Master MAPI^3 $1^{ère}$ année — Université Paul Sabatier - Toulouse 3 — Année 2015-2016

Analyse numérique des EDP
TD 3

Avec certains corrigés

Les numéros de Théorèmes, Propositions, etc ... font référence aux notes de cours.

Exercice 1 (Problème de Poisson avec second membre distribution)

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution. On suppose que T est continue pour la topologie de $H^1(\Omega)$, cela signifie qu'il existe $C > 0$ telle que

$$|\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| \leq C\|\varphi\|_{H^1}, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \qquad (\star)$$

1. *En utilisant la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1_0(\Omega)$, démontrer qu'il existe une unique forme linéaire continue L sur $H^1_0(\Omega)$ vérifiant $L(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*
2. *Démontrer qu'il existe une unique fonction $u \in H^1_0(\Omega)$ telle que*

$$-\Delta u = T, \ \ \text{au sens des distributions.}$$

3. **Exemple :** *On prend $\Omega =]-1, 1[\times]0, 1[$ et $f \in L^2(\Omega)$. On note $\Omega_1 =]-1, 0[\times]0, 1[$ et $\Omega_2 =]0, 1[\times]0, 1[$. On pose $\Sigma = \{0\}\times]0, 1[$ et on définit la distribution T par*

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \overset{\text{def}}{=} \int_\Sigma \varphi \, d\sigma, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Vérifier que l'hypothèse $(\star)$ est satisfaite.

On note $u \in H^1_0(\Omega)$ l'unique solution de l'équation $-\Delta u = T$. On admet que $u_{|\Omega_1} \in H^2(\Omega_1)$ et $u_{|\Omega_2} \in H^2(\Omega_2)$. Déterminer les conditions de saut satisfaites par u ou ses dérivées sur l'interface Σ.

Corrigé :

1. Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ quelconque. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\|u - \varphi_n\|_{H^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On va montrer que la suite numérique $(\langle T, \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}})_n$ converge et que sa limite ne dépend pas de la suite $(\varphi_n)_n$ choisie.
   - Comme la suite $(\varphi_n)_n$ converge dans $H^1(\Omega)$, elle est de Cauchy dans cet espace.
     Pour $n, p \geq 0$, on utilise la linéarité de T et la propriété $(\star)$ pour écrire

     $$|\langle T, \varphi_{n+p}\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \langle T, \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| = |\langle T, \varphi_{n+p} - \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| \leq C\|\varphi_{n+p} - \varphi_n\|_{H^1},$$

     et ainsi en déduire que la suite $(\langle T, \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}})_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ (qui est complet) et donc qu'elle converge.
   - Soit $(\psi_n)_n$ une autre suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers u dans $H^1(\Omega)$. On utilise encore la linéarité de T et la propriété $(\star)$ pour obtenir

     $$|\langle T, \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \langle T, \psi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| = |\langle T, \varphi_n - \psi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| \leq C\|\varphi_n - \psi_n\|_{H^1} \leq C(\|u - \varphi_n\|_{H^1} + \|u - \psi_n\|_{H^1}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

     Ainsi on a

     $$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \lim_{n\to\infty} \langle T, \psi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

   Ceci montre que la limite de la suite $(\langle T, \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}})_n$ ne dépend que de u et pas de la suite $(\varphi_n)_n$ choisie. On pose donc désormais

   $$L(u) \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

   On va montrer que cette fonction L convient.
   - La linéarité de L vient directement de celle de T.
   - Si $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on peut prendre la suite constante $\varphi_n = u$ et donc $L(u) = \langle T, u\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$. Ainsi, L est bien un prolongement de T.

— Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ et $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers u. D'après ($\star$), nous avons

$$|\langle T, \varphi_n\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| \leq C\|\varphi_n\|_{H^1},$$

et par passage à la limite, on trouve

$$|L(u)| \leq C\|u\|_{H^1}.$$

Ceci prouve la continuité de la forme linéaire L.

