Master MAPI^3 $1^{ère}$ année Université Paul Sabatier - Toulouse 3 Année 2015-2016

Analyse numérique des EDP
TD 1

Avec certains corrigés

Les numéros de Théorèmes, Propositions, etc ... font référence aux notes de cours.

Exercice 1 (Défaut de coercivité dans $\mathcal{C}^1$)

On considère $X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0\}$ muni de sa norme usuelle et l'énergie E définie par

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 f v\,dx,$$

où f est une fonction continue qui est identiquement nulle sur un intervalle non trivial $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$.
Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_n$ d'éléments de X de la forme

$$v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(n(x-x_0)),$$

avec φ et x_0 bien choisis, telle que $(E(v_n))_n$ est bornée mais $\|v_n\|_X \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Corrigé :

On prend $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$, φ une fonction $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ à support dans $]-1,1[$ non identiquement nulle. Ainsi la fonction v_n est bien nulle en 0 et 1 pour tout n assez grand.

— On a immédiatement, pour n assez grand, $\|v_n\|_{L^\infty} = \frac{\|\varphi\|_{L^\infty}}{\sqrt{n}}$ et $\|v_n'\|_{L^\infty} = \sqrt{n}\|\varphi'\|_\infty$. On a donc bien $\|v_n\|_X \to \infty$ quand $n \to \infty$.

— Calculons l'énergie de v_n

$$E(v_n) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v_n'(x)|^2\,dx - \int_0^1 f(x)v_n(x)\,dx.$$

Par hypothèse sur f, et par construction de v_n, les supports de f et de v_n sont disjoints et donc le second terme est nul. Il nous reste donc à évaluer la première intégrale. On utilise la définition de v_n et un changement de variable $y = n(x-x_0)$

$$E(v_n) = \frac{k}{2}\int_{\mathbb{R}} n|\varphi'(n(x-x_0))|^2\,dx = \frac{k}{2}\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(y)|^2\,dy.$$

Ainsi la suite $(E(v_n))_n$ est bien bornée (elle est même constante sur cet exemple ! !).

■

Exercice 2 (Défaut de complétude dans $\mathcal{C}^1$)

On considère toujours l'espace $X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ v(0) = v(1) = 0\}$ mais muni, vette fois, de la norme $\|v\|_{H^1} = \sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2}$.
Vérifier que la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n(x) = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}},$$

est une suite de Cauchy non convergente dans $(X, \|\cdot\|_{H^1})$.

Corrigé :

— Commençons par montrer que la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente dans $(X, \|\cdot\|_{H^1})$. Pour cela, on suppose qu'elle converge vers un certain $u \in X$. D'après le lemme I.8, ceci implique que, u_n converge uniformément vers u sur $[0,1]$. En particulier, on aurait la convergence simple de u_n vers u sur $[0,1]$.
On voit alors immédiatement que cela implique $u(x) = \left|x-\frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$. Or, cette fonction u n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ à cause de la singularité en $x = \frac{1}{2}$. Ceci établit donc une contradiction.

— Montrons maintenant que $(u_n)_n$ est de Cauchy dans H^1. Pour cela on commence par utiliser le lemme I.8 pour établir que, u_n et u_{n+p} étant dans X, on a

$$\|u_n - u_{n+p}\|_{H^1}^2 = \|u_n - u_{n+p}\|_{L^2}^2 + \|u_n' - u_{n+p}'\|_{L^2}^2 \leq 2\|u_n' - u_{n+p}'\|_{L^2}^2.$$

Ainsi, pour montrer le critère de Cauchy dans H^1 pour $(u_n)_n$ il suffit de vérifier que (u_n') est de Cauchy dans L^2. Calculons donc $u_n' - u_{n+p}'$

$$\begin{aligned}
u_n'(x) - u_{n+p}'(x) &= \frac{x-1/2}{\sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n}}} - \frac{x-1/2}{\sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n+p}}} \\
&= (x-1/2)\frac{\sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n+p}} - \sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n}}}{\sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n}}\sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n+p}}} \\
&= \frac{(x-1/2)\left(\frac{1}{n+p}-\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n}}\sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n+p}}\left(\sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n}}+\sqrt{(x-1/2)^2+\frac{1}{n+p}}\right)}.
\end{aligned}$$

On prend la valeur absolue de cette expression et on essaie de majorer intelligemment les différents termes. Comme on sait qu'il n'y a pas convergence uniforme de cette suite de fonctions (car sinon la limite u' serait continue ...), la majoration qu'on doit obtenir doit encore dépendre de x !

