Master MAPI^3 $1^{ère}$ année Université Paul Sabatier - Toulouse 3 Année 2015-2016

Analyse numérique des EDP
TD 2

Avec corrigés

Les numéros de Théorèmes, Propositions, etc ... font référence aux notes de cours.

Exercice 1

On se place en dimension $d = 1$.

1. *Soit $-1 < \alpha < 0$. Montrer que la dérivée au sens de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la fonction $x \mapsto |x|^\alpha$ est donnée par*

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\varphi(x) - \varphi(-x))\, dx.$$

   Cette distribution est-elle une fonction de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$? Commentez la condition sur α.

2. *Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction $x \mapsto \log |x|$.*

Corrigé :

1. Remarquons d'abord que la condition sur α implique que la fonction $f_\alpha : x \mapsto |x|^\alpha$ est localement intégrable (au voisinage de 0 on a affaire à une intégrale de Riemann convergente.

   Par ailleurs, en dehors de 0 cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée (usuelle) est donnée par

$$f'_\alpha(x) = \alpha|x|^{\alpha-2}x.$$

   On se donne maintenant une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et un $\varepsilon > 0$. On calcule l'intégrale suivante (qui évite la singularité en 0) grâce à deux intégrations par parties

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\varepsilon} f_\alpha(x)\varphi'(x)\, dx &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f_\alpha(x)\varphi'(x)\, dx + \int_{\varepsilon}^{+\infty} f_\alpha(x)\varphi'(x)\, dx \\ &= f_\alpha(-\varepsilon)\varphi(-\varepsilon) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} f'_\alpha(x)\varphi(x)\, dx - f_\alpha(\varepsilon)\varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} f'_\alpha(x)\varphi(x)\, dx.\end{aligned}$$

   Comme $\alpha < 0$, on se convainc aisément que chacun des termes séparément ne converge pas nécessairement quand $\varepsilon \to 0$. En particulier la fonction f'_α n'est pas intégrable au voisinage de 0.

   L'idée est donc de regrouper les termes pour profiter de la symétrie du problème et donc de phénomènes de compensation. On écrit donc (à l'aide d'un changement de variable dans le deuxième terme)

$$\int_{|x|>\varepsilon} f_\alpha(x)\varphi'(x)\, dx = \varepsilon^\alpha(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) - \int_{\varepsilon}^{+\infty} f'_\alpha(x)(\varphi(x) - \varphi(-x))\, dx.$$

   On utilise alors l'inégalité des accroissements finis pour φ

$$|\varepsilon^\alpha(\varphi(\varepsilon) - \varphi(-\varepsilon))| \leq 2\varepsilon^\alpha\varepsilon\|\varphi'\|_\infty \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

   De même on a

$$|f'_\alpha(x)(\varphi(x) - \varphi(-x))| = \alpha|x|^{\alpha-1}|\varphi(x) - \varphi(-x)| \leq 2\|\varphi'\|_\infty|x|^\alpha,\ \ \forall x \neq 0,$$

   et donc la fonction $x \mapsto f'_\alpha(x)(\varphi(x) - \varphi(-x))$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

   On peut donc, par convergence dominée, justifier le passage à la limite quan d$\varepsilon \to 0$ des deux côtés de l'égalité et finalement obtenir

$$\int_{\mathbb{R}} f_\alpha(x)\varphi'(x)\, dx = -\alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}(\varphi(x) - \varphi(-x))\, dx,$$

   ce qui est bien le résultat attendu.

2. On fait le même type de calcul avec $f(x) = \log|x|$ dont la dérivée usuelle (en dehors de 0) est donnée par $f'(x) = \frac{1}{|x|}$. On obtient que la dérivée au sens des distributions de f est donnée par

$$\langle \partial_x f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx,$$

cette distribution étant appelée *valeur principale de* $1/x$ et notée $\mathrm{VP}(1/x)$, voir l'exercice suivant.

■

Exercice 2 (Produit d'une fonction et d'une distribution)

1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vérifier que l'application*

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle T, f\varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}},$$

est bien définie et constitue une distribution sur Ω. On la note fT.