2. On travaille dans l'espace de Hilbert $H = H^1_0(\Omega)$ et avec la forme bilinéaire

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \ \ \forall u, v \in H^1_0(\Omega),$$

et la forme linéaire L construite dans la précédente question. On a déjà montré en cours que a est continue et coercive et on peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram et obtenir l'existence et l'unicité de la solution $u \in H^1_0(\Omega)$ du problème

$$a(u, v) = L(v), \ \ \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Si on prend $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans cette équation, on trouve

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

L'intégrale de gauche s'écrit aussi $\langle \nabla u, \nabla\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ ou encore, par définition des dérivées au sens des distributions,

$$\langle -\text{div } (\nabla u), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}},$$

et donc on a bien

$$-\Delta u = T,$$

au sens distributions.

3. On observe que, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $\varphi_{|\Omega_1} \in H^1(\Omega_1)$ et que $\Sigma \subset \partial\Omega_1$. On peut donc utiliser le théorème de traces pour le domaine Ω_1 et donc obtenir

$$\|\varphi\|_{L^2(\Sigma)} \leq \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega_1)} \leq C\|\varphi\|_{H^1(\Omega_1)} \leq C\|\varphi\|_{H^1(\Omega)},$$

on conclut avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Si on prend $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1) \subset \mathcal{D}(\Omega)$, on voit que $\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0$ et donc on a $\Delta u = 0$ au sens des ditributions de $\mathcal{D}'(\Omega_1)$ (idem dans $\mathcal{D}'(\Omega_2)$).
Comme on a supposé la régularité de $u_1 \stackrel{\text{def}}{=} u_{|\Omega_1}$ et $u_2 \stackrel{\text{def}}{=} u_{|\Omega_2}$, on peut utiliser la formule de Stokes

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_1} (-\Delta u_1)\varphi \, dx \\ &= \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla\varphi \, dx - \int_\Sigma (\nabla u_1) \cdot n_1 \varphi \, d\sigma \\ &= \int_{\Omega_1} u_1(-\Delta\varphi) \, dx + \int_\Sigma u_1(\nabla\varphi) \cdot n_1 \, d\sigma - \int_\Sigma (\nabla u_1) \cdot n_1\varphi \, d\sigma, \end{aligned}$$

où on a noté n_1 la normale sortante à Ω_1. De la même façon, on trouve

$$0 = \int_{\Omega_1} u_2(-\Delta\varphi) \, dx + \int_\Sigma u_2(\nabla\varphi) \cdot n_2 \, d\sigma - \int_\Sigma (\nabla u_2) \cdot n_2\varphi \, d\sigma.$$

En additionant les deux équations, et en utilisant le fait que $n_1 = -n_2$ (on notera n cette normale), on obtient

$$0 = \int_\Omega u(-\Delta\varphi) \, dx + \int_\Sigma (u_1 - u_2)(\nabla\varphi) \cdot n \, d\sigma + \int_\Sigma ((\nabla u_2) \cdot n - (\nabla u_1) \cdot n)\varphi \, d\sigma.$$

La première intégrale est égale à $\langle(-\Delta u), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ et donc à $\langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$. On obtient donc in fine

$$0 = \int_\Sigma \Big(1 + ((\nabla u_2) - (\nabla u_1)) \cdot n\Big)\varphi \, d\sigma + \int_\Sigma (u_1 - u_2)(\nabla\varphi) \cdot n \, d\sigma.$$

On exploite maintenant cette égalité :

— On prend tout d'abord des fonctions test φ de la forme $\varphi(x_1, x_2) = \eta(x_1)\xi(x_2)$ avec $\eta \in \mathcal{D}(]-1,1[)$, $\xi \in \mathcal{D}(]0,1[)$ et $\eta'(0) = 0$ et $\eta(0) = 1$. On obtient

$$\int_\Sigma \left(1 + ((\nabla u_2) - (\nabla u_1)) \cdot n\right)\xi \, d\sigma = 0,$$

pour tout choix de ξ. Ainsi on a l'égalité

$$\left[(\nabla u_2) \cdot n - (\nabla u_1) \cdot n\right] = -1, \text{ sur } \Sigma.$$

— Utilisant la propriété précédente, on trouve cette fois que $u_1 = u_2$ sur Σ.