De façon plus précise, on utilise les inégalités

$$\sqrt{(x-1/2)^2+1/(n+p)} \geq |x-1/2|$$

et

$$\sqrt{(x-1/2)^2+1/(n+p)} + \sqrt{(x-1/2)^2+1/n} \geq \sqrt{(x-1/2)^2+1/n}.$$

Il vient ainsi

$$\begin{aligned}
|u_n'(x) - u_{n+p}'(x)| &\leq \frac{\frac{1}{n}}{(x-1/2)^2+\frac{1}{n}} \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{(x-1/2)^2+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{7}{8}}\left(\frac{1}{(x-1/2)^2+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{8}} \\
&\leq \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{7}{8}}\frac{1}{|x-1/2|^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{n^{1/8}}\frac{1}{|x-1/2|^{\frac{1}{4}}}.
\end{aligned}$$

Si maintenant on élève l'inégalité au carré et qu'on l'intègre entre 0 et 1, il vient

$$\int_0^1 |u_n' - u_{n+p}'|^2\,dx \leq \frac{1}{n^{1/4}}\int_0^1 \frac{1}{|x-1/2|^{\frac{1}{2}}}\,dx.$$

Comme l'intégrale qui apparaît dans le membre de droite est convergente (c'est une intégrale de Riemann), on a bien montré

$$\|u_n' - u_{n+p}'\|_{L^2} \leq \frac{C}{n^{\frac{1}{8}}},$$

ce qui prouve bien que la suite $(u_n')_n$ est de Cauchy dans L^2, et donc que $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $(X, \|\cdot\|_{H^1})$ d'après la remarque initiale.

■

Exercice 3 (Fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux)

Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in I$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $g \in L^2(I)$ telle que

$$\varphi(\alpha) = \int_I \varphi g\,dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

En déduire que si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors

$$f \in H^1(I) \iff f \textit{ est continue}.$$

Que vaut la dérivée faible de f dans le cas où elle appartient à $H^1(I)$?

Corrigé :

Il s'agit d'un raisonnement par l'absurde. On suppose qu'il existe une fonction g qui vérifie l'égalité de l'énoncé

$$\varphi(\alpha) = \int_I \varphi g\, dx, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

On va construire une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que $\varphi_n(\alpha) = 1$ pour tout n et telle que les intégrales $\int_I \varphi_n g\, dx$ tendent vers 0.

Il s'agit de les choisir de plus en plus concentrée autour de α. Plus précisément, on fixe un $r > 0$ tel que $[\alpha - r, \alpha + r] \subset I$ et on va fixer une fonction $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ vérifant $\psi(\alpha) = 1$ et $\operatorname{Supp} \psi \subset [\alpha - r, \alpha + r]$ (une telle fonction existe, voir le lemme II.12 du cours).

On définit alors

$$\varphi_n(x) = \psi(n(x-\alpha)),\ \forall x \in I.$$

On vérifie alors que

$$\varphi_n(\alpha) = 1, \ \ \forall n \geq 1$$

$$\operatorname{Supp} \varphi_n \subset [\alpha - r/n, \alpha + r/n] \subset I,$$

et donc ce sont bien des fonctions à support compact dans I. De plus, comme les supports se concentrent autour de α, nous avons

$$\varphi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \ \ \forall x \neq \alpha.$$

Comme par ailleurs, nous pouvons écrire

$$|\varphi_n(x) g(x)| \leq \|\psi\|_\infty |g(x)|,$$

et que $g \in L^1(I)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que

$$\int_I \varphi_n g\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui constitue bien une contradiction.

Pour la seconde partie du résultat, on se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour simplifier (mais cela ne change rien en pratique) nous supposons que la fonction f a un seul point de discontinuité. Ainsi si $I =]a, b[$, on suppose qu'il existe $\alpha \in I$ et f_g, f_d de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier tels que

$$f = f_g, \text{ sur } [a, \alpha[, \ \ f = f_d, \text{ sur }]\alpha, b].$$

Ceci implique (voir la figure 1) en particulier que f admet des limites à gauche et à droite en α notées $f(\alpha^-)$ et $f(\alpha^+)$ et qui vérifient

$$f(\alpha^+) = \lim_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} f(x) = f_d(\alpha), \ \ f(\alpha^-) = \lim_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} f(x) = f_g(\alpha).$$

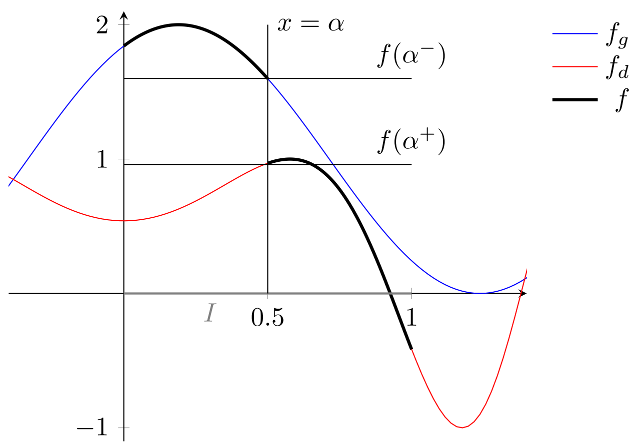

FIGURE 1 – Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux

On se donne maintenant une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ et on calcule à l'aide de la relation de Chasles et d'une intégration par parties sur chacun des deux intervalles :

$$\begin{aligned}\int_I f\varphi'\,dx &= \int_a^\alpha f\varphi'\,dx + \int_\alpha^b f\varphi'\,dx\\ &= \int_a^\alpha f_g\varphi'\,dx + \int_\alpha^b f_d\varphi'\,dx\\ &= [f_g\varphi]_a^\alpha - \int_a^\alpha f_g'\varphi\,dx[f_d\varphi]_\alpha^b - \int_\alpha^b f_d'\varphi\,dx\\ &= [f(\alpha^-) - f(\alpha^+)]\varphi(\alpha) - \int_a^b (f_g' 1_{[a,\alpha]} + f_d' 1_{[\alpha,b]})\varphi\,dx.\end{aligned}$$