2. *Démontrer que $\partial_{x_i}(fT) = (\partial_{x_i} f)T + f(\partial_{x_i} T)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*
3. *On travaille sur $\Omega = \mathbb{R}$. Pourquoi la fonction $x \mapsto 1/x$ ne définit-elle pas une distribution sur $\mathbb{R}$? On définit alors la distribution $\mathrm{VP}(1/x)$ appelée* **valeur principale de** *$1/x$ par la formule*

$$\langle \mathrm{VP}(1/x), \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}),\mathcal{D}(\mathbb{R})} = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx.$$

Calculer le produit $x\mathrm{VP}(1/x)$ et commenter le résultat.

Corrigé :

1. On remarque que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction produit $f\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et également à support compact (car $\mathrm{Supp}\,(f\varphi) \subset \mathrm{Supp}\,(\varphi)$). Ainsi on peut, à bon droit, évaluer $\langle T, f\varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}$ et obtenir ainsi une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$.

   Il reste à montrer la continuité de cette forme linéaire. On prend une suite $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ au sens de la définition introduite en cours. Cela signifie qu'il existe un compact $K \subset \Omega$ qui contient tous les supports des φ_n et de φ et que $\partial^\alpha \varphi_n$ converge uniformément vers $\partial^\alpha \varphi$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$. Nous allons montrer que cela implique que $(f\varphi_n)_n$ converge vers $f\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$. Ceci concluera la preuve puisque T est elle-même continue.

   On utilise la formule de Leibniz à plusieurs variables

$$\partial^\alpha(f\varphi_n) = \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ \beta \leq \alpha}} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f \partial^{\alpha-\beta} \varphi_n,$$

   où $\beta \leq \alpha$ signifie que $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout i et on a posé

$$\binom{\alpha}{\beta} = \prod_{i=1}^d \binom{\alpha_i}{\beta_i}.$$

   Cette formule montre qu'il suffit de montrer que, pour tous multi-indices β et γ, on a la convergernce uniforme de $\partial^\beta f \partial^\gamma \varphi_n$ vers $\partial^\beta f \partial^\gamma \varphi$. On observe que tout se passe sur le compact K (en dehors de celui-ci les fonctions en jeu sont identiquement nulles) et qu'on peut donc écrire

$$\|\partial^\beta f \partial^\gamma \varphi_n - \partial^\beta f \partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\partial^\beta f \partial^\gamma \varphi_n - \partial^\beta f \partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty(K)} \leq \|\partial^\beta f\|_{L^\infty(K)}\, \partial^\gamma \varphi_n - \partial^\gamma \varphi\|_{L^\infty(K)},$$

   et ceci tend bien vers 0 quand $n \to \infty$. On a utilisé ici que $\partial^\beta f$ est continue donc bornée sur le compact K.

   En conclusion, la forme linéaire notée fT est bien une distribution sur Ω.

2. On prend une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

   En utilisant successivement la définition de la dérivée d'une distribution puis celle du produit d'une fonction par une distribution, on trouve

$$\langle \partial_{x_i}(fT), \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle fT, \partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle T, f\partial_{x_i} \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

De la même façon, on calcule l'autre terme

$$\begin{aligned}\langle (\partial_{x_i} f)T + f(\partial_{x_i} T), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= \langle (\partial_{x_i} f)T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle f(\partial_{x_i} T), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= \langle T, (\partial_{x_i} f)\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} + \langle \partial_{x_i} T, f\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= \langle T, (\partial_{x_i} f)\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \langle T, \partial_{x_i}(f\varphi)\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= \langle T, (\partial_{x_i} f)\varphi - \partial_{x_i}(f\varphi)\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= -\langle T, f\partial_{x_i}\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.\end{aligned}$$

Les deux quantités que nous avons calculé sont donc égales pour toute fonction test, cela prouve l'égalité des deux distributions proposées.