En conclusion, il n'y a donc pas de saut de u le long de Σ mais il y a un saut de la dérivée normale de u égal à -1.

■

Exercice 2 (Approximation de conditions aux limites par pénalisation)

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^2(\Omega)$.

1. *Pour $\varepsilon > 0$ fixé on définit*

$$a_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v) \, d\sigma, \ \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

$$L(v) = \int_\Omega f v \, dx, \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Démontrer que le théorème de Lax-Milgram s'applique dans ce cadre avec $H = H^1(\Omega)$ et déterminer le problème aux limites que l'on résout grâce à celui-ci. On notera u_ε l'unique solution de ce problème.

2. *Démontrer qu'il existe $C > 0$, indépendant de ε, tel que*

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \ \forall 0 < \varepsilon < 1,$$

$$\|\gamma_0(u_\varepsilon)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon}, \ \forall 0 < \varepsilon < 1.$$

3. *Déterminer* formellement *le comportement de la suite u_ε quand $\varepsilon \to 0$.*

4. *On note $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ l'unique solution du problème aux limites*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f, & \text{dans } \Omega, \\ u_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On rappelle que $u_0 \in H^2(\Omega)$. Démontrer que l'on a

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon},$$

$$\|\gamma_0(u_\varepsilon)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

Corrigé :

1. H est bien un espace de Hilbert (théorème du cours) et L est bien une forme linéaire continue. La continuité de a_ε provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème de traces qui donne l'inégalité

$$|a_\varepsilon(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\varepsilon\|u\|_H\|v\|_H.$$

Il reste à montrer la coercivité de a_ε. Pour cela, on écrit

$$a_\varepsilon(u, u) = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\gamma_0(u)\|^2_{L^2(\partial\Omega)}.$$

On utilise l'inégalité suivante (issue de l'inégalité de Poincaré)

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P(\|\nabla u\|_{L^2} + \|\gamma_0(u)\|_{L^2(\partial\Omega)}), \ \forall u \in H^1(\Omega), \tag{$\star$}$$

pour déduire l'existence de $\alpha_\varepsilon > 0$ tel que

$$a_\varepsilon(u, u) \geq \alpha_\varepsilon\|u\|^2_H, \ \forall u \in H.$$

Ainsi, on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram et trouver une unique solution $u_\varepsilon \in H^1(\Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u_\varepsilon)\gamma_0(v) \, d\sigma = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{$\star\star$}$$

En prenant d'abord $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans cette formule, le terme de bord correspondant est nul et on trouve

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx,$$

ce qui montre que $-\Delta u_\varepsilon = f$ au sens des distributions dans Ω.
Supposons que $u_\varepsilon \in H^2(\Omega)$ (ce qui peut en effet être démontré) et multiplions l'équation $-\Delta u_\varepsilon = f$ par un élément $v \in H^1(\Omega)$ quelconque. On l'intègre alors par parties pour obtenir

$$\int_\Omega f v \, dx = \int_\Omega (-\Delta u_\varepsilon) v \, dx = \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_0 \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right) \gamma_0(v) \, d\sigma.$$

En comparant cette formule à ($\star\star$), on trouve

$$\int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{\varepsilon} \gamma_0(u_\varepsilon) + \gamma_0 \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right) \right) \gamma_0(v) \, d\sigma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$ (voir le théorème III.9), on déduit de ces égalités que u_ε doit vérifier la condition de Robin (ou Fourier)

$$\frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où on a enlevé le symbole γ_0 pour alléger la notation.

