M1 ESR - Fiche d'exercices 1

Exponentielles de matrices non diagonalisables.

Rappel de cours

Décomposition de Dunford

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. Soit $\chi_u(X) = \det\,(u - XI)$ le polynôme caractéristique de u (ici et dans la suite, on note I l'endomorphisme identité et I_n la matrice identité). Il se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$\chi_u(X) = (-1)^n \Pi_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{n_i}$$

où les λ_i sont des nombres complexes distincts.
Par le théorème de Cayley-Hamilton,

$$\chi_u(u) := \Pi_{i=1}^k (u - \lambda_i I)^{n_i} = 0.$$

On en déduit par le lemme des noyaux[1] que

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^k \ker\,(u - \lambda_i I)^{n_i}. \tag{1}$$

On note $V_i := \ker\,(u-\lambda_i I)^{n_i}$ le *sous-espace caractéristique* associé à la valeur propre λ_i. Comme u commute avec $(u-\lambda_i I)^{n_i}$[2], on vérifie que V_i est stable par u. Dans une base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^k V_i$, l'endomorphisme u a donc une représentation matricielle de la forme

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta_k \end{pmatrix}. \tag{2}$$

La matrice A est semblable à Δ : $A = P\Delta P^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique à $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Chaque Δ_i est une matrice carrée d'ordre $s_i := \dim V_i$ qui représente $u|_{V_i}$ (dans la sous-famille des éléments de $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ qui sont dans V_i).
Puisque $(\lambda_i - X)^{n_i}$ est un polynôme annulateur de $u|_{V_i}$, on sait que λ_i est la seule valeur propre de $u|_{V_i}$ et aussi de Δ_i. Donc le polynôme caractéristique χ_{Δ_i} de Δ_i est $\chi_{\Delta_i}(X) = (-1)^{s_i}(X - \lambda_i)^{s_i}$.
Observant que $\chi_\Delta = \Pi_{i=1}^k \chi_{\Delta_i}$, il vient

$$(-1)^n \Pi_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{n_i} = (-1)^{\sum_{i=1}^k s_i} \Pi_{i=1}^k (X - \lambda_i)^{s_i}.$$

Comme les λ_i sont tous distincts, on en déduit $s_i = n_i$, pour tout $i = 1, \ldots, k$.
Puisque $((u - \lambda_i I)|_{V_i})^{n_i} = 0$, on a $(\Delta_i - \lambda_i I_{n_i})^{n_i} = 0$. En d'autres termes, la matrice $\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}$ est nilpotente d'indice un entier $r_i \leq n_i$.
Ecrivons

$$\Delta_i = \lambda_i I_{n_i} + (\Delta_i - \lambda_i I_{n_i})$$

Notons Π_i la projection sur V_i parallèlement à l'espace $\bigoplus_{j \neq i} V_j$. La décomposition de Dunford de u est $u = d + v$ où

$$d = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Pi_i \qquad , \qquad v = (u - d) = \sum_{i=1}^k (u - \lambda_i I) \circ \Pi_i. \tag{3}$$

[1]Si $P_1, \ldots, P_k$ sont des polynômes premiers entre eux deux à deux et $P = P_1 \ldots P_k$, alors $\text{Ker } P(u) = \text{Ker } P_1(u) \oplus \cdots \oplus \text{Ker } P_k(u)$.

[2]Dans toute la suite, il sera utile de se rappeler que deux polynômes quelconques en u commutent.

Exercice 1 *Justifier que d est un endomorphisme diagonalisable et que v est un endomorphisme nilpotent.*

On peut en fait montrer que les Π_i sont des polynômes de u. C'est l'objet de l'exercice suivant.

Exercice 2 *Pour tout $i = 1, \ldots, k$, on note $Q_i(X) = \Pi_{\ell \neq i}(X - \lambda_\ell)^{n_\ell}$. Les Q_i étant premiers dans leur ensemble, le théorème de Bezout implique qu'il existe des polynômes U_i tels que*

$$1 = U_1 Q_1 + \cdots + U_k Q_k. \tag{4}$$

On pose alors $P_i = U_i Q_i$ et le but de l'exercice est de montrer que $\Pi_i = P_i(u)$.