On a utilisé ici que la fonction test φ s'annule aux bornes de l'intervalle $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Le second terme est bien de la forme recherchée (une intégrale d'une fonction de L^2 contre la fonction test φ). Ainsi, la fonction f sera dans H^1 si et seulement si on peut mettre sous la même forme le premier terme. Or la première partie de l'exercice nous dit que cela n'est possible que si ce terme est nul, c'est-à-dire si le saut de f en α est nul, c'est-à-dire si et seulement si

$$f(\alpha^+) = f(\alpha^-).$$

Cette condition est exactement la condition de continuité de f.

Ainsi, si f est continue elle est bien dans H^1 et sa dérivée faible vaut

$$\partial_x f(x) = \begin{cases} f_g'(x) & \text{si } x < \alpha\\ f_d'(x) & \text{si } x > \alpha\end{cases}.$$

On constate que celle-ci n'est pas bien définie au point α ce qui n'est pas surprenant car il s'agit d'une fonction de L^2 (qui n'est donc bien définie qu'à un ensemble de mesure nulle près). ■

Exercice 4 (Dérivation d'un produit)

Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. Montrer que le produit de deux fonctions $u, v \in H^1(I)$ est encore un élément de $H^1(I)$ et on a l'identité suivante (au sens faible)

$$\partial_x(uv) = (\partial_x u)v + u(\partial_x v).$$

En particulier, on peut intégrer par parties au sens faible

$$\int_a^b (\partial_x u)v\,dx = (uv)(b) - (uv)(a) - \int_a^b u(\partial_x v)\,dx,\ \ \forall [a,b] \subset \overline{I}.$$

Corrigé :

Il s'agit ici d'utiliser les propriétés de densité des fonctions régulières dans H^1. Ainsi, si u, v sont deux éléments de $H^1(I)$, le Théorème I.12 nous dit qu'il existe deux suites de fonctions $(u_n)_n, (v_n)_n \subset \mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ qui convergent dans H^1 vers u et v respectivement. D'après la définition de la norme H^1, cela signifie

$$\|u_n - u\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\|\partial_x u_n - \partial_x u\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\|v_n - v\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\|\partial_x v_n - \partial_x v\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Pour n fixé, nous avons bien la formule de dérivation usuelle

$$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n',$$

et donc, pour une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ fixée, nous pouvons intégrer par parties et obtenir la formule

$$\int_I u_n v_n \varphi'\,dx = -\int_I (u_n' v_n + u_n v_n')\varphi\,dx = -\int_I (\partial_x u_n v_n + u_n \partial_x v_n)\varphi\,dx.$$

On souhaite maintenant justifier le passage à la limite dans cette égalité.

Pour le premier terme, on peut écrire par exemple, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\left|\int_I u_n v_n \varphi'\,dx - \int_I uv\varphi'\,dx\right| = \left|\int_I (u_n v_n - uv)\varphi'\,dx\right| = \left|\int_I \big[(u_n-u)v_n + u(v_n-v)\big]\varphi'\,dx\right|\\ \leq \|\varphi'\|_{L^\infty}\big[\|u_n-u\|_{L^2}\|v_n\|_{L^2} + \|v_n-v\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\big],\end{aligned}$$

et cette quantité tend bien vers 0 d'après les hypothèses.

On traite de façon analogue les deux autres termes et on obtient, à la limite que

$$\int_I uv\varphi'\,dx = -\int_I (\partial_x uv + u\partial_x v)\varphi\,dx.$$

Il reste à observer que, d'après le corollaire I.14, les fonctions u et v sont dans L^∞ et que donc, la fonction $\partial_x uv + u\partial_x v$ est dans L^2.

Au final, on a bien prouvé que le produit uv est dans H^1 et que sa dérivée faible vaut $\partial_x uv + u\partial_x v$.

La formule d'intégration par parties en découle grâce au troisième point du Théorème I.12 appliqué au produit uv. ■

Exercice 5 (Dérivation faible de fonctions composées)

Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. Montrer que si $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $u \in H^1(I)$, alors $F(u) = F\circ u$ est aussi une fonction de $H^1(I)$ et que nous avons, au sens faible

$$\partial_x(F(u)) = F'(u)\partial_x u, \;\; \textit{presque partout.}$$

Corrigé :

On procède comme précédemment en introduisant une suite $(u_n)_n$ de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ qui converge, dans H^1, vers u. Les u_n étant régulières, on a bien la formule de dérivation des fonctions composées $\partial_x(F(u_n)) = F'(u_n)\partial_x u_n$ ce qui, après intégration par parties contre une fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ nous donne l'égalité

$$\int_I F(u_n)\varphi'\,dx = -\int_I F'(u_n)(\partial_x u_n)\varphi\,dx.$$

On veut maintenant justifier le passage à la limite dans ces intégrales.