2. Si on prend $v = u_\varepsilon$ dans la formulation variationnelle, on trouve

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\gamma_0(u_\varepsilon)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant ($\star$) et l'inégalité de Young, on trouve finalement

$$\|\nabla u_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\gamma_0(u_\varepsilon)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ce qui fournit les estimations demandées.

3. Les estimations précédentes montrent que $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille bornée dans $H^1(\Omega)$, vérifient toutes l'équation $-\Delta u_\varepsilon = f$ et les traces $\gamma_0(u_\varepsilon)$ tendent vers 0 dans $L^2(\partial\Omega)$. Formellement on peut donc penser que u_ε va converger vers la solution de la même EDP mais avec des conditions de Dirichlet homogènes.

4. Comme $u_0 \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, on peut multiplier l'équation satisfaite par u_0 par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega f v \, dx = \int_\Omega (-\Delta u_0) v \, dx = \int_\Omega \nabla u_0 \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial n} v \, d\sigma.$$

Si on soustrait cette égalité à la formulation variationnelle vérifiée par u_ε, on trouve

$$\int_\Omega \nabla(u_\varepsilon - u_0) \cdot \nabla v \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} u_\varepsilon v \, d\sigma = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_0}{\partial n} v \, d\sigma.$$

On prend maintenant $v = u_\varepsilon - u_0$, et on utilise les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, pour obtenir

$$\|\nabla(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \|\gamma_0 u_\varepsilon\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\gamma_0 u_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon} \|\gamma_0 u_\varepsilon\|^2_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Le dernier terme peut être passé à la gauche de l'inégalité et donner finalement

$$\|\nabla(u_\varepsilon - u_0)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon} \|\gamma_0 u_\varepsilon\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|^2_{L^2(\partial\Omega)}.$$

In fine, on trouve les estimations requises

$$\|\nabla(u_\varepsilon - u_0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{\varepsilon},$$

$$\|\gamma_0 u_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\varepsilon.$$

■

Exercice 3 (Principe du maximum)

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$.
On admet dans la suite la propriété suivante (une propriété similaire en 1D a été étudiée dans le TD1) : pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$ et toute fonction $F \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a

$$F(u) \in H^1(\Omega), \text{ avec } \nabla F(u) = F'(u)\nabla u \text{ p.p. et } \gamma_0(F(u)) = F(\gamma_0(u)) \text{ p.p.}$$

1. *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $u_b \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Démontrer l'existence et l'unicité d'une solution variationnelle $u \in H^1(\Omega)$ au problème*
$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega,\\ u = u_b, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$
2. *On suppose maintenant que $u_b \geq 0$ et $f \geq 0$. On veut montrer que $u \geq 0$ presque partout.*
   (a) *Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{C}_b^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$,* **décroissante** *et vérifiant : $F > 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $F = 0$ sur $[0, +\infty[$.*
   (b) *Montrer que*
   $$\int_\Omega F'(u)|\nabla u|^2\,dx = 0.$$
   (c) *En déduire que $F'(u)\nabla u = 0$ presque partout, puis que $F(u)$ est une constante.*
   (d) *Montrer que $F(u) = 0$ presque partout et conclure.*

Corrigé :

1. Voir le cours ...
2. (a) On pose
$$F(s) = \int_s^{+\infty} \eta(-t)\,dt, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$
où η est la fonction définie dans le Lemme II.4. On vérifie que cette fonction F convient.