1. *Montrer que pour tout $i \neq j$, $(P_i P_j)(u) = 0$ et $P_j(u)|_{V_i} = 0$.*
2. *En utilisant que $I = \sum_{j=1}^k P_j(u)$, montrer que $P_i(u)$ est un projecteur.*
3. *Montrer que Im $P_i(u) = V_i$.*
4. *Conclure que $P_i(u)$ est bien la projection sur V_i parallèlement à $\sum_{j \neq i} V_j$.*

L'exercice précédent donne une méthode effective pour calculer la décomposition de Dunford. En effet, il suffit de déterminer des polynômes U_i vérifiant (4) ; on en déduit alors P_i, puis $\Pi_i = P_i(u)$ et enfin $d = \sum_{i=1}^k \lambda_i \Pi_i$ et $v = \sum_{i=1}^k (u - \lambda_i I) \circ \Pi_i$. Pour cela, on peut décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{\chi_u(X)} = \sum_{i=1}^k \sum_{\ell=1}^{n_i} \frac{a_{il}}{(X - \lambda_i)^\ell}.$$

On pose $U_i = (-1)^n \sum_{\ell=1}^{n_i} a_{il}(X - \lambda_i)^{n_i - \ell}$. On vérifie alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^k U_i Q_i &= (-1)^n \sum_{i=1}^k \sum_{\ell=1}^{n_i} a_{i\ell}(X - \lambda_i)^{n_i - \ell} \Pi_{j \neq i}(X - \lambda_j)^{n_j} \\
&= (-1)^n \sum_{i=1}^k \sum_{\ell=1}^{n_i} a_{i\ell} \frac{1}{(X - \lambda_i)^\ell} \Pi_j (X - \lambda_j)^{n_j} = \chi_u(X) \sum_{i=1}^k \sum_{\ell=1}^{n_i} \frac{a_{il}}{(X - \lambda_i)^\ell} = 1.
\end{aligned}$$

Exercice 3 *Calculer la décomposition de Dunford de l'endomorphisme u dont la matrice dans les bases canoniques est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut également montrer que la décomposition de Dunford est unique au sens suivant :

Exercice 4 *L'objet de l'exercice est de montrer l'assertion suivante :*
Si d' est un endomorphisme diagonalisable et v' un endomorphisme nilpotent qui commute avec d', et si $u = d' + v'$, alors $d = d'$ et $v = v'$ (les endomorphismes d et v sont ceux donnés par (3)).

1. *En observant que d' et v' commutent avec u, montrer que chaque V_i est stable par d' et par v'.*
2. *En déduire que d' et d commutent puis que v' et v commutent.*
3. *Montrer que $d - d'$ est diagonalisable et nilpotente puis conclure.*

Calcul de l'exponentielle d'une matrice

On rappelle que l'exponentielle d'un endomorphisme u est donnée par

$$\exp u = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{u^j}{j!}.$$

On définit de manière analogue l'exponentielle d'une matrice carrée A :

$$\exp A = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j}{j!}.$$

Pour calculer l'exponentielle de A, on peut commencer par réduire A en une matrice diagonale par blocs comme en (2) puis écrire :

$$A = P \exp \Delta P^{-1} = P \begin{pmatrix} \exp \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \exp \Delta_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

avec pour tout $i = 1, \dots, k$,

$$\exp \Delta_i = \exp(\lambda_i I_{n_i} + (\Delta_i - \lambda_i I_{n_i})) = \exp(\lambda_i I_{n_i}) \exp(\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}) = e^{\lambda_i} \exp(\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}).$$

Dans la ligne précédente, on a utilisé que les matrices $\lambda_i I_{n_i}$ et $\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}$ commutent. En exploitant la nilpotence de $\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}$, il vient donc

$$\exp \Delta_i = e^{\lambda_i} \sum_{\ell=0}^{r_i - 1} (\Delta_i - \lambda_i I_{n_i})^{\ell}.$$

On rappelle qu'on a noté r_i l'indice de nilpotence de $\Delta_i - \lambda_i I_{n_i}$. Lorsque $n_i \leq 3$, on peut se contenter de ce qui précède pour calculer $\exp \Delta_i$. Sinon, on peut chercher à réduire encore chaque matrice Δ_i. Comme $\Delta_i = \lambda_i I_{n_i} + N_i$ où $N_i = \Delta_i - \lambda_i I_{n_i}$ est une matrice nilpotente d'ordre r_i, il suffit de réduire N_i. L'objet de la section suivante est d'expliquer comment réduire une matrice nilpotente.

