M1 ESR - Devoir maison

à rendre au plus tard le 16 avril 2020

Exercice 1 *Soit* $f : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *un champs de vecteurs continu. On suppose qu'il existe une fonction continue strictement croissante* $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$*, telle que* $\omega(0) = 0$ *et*

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_\varepsilon^1 \frac{ds}{\omega(s)} = +\infty,$$

et telle que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in [0,+\infty[, \qquad \|f(t,z_1) - f(t,z_2)\| \le \omega(\|z_1 - z_2\|).$$

Le but de cet exercice est de montrer que, sous cette hypothèse plus faible que celle vue en cours, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{P}$$

admet **au plus** *une solution maximale sur* $[0,+\infty[$

On se donne (I_1, x_1) *et* (I_2, x_2) *deux solutions maximales de* (P)*. Soit* $T > 0$ *tel que* $[0,T[\subset I_1 \cap I_2$.

1. *On pose* $h(t) = \sup_{[0,t]} \|x_2(t) - x_1(t)\|$ *pour* $t \in [0,T[$*. Montrer que pour tout* $s \in [0,T[$,
$$\|x_2(s) - x_1(s)\| \le \int_0^s \omega(h(u))\, du.$$

2. *En déduire que pour tout* $t \in [0,T[$,
$$h(t) \le \int_0^t \omega(h(u))\, du.$$

3. *On pose* $H(t) = \int_0^t \omega(h(s))\, ds$*. Justifier que* H *est dérivable, croissante et que*
$$H'(t) \le \omega(H(t)).$$
En déduire que pour tout t *et tout* $\varepsilon > 0$ *on a*
$$\frac{H'(t)}{\omega(H(t)+\varepsilon)} \le 1.$$

4. *Montrer que pour tout* $t \in [0,T[$ *et tout* $\varepsilon > 0$ *on a*
$$\int_\varepsilon^{H(t)+\varepsilon} \frac{ds}{\omega(s)} \le t.$$

5. *En déduire que* H *est nulle sur* $[0,T[$*. Conclure.*

Exercice 2 *Le but de cet exercice est d'utiliser les outils vus en cours pour étudier l'équation aux dérivées partielles non-linéaire suivante*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho^2) = 0, & \forall t \in [0,+\infty[, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{$\star$}$$

On suppose que la donnée initiale ρ_0 *est de classe* C^1 *et bornée.*

1. *Dans cette première question, on* **suppose** *qu'il existe une solution* $\rho : (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *au problème* $(\star)$ *, de classe* C^1.

   (a) *Montrer que* ρ *vérifie le problème de transport* **linéaire** *suivant*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + v(t,x)\partial_x \rho = 0, & \forall t \in [0,+\infty[, \forall x \in \mathbb{R}, \\ \rho(0,x) = \rho_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \qquad (\star\star)$$

   où v *est défini par*

$$v(t,x) := 2\rho(t,x).$$

   (b) *Définir les courbes caractéristiques* $t \mapsto X(t,0,x_0)$ *associées à* v. *Pourquoi sont-elles bien définies sur* $[0,+\infty[$ *?*

   (c) *Montrer que*

$$v(t, X(t,0,x_0)) = 2\rho_0(x_0), \qquad \forall t \in [0,+\infty[, \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

   (d) *En déduire que*

$$\rho(t, x_0 + 2\rho_0(x_0)t) = \rho_0(x_0), \qquad \forall t \in [0,+\infty[, \forall x_0 \in \mathbb{R}. \qquad (E)$$

   Dans les deux questions suivantes, on va exploiter la formule (E).

   On rappelle que cette formule a été établie en supposant que la solution régulière ρ **existe !**

2. *On suppose dans cette question que* ρ_0 *est une fonction strictement croissante.*

   (a) *Pour tout* $t \in [0,+\infty[$, *on note*

$$\psi_t : x_0 \in \mathbb{R} \mapsto x_0 + 2\rho_0(x_0)t \in \mathbb{R}.$$

   Montrer que ψ_t *est une bijection strictement croissante de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$.

   (b) i. *Pour tout* $t \in [0,+\infty[$ *et tout* $x \in \mathbb{R}$, *montrer qu'il existe un unique* $\phi(t,x) \in \mathbb{R}$ *vérifiant*

$$\phi(t,x) + 2\rho_0(\phi(t,x))t = x,$$

   et que l'application ϕ *est continue sur* $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

   ii. *On fixe* $t \in [0,+\infty[$. *Montrer que* $x \in \mathbb{R} \mapsto \phi(t,x)$ *est dérivable et vérifie*

$$\partial_x \phi(t,x) = \frac{1}{1 + 2t\rho_0'(\phi(t,x))}.$$

   iii. *On fixe* $x \in \mathbb{R}$. *Montrer que* $t \in [0,+\infty[\mapsto \phi(t,x)$ *est dérivable et vérifie*

$$\partial_t \phi(t,x) = \frac{-2\rho_0(\phi(t,x))}{1 + 2t\rho_0'(\phi(t,x))}.$$

   iv. *Montrer que* ϕ *est de classe* C^1 *sur* $[0,+\infty[\times\mathbb{R}$.

   (c) *Démontrer que la fonction définie par*

$$\rho(t,x) := \rho_0(\phi(t,x)), \qquad \forall t \in [0,+\infty[, \forall x \in \mathbb{R},$$

   est une solution de classe C^1 *au problème* $(\star)$. *En existe-t-il une autre ?*

3. *On suppose maintenant que* ρ_0 *est strictement décroissante et on considère à nouveau la fonction* ψ_t *introduite dans la question 2.(a)*

   (a) *Soient* $x_{0,1} < x_{0,2}$. *Montrer qu'il existe* $T > 0$ *tel que*

$$\psi_T(x_{0,1}) = \psi_T(x_{0,2}).$$

   (b) *En utilisant* (E), *établir une contradiction.*

   (c) *Que déduit-on de cette analyse ?*