On va utiliser le Corollaire I.14 qui nous dit que $(u_n)_n$ converge vers u uniformément. Ceci implique tout d'abord l'existence d'un intervalle compact $[-R,R]$ tel que

$$u_n(x) \in [-R,R], \;\; \forall n, \forall x \in I.$$

Sur le compact $[-R,R]$, les fonctions F et F' sont continues et donc uniformément continues (théorème de Heine). On en déduit donc que $F(u_n)$ (resp. $F'(u_n)$) converge uniformément vers $F(u)$ (resp. $F'(u)$). Comme par ailleurs, on a par définition la convergence dans L^2 de $\partial_x u_n$ vers $\partial_x u$, on voit que l'on peut bien passer à la limite dans tous les termes de l'égalité et aboutir à

$$\int_I F(u)\varphi'\,dx = -\int_I F'(u)(\partial_x u)\varphi, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

Ceci justifie bien que $F(u) \in H^1(I)$ et que sa dérivée faible est donnée $F'(u)\partial_x u$ (qui est bien dans L^2 car $F'(u)$ est bornée). ■

Exercice 6 (Autour de l'inégalité de Poincaré)

Dans cet exercice on travaille sur un intervalle $I =]0, L[$ avec $L > 0$.

1. *On souhaite démontrer l'inégalité de Poincaré suivante*

$$\forall v \in H_0^1(]0, L[), \quad \|v\|_{L^2(I)} \leq \frac{L}{\pi} \|\partial_x v\|_{L^2(I)}. \tag{1}$$

   (a) *Montrer que si on sait prouver (1) pour les fonctions $v \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, L[)$, alors on peut en déduire le résultat souhaité.*

   (b) *Démontrer l'inégalité (1) pour les fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(]0, L[)$ en utilisant les séries de Fourier.*

   (c) *Vérifier que la constante $\frac{L}{\pi}$ est* **optimale**, *c'est-à-dire que c'est la plus petite constante pour laquelle l'inégalité (1) est vraie. On pourra expliciter une fonction v pour laquelle (1) est une égalité.*

2. *On introduit un nouvel espace fonctionnel*

$$H_m^1(]0, L[) = \left\{ v \in H^1(]0, L[), \quad \int_0^L v(x)\, dx = 0 \right\}.$$

En utilisant un procédé similaire au cas précédent, montrer que l'inégalité de type Poincaré suivante est également vraie, avec une constante optimale :

$$\forall v \in H_m^1(]0, L[), \quad \|v\|_{L^2(I)} \leq \frac{L}{\pi} \|\partial_x v\|_{L^2(I)}.$$

Montrer que l'application $v \in H_m^1(I) \mapsto \|\partial_x v\|_{L^2(I)}$ est une norme sur $H_m^1(I)$ équivalente à $\|\cdot\|_{H^1(I)}$.

Exercice 7

On travaille dans l'intervalle $I =]0, 1[$. Soient q et f deux fonctions continues sur $\overline{I}$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + q(x)u = f(x), & \forall x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

1. *Vérifier que si $q(x) = -\pi^2$ alors le problème est mal posé, c'est-à-dire :*

   (a) *Pour $f = 0$, il existe des solutions u* **non nulles** *de (2).*

   (b) *Il existe des fonctions f pour lesquelles (2) n'a aucune solution.*

   Autrement dit, le problème (2) n'admet pas toujours des solutions, et s'il en existe elles sont nécessairement non uniques.

2. *A partir de maintenant on suppose que la fonction q vérifie*

$$\inf_I q > -\pi^2.$$

Proposer une formulation variationnelle dans $H_0^1(I)$ du problème (2). Donner l'expression d'une fonctionnelle "énergie" $u \mapsto E(u)$ dont la solution de (2), si elle existe, serait un minimiseur.

3. *Montrer que la fonctionnelle E obtenue est continue pour la topologie de $H_0^1(I)$.*

4. *Montrer que E est minorée sur $H_0^1(I)$. En déduire l'existence d'une suite minimisante $(u_n)_n$, i.e. une suite vérifiant $E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{v \in H_0^1(I)} E(v)$.*

5. *Démontrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(I)$, tel que $E(u) = \inf_{v \in H_0^1(I)} E(v)$.*

Montrer que la fonction u ainsi obtenue est bien une solution faible du problème (2).