   (b) La fonction u vérifie la formulation variationnelle
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx = \int_\Omega fv\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$
D'après le résultat admis, on peut poser $v = F(u)$ qui définit un élément de $H^1(\Omega)$. Par ailleurs, comme $u = u_b \geq 0$ sur le bord, nous avons
$$\gamma_0(v) = \gamma_0(F(u)) = F(\gamma_0(u)) = F(u_b) = 0, \text{ p.p.},$$
d'après les propriétés de F. Ainsi v est dans $H_0^1(\Omega)$ et on a donc
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla F(u)\,dx = \int_\Omega fF(u)\,dx.$$
D'après le calcul de $\nabla F(u)$ rappelé au début de l'énoncé, nous avons donc
$$\int_\Omega F'(u)|\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega fF(u)\,dx.$$
Comme F est décroissante, le membre de gauche est négatif tandis que le membre de droite est positif (car $f \geq 0$ et $F \geq 0$). En conclusion, nous avons bien
$$\int_\Omega F'(u)|\nabla u|^2\,dx = 0.$$

   (c) La fonction sous l'intégrale précédente est de signe constant donc nous avons
$$F'(u)|\nabla u|^2 = 0, \text{ presque partout},$$
et en multipliant par $F'(u)$ on déduit
$$|F'(u)|^2|\nabla u|^2 = 0, \text{ presque partout}.$$

D'où
$$F'(u)\nabla u = 0, \text{ presque partout.}$$
Ceci montre que $\nabla(F(u)) = 0$, et comme $F(u) \in H_0^1(\Omega)$, cela implique que $F(u) = 0$ (d'après l'inégalité de Poincaré).

(d) D'après les propriétés de F, le fait que $F(u) = 0$ implique que $u \geq 0$ presque partout.

■

Exercice 4 (Introduction au problème de Stokes - PLUS DIFFICILE)

Soit Ω un domaine borné régulier et connexe de $\mathbb{R}^d$. On se donne un champ de vecteurs $\boldsymbol{f} \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^d)$. *On notera $L_m^2(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ à moyenne nulle.*
On admet le résultat (non trivial) suivant : l'opérateur div : $(H_0^1(\Omega))^d \to L_m^2(\Omega)$ admet un inverse à droite linéaire continu. Cela signifie qu'il existe un opérateur linéaire continu $\Pi : L_m^2(\Omega) \to (H_0^1(\Omega))^d$ tel que

$$\text{pour tout } g \in L_m^2(\Omega), \text{ on a div } (\Pi g) = g, \text{ et } \|\Pi g\|_{H^1} \leq C\|g\|_{L^2}. \tag{$\star$}$$

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, démontrer qu'il existe une unique solution $\boldsymbol{u}_\varepsilon \in (H_0^1(\Omega))^d$ au problème suivant*
$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u}_\varepsilon - \dfrac{1}{\varepsilon}\nabla(\text{div } \boldsymbol{u}_\varepsilon) = \boldsymbol{f}, \text{ dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u}_\varepsilon = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$
et que celle-ci vérifie, pour un $C > 0$ indépendant de ε,
$$\|\nabla \boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\text{div } \boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2 \leq C.$$
2. *On note désormais $p_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}\text{div } \boldsymbol{u}_\varepsilon$. En utilisant ($\star$), démontrer que $\|p_\varepsilon\|_{L^2} \leq C$ uniformément en ε.*
3. *On admet désormais qu'il existe $p \in L_m^2(\Omega)$ telle que $p_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} p$ au sens des distributions. Montrer qu'il existe une unique solution $\boldsymbol{u} \in (H_0^1(\Omega))^d$ solution du problème*
$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} - \nabla p, \text{ dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{S}$$
4. *Démontrer que*
$$\int_\Omega |\nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u})|^2 \, dx \leq C\varepsilon\|p_\varepsilon\|_{L^2}\|p - p_\varepsilon\|_{L^2} + \left|\int_\Omega (p_\varepsilon - p)(\text{div } \boldsymbol{u}) \, dx\right|,$$
puis en déduire que $\boldsymbol{u}_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \boldsymbol{u}$ dans $(H^1(\Omega))^d$. Que vaut div $\boldsymbol{u}$?
5. *En utilisant ($\star$), démontrer qu'il existe $C > 0$ telle que*
$$\|\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u}\|_{H^1} + \|p_\varepsilon - p\|_{L^2} \leq C\varepsilon.$$