3. La fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas localement intégrable donc on ne peut pas définir la quantité $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Attention en revanche : $x \mapsto 1/x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ donc elle définit bien une distribution sur $\mathbb{R}^*$.
   On va faire le calcul demandé en testant la distribution produit $x\mathrm{VP}(1/x)$ contre une fonction-test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ quelconque. On note $f(x) = x$ et on écrit

$$\langle f\mathrm{VP}(1/x), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \mathrm{VP}(1/x), f\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_0^{+\infty} \frac{x\varphi(x) - (-x)\varphi(-x)}{x}\,dx = \int_0^{\infty} (\varphi(x) + \varphi(-x))\,dx,$$

   ce qui donne avec un changement de variable immédiat

$$\langle f\mathrm{VP}(1/x), \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

   Ainsi le produit $x\mathrm{VP}(1/x)$ est égal à la distribution constante égale à 1. Ceci donne une cohérence à la notation $\mathrm{VP}(1/x)$.

■

Exercice 3 (Le retour des sommes de Riemann)

On se place en dimension $d = 1$ et avec $\Omega =]0,1[$ pour simplifier. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \geq 1$, on définit $h = 1/(n+1)$ et les points $x_i^n = ih$ pour $1 \leq i \leq n$ puis la distribution

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} hf(x_i^n)\delta_{x_i^n}.$$

Montrer que

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f, \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Corrigé :

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On effectue le calcul suivant

$$\langle T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{n} hf(x_i^n)\varphi(x_i^n) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} f\varphi\,dx + \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} \big[f(x_i^n)\varphi(x_i^n) - f(x)\varphi(x)\big]\,dx,$$

ce qui donne

$$\left|\langle T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \int_\Omega f\varphi\,dx\right| \leq \int_{x_i^n}^{x_{i+1}^n} \big|f(x_i^n)\varphi(x_i^n) - f(x)\varphi(x)\big|\,dx.$$

Comme $f\varphi$ est continue sur le compact $\overline{\Omega}$ (ici on utilise le fait que φ est à support compact ! !) le théorème de Heine nous dit qu'elle est uniformément continue. Si on définit le module de continuité de $f\varphi$, par

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ |x-y|\leq\delta}} |(f\varphi)(y) - (f\varphi)(x)|, \ \ \forall \delta > 0,$$

cette propriété signifie simplement que

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0.$$

Revenant au calcul ci-dessus on trouve bien le résultat attendu

$$\left|\langle T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \int_\Omega f\varphi\,dx\right| \leq \omega(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

■

Exercice 4

On se place en dimension $d = 1$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$ et pour toute fonction f on définit la translatée de pas h de f

$$(\tau_h f)(x) = f(x+h), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ on définit la translatée de pas h de T par la formule

$$\tau_h T : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \mapsto \langle T, \tau_{-h}\varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

1. *Montrer que pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ on a $\tau_h(T_f) = T_{\tau_h f}$.*
2. *Montrer que, pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on a $\frac{1}{h}(\tau_h T - T) \xrightarrow[h\to 0]{} \partial_x T$, dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Corrigé :

On vérifie aisément que la définition de $\tau_h T$ donne bien une distribution.

1. Pour $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on écrit

$$\langle \tau_h(T_f), \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle T_f, \tau_{-h}\varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}} f \tau_{-h}\varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x-h)\, dx.$$

On effectue maintenant le changement de variable $y = x - h$ dans cette intégrale pour obtenir

$$\langle \tau_h(T_f), \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_{\mathbb{R}} f(y+h)\varphi(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}} \tau_h f \varphi \, dy = \langle T_{\tau_h f}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

Cela prouve bien le résultat demandé et le fait que la définition choisie pour $\tau_h T$ est bien cohérente avec celle sur les fonctions.

2. Cette formule rappelle bien entendu celle bien connue qui dit que si f est une fonction dérivable en un point x alors on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\tau_h f(x) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Ici la valeur d'une distribution en un point n'a pas de sens et il s'agit donc de démontrer que, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle \frac{1}{h}(\tau_h T - T), \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \xrightarrow[h\to 0]{} \langle \partial_x T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

En utilisant les définitions du cours et du début de l'exercice, cela revient à montrer

$$\left\langle T, \frac{1}{h}(\tau_{-h}\varphi - \varphi) \right\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \xrightarrow[h\to 0]{} \langle T, -\partial_x \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

La distribution T étant fixée (et donc continue par rapport à la fonction test), on est ramenés à démontrer que

$$\frac{1}{h}(\tau_{-h}\varphi - \varphi) \xrightarrow[h\to 0]{} -\partial_x \varphi, \quad \text{dans } \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

— Pour commencer, on choisit $R > 0$ tel que $[-R, R]$ contienne le support de φ. On voit alors que pour tout $h \in \mathbb{R}$, avec $|h| \leq 1$ (ce qui n'est pas gênant car il est destiné à tendre vers 0), nous avons

$$\text{Supp}\,(\tau_{-h}\varphi - \varphi) \subset [-R-1, R+1].$$

Les fonctions en jeu sont donc bien toutes supportées dans un seul et unique compact.

