M1 ESR - Complément à la fiche d'exercices 1

Exponentielles de matrices non diagonalisables. Portrait de phase de systèmes linéaires autonomes de dimension 2.

Rappel de cours

Décomposition de Dunford

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. Soit $\chi_u(X) = \det\,(u - XI)$ le polynôme caractéristique de u (ici et dans la suite, on note I l'endomorphisme identité et I_n la matrice identité). Il se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$\chi_u(X) = (-1)^n \Pi_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{n_i}$$

où les λ_i sont des nombres complexes distincts.
Par le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\chi_u(u) := \Pi_{i=1}^k (u - \lambda_i I)^{n_i} = 0.$$

On en déduit par le lemme des noyaux que

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^k \ker\,(u - \lambda_i I)^{n_i}. \tag{1}$$

On note $V_i := \ker\,(u - \lambda_i I)^{n_i}$ le *sous-espace caractéristique* associé à la valeur propre λ_i. Comme u commute avec $(u - \lambda_i I)^{n_i}$, on vérifie que V_i est stable par u. Dans une base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^k V_i$, l'endomorphisme u a donc une représentation matricielle de la forme

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta_k \end{pmatrix}.$$

La matrice A est semblable à Δ : $A = P \Delta P^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique à $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Chaque Δ_i est une matrice carrée d'ordre $s_i := \dim V_i$ qui représente $u|_{V_i}$ (dans la sous-famille des éléments de $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ qui sont dans V_i).
Puisque $(\lambda_i - X)^{n_i}$ est un polynôme annulateur de $u|_{V_i}$, on sait que λ_i est la seule valeur propre de $u|_{V_i}$ et aussi de Δ_i. Donc le polynôme caractéristique χ_{Δ_i} de Δ_i est $\chi_{\Delta_i}(X) = (-1)^{s_i}(X - \lambda_i)^{s_i}$. Observant que $\chi_\Delta = \Pi_{i=1}^k \chi_{\Delta_i}$, il vient

$$(-1)^n \Pi_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{n_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^k s_i} \Pi_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{s_i}.$$

Comme les λ_i sont tous distincts, on en déduit $s_i = n_i$, pour tout $i = 1, \dots, k$.
Puisque $((u - \lambda_i I)|_{V_i})^{n_i} = 0$, on a $(\Delta_i - \lambda_i I_{n_i})^{n_i} = 0$. En d'autres termes, la matrice $\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}$ est nilpotente d'indice un entier $r_i \leq n_i$.
Ecrivons

$$\Delta_i = \lambda_i I_{n_i} + (\Delta_i - \lambda_i I_{n_i})$$

Notons Π_i la projection sur V_i parallèlement à l'espace $\bigoplus_{j \neq i} V_j$. La décomposition de Dunford de u est $u = d + v$ où

$$d = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Pi_i \quad , \quad v = (u - d) = \sum_{i=1}^k (u - \lambda_i I) \circ \Pi_i. \tag{2}$$

On peut en fait montrer que les Π_i sont des polynômes de u. C'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 1 *Pour tout $i = 1, \ldots, k$, on note $Q_i(X) = \Pi_{\ell \neq i}(X - \lambda_\ell)^{n_\ell}$. Les Q_i étant premiers dans leur ensemble, le théorème de Bezout implique qu'il existe des polynômes U_i tels que*

$$1 = U_1 Q_1 + \cdots + U_k Q_k. \tag{3}$$

On pose alors $P_i = U_i Q_i$ et le but de l'exercice est de montrer que $\Pi_i = P_i(u)$.

1. *Montrer que pour tout $i \neq j$, $(P_i P_j)(u) = 0$ et $P_j(u)|_{V_i} = 0$.*
2. *En utilisant que $I = \sum_{i=j}^{k} P_j(u)$, montrer que $P_i(u)$ est un projecteur.*
3. *Montrer que Im $P_i(u) = V_i$.*
4. *Conclure que $P_i(u)$ est bien la projection sur V_i parallèlement à $\sum_{j \neq i} V_j$.*

L'exercice précédent donne une méthode effective pour calculer la décomposition de Dunford. En effet, il suffit de déterminer des polynômes U_i vérifiant (3) ; on en déduit alors P_i, puis $\Pi_i = P_i(u)$ et enfin $d = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Pi_i$ et $v = \sum_{i=1}^{k} (u - \lambda_i I) \circ \Pi_i$. Pour cela, on peut décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{\chi_u(X)} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{n_i} \frac{a_{il}}{(X - \lambda_i)^\ell}.$$

On pose $U_i = (-1)^n \sum_{\ell=1}^{n_i} a_{il}(X - \lambda_i)^{n_i - \ell}$. On vérifie alors

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} U_i Q_i &= (-1)^n \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{n_i} a_{i\ell}(X - \lambda_i)^{n_i - \ell} \Pi_{j \neq i}(X - \lambda_j)^{n_j} \\ &= (-1)^n \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{n_i} a_{i\ell} \frac{1}{(X - \lambda_i)^\ell} \Pi_j (X - \lambda_j)^{n_j} = \chi_u(X) \sum_{i=1}^{k} \sum_{\ell=1}^{n_i} \frac{a_{il}}{(X - \lambda_i)^\ell} = 1.\end{aligned}$$