6. *Démontrer que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ et que u est bien une solution du problème (2) au sens classique.*

7. *Quelle(s) étape(s) de la démonstration tombe(nt) en défaut quand $q(x) = -\pi^2$ (car d'après la question 1 le problème est mal posé) ?*

Exercice 8 (Un exemple de problème aux limites non linéaire)

On pose $I =]0,1[$*. On cherche dans cet exercice à résoudre le problème suivant*

$$\begin{cases} -u'' + \lambda u^3 = f, \ \text{dans } I, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où f *est une fonction continue donnée et* λ *un paramètre réel* **positif** *donné.*

1. **Unicité :** *Soient* u_1 *et* u_2 *deux fonctions de classe* $\mathcal{C}^2$ *solutions du problème (3). Démontrer que l'on a*

$$\int_0^1 |u_1' - u_2'|^2 \, dx + \lambda \int_0^1 (u_1^3 - u_2^3)(u_1 - u_2) \, dx = 0.$$

En déduire que l'on a nécessairement $u_1 = u_2$.
La suite de l'exercice est donc consacrée à la preuve de l'existence d'une solution à ce problème.

2. **Formulation variationnelle et existence de la solution**
   (a) *Démontrer l'inégalité suivante*

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{2}b^4.$$

   (b) *Montrer que toute solution éventuelle* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *du problème (3) vérifie la formulation suivante*

$$\forall v \in H_0^1(I), \quad \int_0^1 u'v' \, dx + \lambda \int_0^1 u^3 v \, dx = \int_0^1 f v \, dx. \tag{4}$$

   On pourra commencer par considérer des $v \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$.
   (c) *On s'intéresse donc maintenant au problème suivant*

$$\text{Trouver } u \in H_0^1(I) \text{ vérifiant les équations (4).} \tag{$\mathcal{P}$}$$

   i. *Pourquoi ne peut-on pas utiliser le théorème de Lax-Milgram pour résoudre le problème* ($\mathcal{P}$) *?*
   ii. *Pour tout* $v \in H_0^1(I)$*, on introduit la fonctionnelle* énergie *suivante*

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 |v'|^2 \, dx + \frac{\lambda}{4}\int_0^1 |v|^4 \, dx - \int_0^1 f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

   Expliquez rapidement pourquoi tous les termes de cette formule sont bien définis.
   iii. *Démontrer que l'énergie* E *est minorée sur l'espace* $H_0^1(I)$*. On pourra essayer de minorer* E *par une fonctionnelle dont les propriétés sont connues.*
   iv. *Démontrer qu'il existe une suite minimisante pour* E *dans* $H_0^1(I)$*. On note* $(u_n)_n \subset H_0^1(I)$ *une telle suite.*
   En considérant la quantité $E\left(\frac{u_n + u_{n+p}}{2}\right)$*, montrer l'***inégalité** *suivante*

$$\forall n, p \geq 0, \ \frac{1}{8}\|u_n' - u_{n+p}'\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}E(u_n) + \frac{1}{2}E(u_{n+p}) - \inf_{v \in H_0^1} E(v).$$

   En déduire que la suite $(u_n)_n$ *est de Cauchy dans* $H_0^1(I)$.
   v. *Conclure qu'il existe une fonction* $u \in H_0^1(I)$ *telle que*

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(I)} E(v).$$

   vi. *Soit* $v \in H_0^1(I)$ *quelconque. En étudiant la fonction* $t \in \mathbb{R} \mapsto E(u + tv) \in \mathbb{R}$ *démontrer que la fonction* u *obtenue à la question précédente est bien solution du problème* ($\mathcal{P}$).
   vii. *Montrer que* $u' \in H^1(I)$ *et calculer* u''*. En déduire que* u' *est continue puis que* u'' *est également continue. Conclure que finalement* u *est bien l'unique solution de classe* $\mathcal{C}^2$ *du problème (3).*

Corrigé :

1. Il suffit de soustraire les deux équations (ce qui fait disparaitre le terme source), puis de multiplier par $u_1 - u_2$ et enfin d'intégrer par parties le terme contenant des dérivées. Les termes de bord disparaissent car $u_1 - u_2$ est nulle au bord.
   Ensuite, on utilise le fait que la fonction $s \mapsto s^3$ est croissante et donc que le terme $(u_1^3 - u_2^3)(u_1 - u_2)$ est toujours positif. Comme λ est lui-même positif, l'identité précédente montre que $\int_0^1 |u_1' - u_2'|^2 \, dx = 0$. Ceci implique que $u_1 - u_2$ est constante et, par ailleurs, cette constante ne peut qu'être 0 à cause des conditions aux limites.
2. (a) Il s'agit d'une inégalité de convexité de la fonction $s \mapsto s^4$. On peut aussi étudier la fonction

$$\varphi : x \mapsto \frac{1}{2}(1 + x^4) - \left(\frac{1+x}{2}\right)^4,$$

   et montrer qu'elle reste positive, ce qui peut être un peu pénible. Le résultat s'en suit en posant $x = b/a$ (pour $a \neq 0$ bien sûr).
   Deuxième méthode, on écrit

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = a^4 + b^4 + 4(a^2 + b^2)ab + 6a^2b^2,$$

   on utilise ensuite l'inégalité de Young

$$2ab \leq a^2 + b^2,$$

   pour obtenir

$$(a+b)^4 = a^4 + b^4 + 2(a^2 + b^2)(a^2 + b^2) + 6a^2b^2 = 3a^4 + 3b^4 + 10a^2b^2.$$

   On utilise à nouveau l'inégalité de Young (avec a^2 et b^2 cette fois) pour obtenir

$$(a+b)^4 \leq 8(a^4 + b^4),$$

   ce qui donne l'inégalité voulue.