Exercice 5 *Pour calculer l'exponentielle de A, il n'est pas nécessaire de calculer la matrice de passage P ni les matrices Δ_i. On peut aussi utiliser la méthode suggérée à la suite de l'exercice 2. On rappelle que $u = d + v$ avec $d = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Pi_i$, $v = \sum_{i=1}^{k} (u - \lambda_i I) \circ \Pi_i$ et $\Pi_i = (U_i Q_i)(u)$.*

1. *Justifier que*
$$\exp d = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} \Pi_i.$$

2. *Justifier que*
$$\exp v = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{\ell=0}^{r_i - 1} \frac{(u - \lambda_i I)^{\ell}}{\ell!} \right) \circ \Pi_i.$$

3. *En déduire que*
$$\exp u = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i} \left(\sum_{\ell=0}^{r_i - 1} \frac{(u - \lambda_i I)^{\ell}}{\ell!} \right) \circ \Pi_i$$

Exercice 6 *Calculer l'exponentielle de la matrice donnée à l'exercice 3.*

Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

Elle est fondée sur l'exercice suivant :

Exercice 7 *Soit $v : E \to E$ un endomorphisme nilpotent non nul sur un espace vectoriel E. On note $r \geq 1$ l'indice de nilpotente de v : $Ker\ v^{r-1} \neq E$ et $Ker\ v^r = E$.*

1. *Montrer que*
$$\{0\} \subsetneq Ker\ v \subsetneq Ker\ v^2 \subsetneq \cdots \subsetneq Ker\ v^r = E.$$

2. *Justifier que $v(Ker\ v^i) \subset Ker\ v^{i-1}$, pour tout $i = 1, \dots, r$.*

3. *Soit $x \notin Ker\ v^{r-1}$. Montrer que la famille $\{x, v(x), \dots, v^{r-1}(x)\}$ est libre.*

4. *Montrer que le sous-espace $F = Vect(x, v(x), \dots, v^{r-1}(x))$ est stable par v.*

5. *Montrer que la matrice de l'endomophisme $v|_F$ dans la base $(v^{r-1}(x), \dots, v(x), x)$ est*
$$J_r := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 *Notons v un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E ; on note r son indice.*

1. *Soit $i \in \{2, \dots, r-1\}$. Montrer que si G est en somme directe avec $Ker\ v^i$ dans $Ker\ v^{i+1}$, alors $v(G)$ est en somme directe avec $Ker\ v^{i-1}$ dans $Ker\ v^i$.*

2. *Montrer qu'il existe des sous-espaces $G_1, \dots, G_r$ dans E tels que pour tout $i = 2, \dots, r$, on a*
$$Ker\ v^i = G_i \oplus v(G_{i+1}) \oplus v^2(G_{i+2}) \oplus \cdots \oplus v^{r-i}(G_r) \oplus Ker\ v^{i-1}.$$
Indication : on pourra commencer par $i = r$ puis procéder par récurrence descendante.

3. *On pose $H_1 = G_1$, $H_2 = G_2 \oplus v(G_2)$ et plus généralement pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$,*
$$H_i := G_i \oplus v(G_i) \oplus \cdots \oplus v^{i-1}(G_i).$$
Montrer que chaque H_i est stable par v (on pourra observer que $G_i \subset Ker\ v^i$) et que
$$E = H_1 \oplus \cdots \oplus H_r.$$

4. *On fixe $i \in \{2, \dots, r\}$ et on se donne une base $(a_{i,1}, \dots, a_{i,\ell_i})$ de G_i. Montrer que pour tout $j \in \{1, \dots, i-1\}$, $(v^j(a_{i,1}), \dots, v^j(a_{i,\ell_i}))$ est une base de $v^j(G_i)$. En déduire qu'une base de H_i est donnée par*
$$(v^{i-1}(a_{i,1}), \dots, a_{i,1}; v^{i-1}(a_{i,2}), \dots, a_{i,2}; \dots, v^{i-1}(a_{i,\ell_i}), \dots, a_{i,\ell_i}).$$
Quelle est la matrice de $v|_{H_i}$ dans cette base ?

5. *Donner une base de E dans laquelle la matrice de v a tous ses coefficients nuls, à l'exception de quelques éléments au-dessus de la diagonale qui sont égaux à 1.*

Exercice 9 *On considère les matrices suivantes*
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & -6 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 & 11 \\ 0 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$
Ecrire chacune de ces matrices sous la forme PJP^{-1} où P est une matrice inversible et J une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux et les coefficients situés juste au-dessus de la diagonale. On explicitera P et J mais on ne demande pas de calculer P^{-1}.