On peut également montrer que la décomposition de Dunford est unique au sens suivant :

Exercice 2 *Si d' est un endomorphisme diagonalisable et v' un endomorphisme nilpotent qui commute avec d', et si $u = d' + v'$, alors $d = d'$ et $v = v'$ (les endomorphismes d et v sont ceux donnés par (2)).*

1. *En observant que d' et v' commutent avec u, montrer que chaque V_i est stable par d' et par v'.*
2. *En déduire que d' et d commutent et que v' et v commutent.*
3. *Montrer que $d - d'$ est diagonalisable et nilpotente puis conclure.*

Calcul de l'exponentielle d'une matrice

Pour calculer l'exponentielle de A, on observe que :

$$A = P \exp \Delta P^{-1} = P \begin{pmatrix} \exp \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \exp \Delta_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec pour tout $i = 1, \ldots, k$,

$$\exp \Delta_i = \exp(\lambda_i I_{n_i} + (\Delta_i - \lambda_i I_{n_i})) = \exp(\lambda_i I_{n_i}) \exp(\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}) = e^{\lambda_i} \exp(\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}).$$

Dans la ligne précédente, on a utilisé que les matrices $\lambda_i I_{n_i}$ et $\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}$ commutent. En exploitant la nilpotence de $\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}$, il vient donc

$$\exp \Delta_i = e^{\lambda_i} \sum_{\ell=0}^{r_i - 1} (\Delta_i - \lambda_i I_{n_i})^\ell.$$

On rappelle qu'on a noté r_i l'indice de nilpotence de $\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}$. Lorsque $n_i \leq 3$, on peut se contenter de ce qui précède pour calculer $\exp \Delta_i$. Sinon, on peut chercher à réduire encore chaque matrice Δ_i. Comme $\Delta_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$ où $N_i = \Delta_i - \lambda_i I_{n_i}$ est une matrice nilpotente d'ordre r_i, il suffit de réduire N_i. L'objet de la section suivante est d'expliquer comment réduire une matrice nilpotente.

Exercice 3 *Pour calculer l'exponentielle de A, il n'est pas nécessaire de calculer la matrice de passage P ni les matrices Δ_i. On peut aussi utiliser la méthode suggérée à la suite de l'exercice 2. On rappelle que $u = d + v$ avec $d = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Pi_i$, $v = \sum_{i=1}^k (u - \lambda_i I) \circ \Pi_i$ et $\Pi_i = (U_i Q_i)(u)$.*

1. *Justifier que*
$$\exp d = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} \Pi_i.$$
2. *Justifier que*
$$\exp v = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{\ell=0}^{r_i - 1} \frac{(u - \lambda_i I)^\ell}{\ell!} \right) \circ \Pi_i.$$
3. *En déduire que*
$$\exp u = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} \left(\sum_{\ell=0}^{r_i - 1} \frac{(u - \lambda_i I)^\ell}{\ell!} \right) \circ \Pi_i$$

Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

Elle est fondée sur l'exercice suivant :

Exercice 4 *Soit $v : E \to E$ un endomorphisme nilpotent non nul sur un espace vectoriel E. On note $r \geq 1$ l'indice de nilpotente de v : Ker $v^{r-1} \neq E$ et Ker $v^r = E$.*

1. *Montrer que*
$$\{0\} \subsetneq \text{Ker } v \subsetneq \text{Ker } v^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker } v^r = E.$$
2. *Soit $x \notin$ Ker v^{r-1}. Montrer que la famille $\{x, v(x), \ldots, v^{r-1}(x)\}$ est libre.*
3. *Montrer que le sous-espace $F = \text{Vect}(x, v(x), \ldots, v^{r-1}(x))$ est stable par v.*
4. *Montrer que la matrice de l'endomophisme $v|_F$ dans la base $(v^{r-1}(x), \ldots, v(x), x)$ est*
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Rappelons donc à présent comment on peut réduire une matrice $N \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ nilpotente d'ordre $0 < r \leq m$. Notons v l'endomorphisme associé dans les bases canoniques. Alors
$$\{0\} \neq \text{Ker } v \subsetneq \text{Ker } v^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker } v^r = \mathbb{R}^m.$$

On identifie un supplémentaire G_1 de Ker v^{r-1} dans Ker v^r. Alors Ker $v^r = G_1 \oplus$ Ker v^{r-1}. Comme $G_1 \subset$ Ker v^r, $v(G_1)$ est un sous-espace de Ker v^{r-1}. On vérifie qu'il est en somme directe avec Ker v^{r-2}. On peut alors trouver un sous-espace G_2 de Ker v^{r-1} tel que
$$\text{Ker } v^{r-1} = v(G_1) \oplus G_2 \oplus \text{Ker } v^{r-2}$$

et donc
$$\text{Ker } v^r = (v(G_1) \oplus G_1) \oplus G_2 \oplus \text{Ker } v^{r-2}.$$