   (b) Si v est dans $H_0^1(I)$ et u est une solution régulière classique de l'équation, on peut multiplier l'équation par v, l'intégrer sur I

$$\int_0^1 (-u''v + \lambda u^3 v) \, dx = \int_0^1 fv \, dx,$$

   puis intégrer par parties le premier terme (en utilisant par exemple l'exercice 4). On obtient ainsi

$$\int_0^1 \partial_x u \partial_x v \, dx + \lambda \int_0^1 u^3 v \, dx = \int_0^1 fv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{$\star$}$$

   (c) i. On ne peut pas résoudre ce problème avec le théorème de Lax-Milgram car il n'est pas linéaire (à cause du terme u^3). La formulation variationnelle établie à la question précédente ne peut donc s'écrire sous la forme $a(u, v) = L(v)$ avec a bilinéaire et L linéaire ...

   ii. Le premier terme est la norme L^2 de la dérivée faible de v qui est bien définie par définition de $H^1(I)$. Le second terme est bien défini car on a vu que $H^1(I) \subset \mathcal{C}^0(\bar{I})$ et donc, en particulier les éléments de H^1 sont dans tous les espaces L^p pour $1 \leq p \leq \infty$. Le dernier terme est bien défini d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

   iii. Le seul terme nouveau par rapport au cas traité en cours est le terme quartique (le second terme). Or, celui-ci est positif d'après les hypothèses sur λ. Ainsi, pour tout $v \in H_0^1(I)$ on a

$$E(v) \geq \frac{1}{2} \int_0^1 |\partial_x v|^2 \, dx - \int_0^1 fv \, dx,$$

   et le membre de droite de cette inégalité n'est autre que l'énergie de la corde élastique longuement étudié en cours. On a donc déjà établi qu'elle est minorée sur $H_0^1(I)$. Pour mémoire, voici à nouveau la preuve : on utilise successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, celle de Poincaré (dont on note C_P la constante) et enfin l'inégalité de Young

$$\left| \int_0^1 fv \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq C_P \|f\|_{L^2} \|\partial_x v\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \frac{C_P^2}{2} \|f\|_{L^2}^2.$$

   On en déduit que

$$E(v) \geq \frac{1}{2} \|\partial_x v\|_{L^2} - \left| \int_0^1 fv \, dx \right| \geq \frac{1}{2} \|\partial_x v\|_{L^2} - \left(\frac{1}{2} \|\partial_x v\|_{L^2}^2 + \frac{C_P^2}{2} \|f\|_{L^2}^2 \right) = -\frac{C_P^2}{2} \|f\|_{L^2}^2,$$

   et on a bien obtenu un minorant uniforme de l'énergie.

iv. Une fois que l'on sait que l'infimum est fini, l'existence d'une suite minimisante s'en suit par la définitino de la borne inf.

On calcule maintenant la quantité proposée dans l'énoncé. Le seul terme nouveau par rapport à celui du cours est le terme quartique mais l'inégalité de convexité de la question 2.a) permet d'écrire

$$\frac{\lambda}{4}\int_0^1 \left|\frac{1}{2}(u_n+u_{n+p})\right|^2 dx \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4}\int_0^1 |u_n|^4\,dx + \frac{\lambda}{4}\int_0^1 |u_{n+p}|^4\,dx\right).$$

Avec l'identité du parallélogramme on obtient l'inégalité proposée. Comme, par construction, $E(u_n)$ converge vers $\inf_{H_0^1} E$, celle-ci nous montre bien que $(u_n)_n$ est de Cauchy dans H^1 (on utilise ici le Corollaire I.17).

v. On note u la limite dans H^1 de la suite $(u_n)_n$, qui existe car H^1 est complet. Il faut justifier que $E(u_n)$ converge vers $E(u)$. Encore une fois, le seul terme nouveau est le terme non quadratique. Si on utilise le Corollaire I.14 on sait que $(u_n)_n$ converge uniformément vers u sur $\overline{I}$. Ainsi $|u_n|^4$ va également converger uniformément vers $|u|^4$ (voir l'argument dans l'exercice 5) et donc que

$$\int_0^1 |u_n|^4\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 |u|^4\,dx,$$

et le résultat est démontré.

vi. On fixe un $v \in H_0^1(I)$ quelconque. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a $E(u+tv) \geq E(u)$ et donc la fonction $\varphi_v : t \mapsto E(u+tv)$ est minimale en $t=0$. Sa dérivée (si elle existe !) est donc nulle. On se convainc ici aisément que φ_v est un polynôme d'ordre 4 donc dérivable. Sa dérivée en 0 est le coefficient de t dans son développement limité en 0.