Corrigé :

1. On prend $H = (H_0^1(\Omega))^d$ comme espace de travail (qui est bien un Hilbert) et on pose
$$a_\varepsilon(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v_i \, dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega (\text{div } \boldsymbol{u})(\text{div } \boldsymbol{v}) \, dx,$$
$$L(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, dx,$$
où on a noté $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_d)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, ..., v_d)$ les composante des champs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$.
Le fait que a_ε (resp. L) soit bilinéaire (resp. linéaire) et continue est clair. Pour la coercivité de a_ε, on observe simplement que le terme en $1/\varepsilon$ a le bon signe
$$a_\varepsilon(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = \sum_{i=1}^d \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\text{div } \boldsymbol{u}\|_{L^2}^2 \geq \sum_{i=1}^d \|\nabla u_i\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Ainsi la coercivité de a_ε s'en déduit en appliquant l'inégalité de Poincaré à chaque composante u_i du champ de vecteurs $\boldsymbol{u}$.
Le théorème de Lax-Milgram s'applique donc et on obtient l'existence et unicité d'une solution $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ au problème

$$\sum_{i=1}^{d}\int_\Omega \nabla u_{\varepsilon,i}\cdot\nabla v_i\,dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega(\text{div }\boldsymbol{u}_\varepsilon)(\text{div }\boldsymbol{v})\,dx=\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dx,\ \ \forall\boldsymbol{v}\in H. \tag{FV}$$

On choisit maintenant un $j\in\{1,...,d\}$ et on pose $\boldsymbol{v}=(0,...,0,\varphi,0,...,0)$ avec $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ en position numéro j. La formulation variationnelle (FV) donne

$$\int_\Omega \nabla u_{\varepsilon,j}\cdot\nabla\varphi\,dx+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega(\text{div }\boldsymbol{u}_\varepsilon)\partial_{x_j}\varphi\,dx=\int_\Omega f_j\varphi\,dx.$$

Cela montre que, au sens des distributions, nous avons

$$-\Delta u_{\varepsilon,j}-\frac{1}{\varepsilon}\partial_{x_j}(\text{div }\boldsymbol{u}_\varepsilon)=f_j.$$

En écriture vectorielle, ceci donne bien

$$-\Delta\boldsymbol{u}_\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\nabla(\text{div }\boldsymbol{u}_\varepsilon)=\boldsymbol{f}_\varepsilon.$$

Prenons maintenant $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}_\varepsilon$ dans la formulation variationnelle (FV), on trouve

$$\|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2+\frac{1}{\varepsilon}\|\text{div }\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2=\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}_\varepsilon\,dx.$$

On majore le terme de droite en utilisant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, celle de Poincaré, puis celle de Young

$$\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}_\varepsilon\,dx\le\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}\|\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}\le C_P\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}\|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}\le\frac{1}{2}\|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2+\frac{C_P^2}{2}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^2.$$

On trouve ainsi

$$\frac{1}{2}\|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2+\frac{1}{\varepsilon}\|\text{div }\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}^2\le\frac{C_P^2}{2}\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}^2,$$

ce qui est le résultat attendu.

2. Nous allons simplifier les écritures en notant

$$\nabla\boldsymbol{u}:\nabla\boldsymbol{v}\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^{d}\nabla u_i\cdot\nabla v_i,\ \ \forall\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in H.$$

Ainsi, avec la notation introduite dans l'énoncé, la formulation variationnelle (FV) s'écrit

$$\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon:\nabla\boldsymbol{v}\,dx-\int_\Omega p_\varepsilon(\text{div }\boldsymbol{v})\,dx=\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,dx,\ \ \forall\boldsymbol{v}\in H. \tag{FV$_2$}$$