On construit ainsi une suite de sous-espaces $G_1, G_2, \dots, G_r$ telles que G_i est un supplémentaire de

$$v^{i-1}(G_1) \oplus v^{i-2}(G_2) \oplus \cdots \oplus v(G_{i-1}) \oplus \text{Ker } v^{r-i}$$

dans Ker v^{r-i+1}. Observer que le fait que $v^{i-1}(G_1) \oplus v^{i-2}(G_2) \oplus \cdots \oplus v(G_{i-1}) \oplus \text{Ker } v^{r-i}$ est bien une somme directe est une conséquence du fait que $v^{i-2}(G_1) \oplus v^{i-3}(G_2) \oplus \cdots \oplus G_{i-1} \oplus \text{Ker } v^{r+1-i}$ soit en somme directe[1].
On a donc

$$\text{Ker } v^r = \left(v^{r-1}(G_1) \oplus v^{r-2}(G_1) \oplus \cdots \oplus G_1\right) \bigoplus \left(v^{r-2}(G_2) \oplus v^{r-3}(G_2) \oplus \cdots \oplus G_2\right) \bigoplus \cdots \bigoplus (v(G_{r-1}) \oplus G_{r-1}) \bigoplus G_r.$$

Pour construire une base dans chaque sous-espace $H_i := (v^{r-i}(G_i) \oplus v^{r-i-1}(G_i) \oplus \cdots \oplus G_i)$, on se donne une base $(a_1, \dots, a_{\ell_i})$ de G_i. Comme $G_i \cap \text{Ker } v^h = \{0\}$ pour tout $h \leq r - i$, v^h est un isomorphisme de G_i sur $v^h(G_i)$ et donc $(v^h(a_1), \dots, v^h(a_{\ell_i}))$ est une base de $v^h(G_i)$. On en déduit que

$$(v^{r-i}(a_1), \dots, a_1, v^{r-i}(a_2), \dots a_2, \dots, v^{r-i}(a_{\ell_i}), \dots, a_{\ell_i})$$

est une base de H_i. On a vu dans l'exercice 4 que la matrice de $v|_{\text{Vect }(v^{r-i}(a_j),\dots,a_j)}$ dans la base $(v^{r-i}(a_j), \dots, a_j)$ est

$$J_{r-i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice de $v|_{H_i}$ s'écrit donc avec ℓ_i blocs J_{r-i+1} sous la forme :

$$\widetilde{J}_{(r-i+1),\ell_i} = \begin{pmatrix} J_{r-i+1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{r-i+1} \end{pmatrix}.$$

En prenant la réunion de ces bases des H_i pour tout $i = 1, \dots, r$, on obtient une base dans laquelle la matrice de v est de la forme

$$\begin{pmatrix} \widetilde{J}_{r,\ell_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{J}_{1,\ell_r} \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice qui a des zéros partout sauf juste au-dessus de la diagonale où les coefficients sont égaux à 0 ou 1.

Exercice 5 *On considère les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer l'exponentielle de chacune de ces matrices.*
2. *Ecrire chacune de ces matrices sous la forme PJP^{-1} où P est une matrice inversible et J une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux et les coefficients situés juste au-dessus de la diagonale. On explicitera P et J mais on ne demande pas de calculer P^{-1}.*

[1] Si $x_j \in G_j, j = 1, \dots, i-1$, vérifient $v^{i-1}(x_1) + \cdots + v(x_{i-1}) \in \text{Ker } v^{r-i}$, alors $v^{i-2}(x_1) + \cdots + x_{i-1} \in \text{Ker } v^{r+1-i}$ et on peut conclure que $x_{i-1} = \cdots = v^{i-2}(x_1) = 0$.

Portrait de phase des systèmes linéaires d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 6 *1. Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est semblable à l'une des matrices suivantes :*

$$A_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

$$B_{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R},$$

$$C_{\lambda,\mu} = \begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}^{*+}.$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions des systèmes $X'(t) = A_{\lambda,\mu}X(t)$, $X'(t) = B_{\lambda}X(t)$ et $X'(t) = C_{\lambda,\mu}X(t)$.

3. Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé quelques trajectoires $t \mapsto X(t) = (x(t), y(t))$ pour chacun de ces systèmes. Dans le cas des matrices $A_{\lambda,\mu}$, on distinguera les cas $\lambda < \mu < 0$, $0 < \mu < \lambda$, $\lambda < 0 < \mu$, $\lambda = \mu < 0$, $\lambda = \mu > 0$ et $\lambda = \mu = 0$. Dans les cas des matrices B_{λ} et $C_{\lambda,\mu}$, on distinguera les cas $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$.

4. Donner l'allure des trajectoires dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé pour le système différentiel $X'(t) = AX(t)$, selon que A est semblable à l'une des matrices $A_{\lambda,\mu}$, B_{λ} ou $C_{\lambda,\mu}$.