En développant les carrés et les termes d'ordre 4, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi_v(t) &= E(u+tv)\\ &= E(u) + t\left(\int_0^1 \partial_x u \partial_x v\,dx + \lambda\int_0^1 u^3 v\,dx - \int_0^1 fv\,dx\right) + t^2(\cdots) + t^3(\cdots) + t^4(\cdots),\end{aligned}$$

et donc la condition $\varphi_v'(0)=0$ donne exactement que u vérifie la formulation variationnelle ($\star$) obtenue plus haut.

vii. Comme $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ est inclus dans $H_0^1(I)$, on peut prendre $v=\varphi\in\mathcal{C}_c^\infty(I)$ comme fonction test dans ($\star$) et ainsi obtenir

$$\int_0^1 \partial_x u \varphi'\,dx = \int_0^1 (f-\lambda u^3)\varphi\,dx.$$

Comme $f\in L^2(I)$ et $u^3\in L^2(I)$ (car u est continue sur $\overline{I}$ donc bornée), cette égalité nous dit que, par définition, $\partial_x u$ est dans $H^1(I)$ et que sa dérivée faible est $-f+\lambda u^3$. On a supposé que f est continue, donc cette dérivée faible de $\partial_x u$ est continue, ce qui montre que $\partial_x u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{I}$. De plus, elle vérifie l'équation au sens classique

$$-u'' + \lambda u^3 = f,$$

et les conditions aux limites sont également vérifiées par définition de l'espace de travail $H_0^1(I)$.

■

Exercice 9 (Le problème de Neumann revisité)

Soit $I =]0,1[$ et $f \in L^2(I)$ à moyenne nulle, i.e. $\int_0^1 f\,dx = 0$.

1. *On considère l'espace $H = H^1(I)$ et on définit*

$$a(u,v) = \int_0^1 (\partial_x u)(\partial_x v)\,dx + \left(\int_0^1 u\,dx\right)\left(\int_0^1 v\,dx\right), \quad \forall u,v \in H,$$

$$L(v) = \int_0^1 fv\,dx, \quad \forall v \in H.$$

Démontrer que le théorème de Lax-Milgram s'applique dans ce cadre et montrer que l'unique solution de la formulation variationnelle associée vérifie le problème de Neumann

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u = f(x), & x \in I, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 u\,dx = 0, \end{cases}$$

2. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ quelconque. On prend désormais*

$$L(v) = \int_0^1 fv\,dx + \alpha(v(0) - v(1)), \ \forall v \in H,$$

sans changer H ni a. Montrer que le théorème de Lax-Milgram s'applique à nouveau et identifier le problème aux limites satisfait par la solution u de la formulation variationnelle associée.

Corrigé :

1. L'espace H est bien complet, la forme linéaire L est bien continue (c'est la même que celle étudiée dans le cours). Pour la continuité de la forme bilinéaire a , il suffit de s'intéresser au nouveau terme que l'on majore grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz (deux fois !)

$$\left|\left(\int_0^1 u\,dx\right)\left(\int_0^1 v\,dx\right)\right| \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|u\|_H\|v\|_H.$$

Il reste à montrer la coercivité de a. On prend donc un $u \in H^1(I)$ quelconque et on écrit

$$a(u,u) = \|\partial_x u\|_{L^2} + \left(\int_0^1 u\,dx\right)^2.$$

Nous ne sommes ni sur $H^1_0(I)$, ni sur l'espace des fonctions à moyenne nulle $H^1_m(I)$ donc, *a priori* on ne dispose pas d'une inégalité de Poincaré qui permette de récupérer une estimation sur la norme L^2 à partir de celle de sa dérivée $\partial_x u$. On rappelle par contre l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (Proposition I.23) qui dit que, pour un certain $C_P > 0$, on a

$$\|v\|_{L^2} \leq C_P\|\partial_x v\|_{L^2}, \ \ \forall v \in H^1(I), \text{tel que } \int_0^1 v\,dx = 0.$$

On va appliquer cette intégalité à $u - \int_0^1 u$ qui est bien à moyenne nulle. On trouve donc

$$\left\|u - \int_0^1 u\,dx\right\|_{L^2} \leq C_P\|\partial_x u\|_{L^2}, \ \ \forall u \in H^1(I).$$

Par inégalité triangulaire on trouve donc

$$\|u\|_{L^2} \leq \left|\int_0^1 u\,dx\right| + C_P\|\partial_x u\|_{L^2},$$

et ainsi on a bien

$$\|u\|_{L^2} \leq \tilde{C}\left(\|\partial_x u\|^2_{L^2} + \left(\int_0^1 u\,dx\right)^2\right),$$

ce qui permet de conclure à la coercivité de a.
On peut donc, à bon droit, appliquer le théorème de Lax-Milgram et obtenir une fonction $u \in H^1(I)$ qui vérifie

$$\int_0^1 \partial_x u \partial_x v\, dx + \left(\int_0^1 u\, dx\right)\left(\int_0^1 v\, dx\right) = \int_0^1 fv\, dx, \ \ \forall v \in H^1(I). \qquad (\star)$$

Il faut maintenant exploiter ces identités pour trouver les équations et les conditions aux limites vérifiées par u.