L'idée est de récupérer une estimation L^2 de p_ε grâce au second terme du membre de gauche.
On remarque d'abord que p_ε est bien à moyenne nulle car, d'après la formule de Stokes, nous avons

$$\int_\Omega p_\varepsilon\,dx=-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega \text{div }\boldsymbol{u}_\varepsilon\,dx=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega}\boldsymbol{u}_\varepsilon\cdot n\,d\sigma=0,$$

car $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ est nulle au bord. On peut donc utiliser ($\star$) pour poser $\boldsymbol{v}=\Pi p_\varepsilon$ dans (FV$_2$). On trouve

$$\int_\Omega p_\varepsilon(\text{div }\Pi p_\varepsilon)\,dx=\int_\Omega \nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon:\nabla(\Pi p_\varepsilon)\,dx-\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot(\Pi p_\varepsilon)\,dx.$$

Par définition de Π, nous avons div $\Pi p_\varepsilon=p_\varepsilon$. L'égalité précédente fournit donc

$$\int_\Omega |p_\varepsilon|^2\,dx\le\|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}\|\nabla(\Pi p_\varepsilon)\|_{L^2}+\|\boldsymbol{f}\|_{L^2}\|\Pi p_\varepsilon\|_{L^2}\le(\|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}+C_P\|\boldsymbol{f}\|_{L^2})\|\Pi p_\varepsilon\|_H.$$

On a utilisé à nouveau ci-dessus l'inégalité de Poincaré. Par hypothèse, l'opérateur Π vérifie $\|\Pi p_\varepsilon\|_{H^1}\le C\|p_\varepsilon\|_{L^2}$ avec C indépendant de ε. Ainsi l'inégalité ci-dessus donne

$$\|p_\varepsilon\|_{L^2}^2\le C(\|\nabla\boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2}+C_P\|\boldsymbol{f}\|_{L^2})\|p_\varepsilon\|_{L^2}.$$

En simplifiant par $\|p_\varepsilon\|_{L^2}$ et en utilisant l'estimation de la question précédente, on trouve bien une borne uniforme pour $(p_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $L^2(\Omega)$.

3. La fonction p étant donnée, on peut définir les formes bilinéaires et linéaires suivantes

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} : \nabla \boldsymbol{v} \, dx,$$

$$\tilde{L}(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, dx + \int_\Omega p(\mathrm{div}\, \boldsymbol{v}) \, dx.$$

On vérifie aisément que a est continue et coercive. De même $\tilde{L}$ est clairement continue (le nouveau terme s'estime par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sans difficulté).

Le théorème de Lax-Milgram s'applique et montre l'existence d'un unique champ de vecteurs nul au bord et vérifiant, au sens des distributions, l'équation

$$-\Delta \boldsymbol{u} = \boldsymbol{f} - \nabla p.$$

4. On soustrait les deux formulations variationnelles satisfaites par $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ et $\boldsymbol{u}$

$$\int_\Omega \nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u}) : \nabla v \, dx = \int_\Omega (p_\varepsilon - p) \mathrm{div}\, \boldsymbol{v} \, dx, \qquad (\star\star)$$

puis on prend $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u}$ dans cette égalité

$$\int_\Omega |\nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u})|^2 \, dx = \int_\Omega (p_\varepsilon - p) \mathrm{div}\, (\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u}) \, dx,$$

et comme, par définition, on a $\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon = -\varepsilon p_\varepsilon$, on trouve

$$\int_\Omega |\nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u})|^2 \, dx = -\varepsilon \int_\Omega (p_\varepsilon - p) p_\varepsilon \, dx - \int_\Omega (p_\varepsilon - p) \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \, dx. \qquad (\star\star\star)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne le résultat attendu.

Comme on a montré dans la question 2 que $(p_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans L^2, le premier terme du membre de droite de l'inégalité précédente est majoré par $C\varepsilon$ et donc tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$. Il reste à étudier le second terme.