— Soit maintenant $\alpha \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Nous écrivons

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{h}\partial^\alpha(\tau_{-h}\varphi - \varphi) - \Big(- \partial^{\alpha+1}\varphi(x) \Big) \right| &= \left| \frac{1}{h}\big(\partial^\alpha \varphi(x-h) - \partial^\alpha \varphi(x)\big) + \partial^{\alpha+1}\varphi(x) \right| \\ &\leq \frac{h}{2} \|\partial^{\alpha+2}\varphi\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant due à la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction $\partial^\alpha \varphi$. Le majorant obtenu ci-dessus tend vers 0 avec h de façon uniforme par rapport à x. Le résultat est donc bien établi.

■

Exercice 5 (Autour des masses de dirac)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $x_1, ..., x_n$ des points distincts de Ω.

1. *Montrer qu'il existe des fonctions $\theta_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que*

$$\theta_i(x_j) = \begin{cases} 1 & si\ i = j \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

2. *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution qui vérifie*

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0, \ \ \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ qui s'annule aux points } x_1, ..., x_n.$$

Montrer qu'il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$T = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{x_i}.$$

Corrigé :

1. On fixe un $r > 0$ tel que

$$r < \|x_i - x_j\|, \ \ \forall i \neq j,$$

et

$$B(x_i, r) \subset \Omega.$$

Un tel r existe car les x_i sont distincts et car Ω est ouvert.

Pour tout i, on utilise le Lemme II.4, pour obtenir une fonction $\theta_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$\theta_i = \begin{cases} 1, & \text{dans } B(x_i, r/2), \\ 0, & \text{en dehors de } B(x_i, r). \end{cases}$$

Par choix de r, ces fonctions θ_i vérifient la propriété demandée.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ quelconque. On pose

$$\psi = \varphi - \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)\theta_i.$$

Par construction, nous avons $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\psi(x_i) = 0$ pour tout $i = 1, ..., n$. Par hypothèse on a donc $\langle T, \psi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = 0$ ce qui fournit

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^{n} \langle T, \theta_i \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \varphi(x_i).$$

On obtient bien la forme demandée pour

$$\alpha_i = \langle T, \theta_i \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

■

Exercice 6 (Solution fondamentale du Laplacien)

On travaille ici en dimension $d = 2$. On pose

$$E(x) = -\frac{1}{2\pi}\log|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}.$$

1. *Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $\varepsilon > 0$ démontrer que*

$$\int_{|x|>\varepsilon} E.(\Delta\varphi) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi\, d\sigma + \frac{\log\varepsilon}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\nabla\varphi(x)\cdot x\, d\sigma.$$

2. *Montrer que*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\varphi\, d\sigma = \varphi(0),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\log\varepsilon}{2\pi\varepsilon}\int_{|x|=\varepsilon}\nabla\varphi(x)\cdot x\, d\sigma = 0.$$

En déduire que

$$-\Delta E = \delta_0, \quad \textit{au sens de } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

La fonction E est appelée solution fondamentale du Laplacien sur $\mathbb{R}^2$.

3. *Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^2)$. On pose*

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} E(x-y)f(y)\, dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

Démontrer que u est bien définie et vérifie

$$-\Delta u = f, \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Ainsi la fonction E permet de résoudre le problème de Laplace par une formule intégrale explicite.

