solution maximale, qui est globale et périodique.

1. *Montrer que* (1) *admet une unique solution maximale. On note* I *l'intervalle d'existence de cette solution.*

2. *Montrer que* $\frac{1}{2}(y')^2 = y\,(1-y^2)$. *En déduire que pour tout* $t \in I$, $0 \leq y(t) \leq 1$. *En déduire que* $I = \mathbb{R}$ *(c'est-à-dire que la solution est globale).*

3. *Montrer que* y *est une fonction paire.*

4. *Montrer qu'il existe* $T > 0$ *tel que* $y'(t) > 0$ *pour tout* $t \in]0, T[$. *On définit*
$$T_{\max} = \sup\left\{T > 0,\ \forall t \in]0, T[,\ y'(t) > 0\right\}.$$
On a donc $y'(t) > 0$ *pour tout* $t \in]0, T_{\max}[$.

5. *Soit* $0 < t_0 < t < T_{\max}$. *Montrer que*
$$t - t_0 = \int_{y(t_0)}^{y(t)} \frac{ds}{\sqrt{2\,s(1-s)\,(1+s)}} \leq \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{2\,s(1-s)\,(1+s)}} < +\infty.$$
En déduire que $T_{\max} < +\infty$, $y'(T_{max}) = 0$ *et* $y(T_{\max}) = 1$.

6. *Pour* $t \in \mathbb{R}$, *on note* $w(t) = y(t + 2\ T_{\max})$. *Montrer que* $w(-T_{\max}) = y(-T_{\max})$ *et* $w'(-T_{\max}) = y'(-T_{\max})$. *En déduire que* $y(t) = y(t + 2\ T_{\max})$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$.

Problème 2 (Théorème de Cauchy-Peano) *Soit* f *une fonction continue de* $\mathbb{R}^n$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$. *Soit* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. *Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une solution* φ *de l'équation différentielle* $x' = f(x)$ *telle que* $\varphi(t_0) = x_0$.

1. *Montrer qu'on peut supposer* $t_0 = 0$ *et* $x_0 = 0$, *ce qu'on fera désormais.*

2. *Soit* $R > 0$. *On note* B *la boule fermée de centre* 0 *et de rayon* R. *Justifier qu'il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $x \in B$, $\|f(x)\| \leq M$. *Montrer que* f *est uniformément continue sur* B.

3. *Montrer que pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe une application* φ_ε *de classe* C^1 *par morceaux, définie sur* $[-R/M, R/M]$ *et à valeurs dans* B, *telle que* $\varphi_\varepsilon(0) = 0$ *et pour tout* t *(sauf un nombre fini),* $\|\varphi_\varepsilon'(t) - f(\varphi_\varepsilon(t))\| \leq \varepsilon$. *On dira que* φ_ε *est une* $\varepsilon-$*solution de l'équation différentielle.*
Indication *: utiliser l'uniforme continuité. On commence par construire* φ_ε *pour les temps positifs : on part de* 0 *en se déplaçant à la vitesse* $f(0)$ *pendant un temps* η/M, *puis on repart de* $\varphi_\varepsilon(\eta/M)$ *en se déplaçant à la vitesse* $f(\varphi_\varepsilon(\eta/M))$ *pendant un temps* η/M, *etc...*

4. *Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitziennes de rapport* $\leq k$ *sur* $[-R/M, R/M]$ *qui valent* 0 *en* 0 *est un compact de* $C^0(I; \mathbb{R}^n)$.

5. *Montrer que toutes les* $\varepsilon-$*solutions construites précédemment sont lipschitziennes de rapport* $\leq M$. *En déduire l'existence d'une suite* φ_{ε_n} *de* ε_n-*solutions, avec* ε_n *tendant vers* 0, *et qui converge uniformément vers une fonction continue* φ.

6. *En écrivant l'équation sous forme intégrale, montrer que* φ *est une solution de l'équation différentielle.*