Comme $\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$ et que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il existe une suite $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\|\varphi_n - \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega (p_\varepsilon - p) \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \, dx \right| &\leq \left| \int_\Omega (p_\varepsilon - p)(\varphi_n - \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}) \, dx \right| + \left| \int_\Omega (p_\varepsilon - p) \varphi_n \, dx \right| \\
&\leq C \|\varphi_n - \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\|_{L^2} + \left| \int_\Omega (p_\varepsilon - p) \varphi_n \, dx \right| \\
&= C \|\varphi_n - \mathrm{div}\, \boldsymbol{u}\|_{L^2} + |\langle p_\varepsilon - p, \varphi_n \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}}|
\end{aligned}$$

Pour n fixé, on prend la limite supérieure de cette inégalité quand $\varepsilon \to 0$, en utilisant le fait que $p_\varepsilon \to p$ au sens des ditributions, pour obtenir

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left| \int_\Omega (p_\varepsilon - p) \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \, dx \right| \leq C \|\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} - \varphi_n\|_{L^2}.$$

Le membre de gauche de cette inégalité ne dépend pas de n et le membre de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$. On en déduit que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \left| \int_\Omega (p_\varepsilon - p) \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \, dx \right| \leq 0,$$

et donc que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left| \int_\Omega (p_\varepsilon - p) \mathrm{div}\, \boldsymbol{u} \, dx \right| = 0.$$

En revenant à $(\star\star\star)$, on déduit que $\|\nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u})\|_{L^2} \to 0$ et donc que $\|\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u}\|_{H^1} \to 0$ par l'inégalité de Poincaré.

Comme on a

$$\|\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon\|_{L^2} = \varepsilon \|p_\varepsilon\|_{L^2} \leq C\varepsilon,$$

nous savons que $\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon$ tend vers 0 dans L^2. Mais par ailleurs, $\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}_\varepsilon$ tend vers $\mathrm{div}\, \boldsymbol{u}$ au sens des distributions. Il s'en suit que $\mathrm{div}\, \boldsymbol{u} = 0$.

5. Essayons de trouver une estimation de $p - p_\varepsilon$. Pour cela, on va prendre $\boldsymbol{v} = \Pi(p_\varepsilon - p)$ dans ($\star\star$) et ainsi obtenir

$$\int_\Omega |p_\varepsilon - p|^2\,dx = \int_\Omega \nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u}) : \nabla\Pi(p_\varepsilon - p)\,dx \leq \|\nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u})\|_{L^2}\|\nabla\Pi(p_\varepsilon - p)\|_{L^2}.$$

Grâce aux propriétés de Π, on trouve

$$\|p_\varepsilon - p\|_{L^2}^2 \leq C\|\nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u})\|_{L^2}\|p_\varepsilon - p\|_{L^2},$$

et donc

$$\|p_\varepsilon - p\|_{L^2} \leq C\|\nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u})\|_{L^2}.$$

On a montré à la question précédente que div $\boldsymbol{u} = 0$, et donc l'inégalité établie à la question 4 devient (et en utilisant que $(p_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans L^2)

$$\|\nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u})\|_{L^2}^2 \leq C\varepsilon\|p - p_\varepsilon\|_{L^2}.$$

En combinant les deux dernières inégalités, on trouve bien que

$$\|\nabla(\boldsymbol{u}_\varepsilon - \boldsymbol{u})\|_{L^2} \leq C\varepsilon,$$

$$\|p_\varepsilon - p\|_{L^2} \leq C\varepsilon,$$

pour une autre valeur de la constante C.

On a donc montré ici l'existence et l'unicité d'une solution $(\boldsymbol{u}, p)$ au problème suivant, appelé problème de Stokes, et qui intervient de façon fondamentale en mécanique des fluides incompressibles

$$\begin{cases} -\Delta\boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, \text{ dans } \Omega, \\ \text{div } \boldsymbol{u} = 0, \text{ dans } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0, \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

■