Corrigé :

1. Il faut commencer par vérifier que, en dehors de l'origine nous avons

$$\Delta E = 0.$$

On va utiliser dans cet exercice la formule de Stokes (Théorème I.1) appliquée au *complémentaire* d'une boule $B(0,\varepsilon)$, noté $\Omega = (B(0,\varepsilon))^c$. On obtient

$$\int_\Omega E(\Delta\varphi)\, dx - \int_\Omega (\Delta E)\varphi\, dx = \int_{\partial\Omega} E(\nabla\varphi)\cdot n\, d\sigma - \int_{\partial\Omega}\varphi(\nabla E)\cdot n\, d\sigma.$$

Il ne faut pas oublier que $\partial\Omega$ est le cercle $C(0,\varepsilon)$ mais que la normale n est orienté vers l'extérieur de Ω, c'est-à-dire vers l'intérieur de la boule (autrement dit $n = -x/\|x\|$. On utilise que $\Delta E = 0$, que E ne dépend que de $\|x\|$ et qu'on a

$$\nabla E(x) = -\frac{1}{2\pi}\frac{x}{\|x\|^2},$$

donc

$$\nabla E\cdot n = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\|x\|}.$$

On obtient

$$\int_\Omega E(\Delta\varphi)\, dx = \frac{\log\varepsilon}{2\pi\varepsilon}\int_{C(0,\varepsilon)}(\nabla\varphi(x))\cdot x\, d\sigma - \frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{\partial\Omega}\varphi\, d\sigma.$$

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a $|\varphi(x)-\varphi(0)| \leq \|\nabla\varphi\|_\infty\|x\|$ pour tout x. Comme le périmètre du cercle $C(0,\varepsilon)$ est $2\pi\varepsilon$, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{C(0,\varepsilon)}\varphi\, d\sigma - \varphi(0)\right| &= \left|\frac{1}{2\pi\varepsilon}\int_{C(0,\varepsilon)}(\varphi-\varphi(0))\, d\sigma\right| \\ &\leq \frac{\|\nabla\varphi\|_\infty}{2\pi\varepsilon}\int_{C(0,\varepsilon)}\|x\|\, d\sigma \\ &\leq \|\nabla\varphi\|_\infty\varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui montre bien que la quantité étudiée tend vers 0.

Si on applique ce qui précède à la fonction $\psi : x \mapsto \nabla\varphi(x) \cdot x$ qui est également $\mathcal{C}^\infty$ à support compact mais qui est nulle en zéro nous avons

$$|\log\varepsilon| \left| \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{C(0,\varepsilon)} \psi \, d\sigma \right| = |\log\varepsilon| \left| \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{C(0,\varepsilon)} \psi \, d\sigma - \psi(0) \right| \leq \|\nabla\psi\|_\infty |\log\varepsilon|\varepsilon,$$

et cette quantité tend bien vers 0 avec ε.

Grâce aux limites établies ci-dessus, et au fait que $E(\Delta\varphi)$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^2$, on peut passer à la limite dans l'égalité de la question 1 et donc obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^2} E(\Delta\varphi) \, dx = -\varphi(0).$$

En utilisant le langage des distributions, cette égalité s'écrit

$$\langle \Delta E, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle E, \Delta\varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle \delta_0, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

On a donc bien prouvé que $-\Delta E = \delta_0$ au sens des distributions.

3. Le fait que u soit bien défini vient du fait que E est localement intégrable et que f est bornée à support compact. Prenons une fonction test φ et calculons

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= \langle u, -\Delta\varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} u(x)(\Delta\varphi)(x) \, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} E(x-y) f(y) (\Delta\varphi)(x) \, dy \right) dx. \end{aligned}$$

On applique maintenant le théorème de Fubini (les hypothèses sont vérifiées car φ et f sont à support compact) puis un changement de variable pour obtenir

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} E(x-y)(\Delta\varphi)(x) \, dx \right) f(y) \, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} E(z)(\Delta\varphi)(z+y) \, dz \right) f(y) \, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathbb{R}^2} E(z)(\Delta\varphi_y)(z) \, dz \right) f(y) \, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \langle E, \Delta\varphi_y \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} f(y) \, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^2} \langle \Delta E, \varphi_y \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} f(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \langle \delta_0, \varphi_y \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} f(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(y) f(y) \, dy \\ &= \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}, \end{aligned}$$

où on a posé $\varphi_y : z \mapsto \varphi(y+z)$ qui est également une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Le résultat est bien démontré.

■