— On prend tout d'abord $v = 1$ dans ($\star$), ce qui donne (avec l'hypothèse sur f)

$$\int_0^1 u\, dx = \int_0^1 f\, dx = 0.$$

Ainsi u est à moyenne nulle et donc ($\star$) devient

$$\int_0^1 \partial_x u \partial_x v\, dx = \int_0^1 fv\, dx, \ \ \forall v \in H^1(I). \qquad (\star\star)$$

— On prend maintenant $v = \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ dans ($\star\star$), ce qui prouve (comme dans la plupart des exemples traités en cours) que $\partial_x u$ est un élément de H^1 dont la dérivée faible vaut $-f$. Ainsi, u et de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie au sens faible

$$-\partial_x^2 u = -\partial_x(\partial_x u) = f.$$

Remarque : Si on avait supposé de plus que f est continue on aurait obtenu que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{I})$ est une solution au sens classique.

— On prend maintenant $v \in H^1(I)$ quelconque et on utilise l'équation obtenue ci-dessus et la formule d'intégration par parties (exercice 4) pour obtenir

$$\int_0^1 fv\, dx = -\int_0^1 \partial_x(\partial_x u)v\, dx = (\partial_x u)(0)v(0) - (\partial_x u)(1)v(1) + \int_0^1 \partial_x u \partial_x v\, dx.$$

Notons que $\partial_x u$ est continue et donc ses valeurs en 0 et 1 dont parfaitement définies. En comparant cette dernière égalité à ($\star\star$) on constate que l'on a nécessairement

$$(\partial_x u)(0)v(0) - (\partial_x u)(1)v(1) = 0, \ \ \forall v \in H^1(I).$$

En prenant $v(x) = x$ (resp. $v(x) = 1 - x$) on a $v(0) = 0$ et $v(1) = 1$ (resp. $v(0) = 1$ et $v(1) = 0$), on déduit que u doit nécessairement vérifier

$$\partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0.$$

— Bilan : u est l'unique solution à moyenne nulle du problème avec conditions aux limites de Neumann.

2. Les termes supplémentaires dans L sont bien linéaires et vérifient

$$|\alpha(v(0) - v(1))| \leq 2|\alpha|\|v\|_{L^\infty} \leq C\|v\|_{H^1}.$$

Ainsi la nouvelle forme L est toujours continue sur H^1. Par ailleurs ces termes restent nuls quand on prend $v = 1$ ou $v = \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$. Ainsi tout le début du raisonnement précédent est strictement identique. Le seule changement est à la fin du processus ou va obtenir l'égalité

$$(\partial_x u)(0)v(0) - (\partial_x u)(1)v(1) + \alpha(v(0) - v(1)) = 0, \ \ \forall v \in H^1(I).$$

On en conclut que u va cette fois vérifier

$$\partial_x u(0) = \partial_x u(1) = -\alpha.$$

On a donc cette fois résolu un problème de Neumann non homogène.

■

Exercice 10 (Une nouvelle condition aux limites)

Soit $I =]0, 1[$, $f \in L^2(I)$ et $\lambda > 0$. On pose $H = H^1(I)$ et

$$a(u, v) = \int_0^1 (\partial_x u)(\partial_x v)\, dx + \lambda u(0)v(0) + \lambda u(1)v(1), \ \ \forall u, v \in H,$$

$$L(v) = \int_0^1 fv\, dx.$$

Montrer que le théorème de Lax-Milgram s'applique à ce contexte et déterminer le problème aux limites satisfait par la solution u de la formulation variationnelle associée.

Corrigé :

Ici encore la seule différence avec les cas étudiés en cours réside dans la coercivité de a. En effet, nous avons

$$a(u,u) = \int_0^1 |\partial_x u|^2\,dx + \lambda|u(0)|^2 + \lambda|u(1)|^2.$$

On va utiliser l'inégalité de Poincaré pour la fonction $v = u - u(0)$ qui est dans H^1 et nulle en 0 (on a vu en cours que l'inégalité de Poincaré est encore valable dans cet espace). Ainsi, nous avons

$$\|u - u(0)\|_{L^2} \leq C_P \|\partial_x u\|_{L^2}, \ \ \forall u \in H^1,$$

et donc, pour une certaine constante $C > 0$,

$$\|u\|_{L^2}^2 \leq C(|u(0)|^2 + \|\partial_x u\|_{L^2}^2), \ \ \forall u \in H^1(I),$$

et on a donc bien la coercivité de a. Le théorème de Lax-Milgram s'applique donc et nous assure de l'existence et unicité d'une fonction $u \in H^1(I)$ vérifiant

$$\int_0^1 (\partial_x u)(\partial_x v)\,dx + \lambda u(0)v(0) + \lambda u(1)v(1) = \int_0^1 fv\,dx.$$

La démarche générale est alors identique au cas précédent. On prend d'abord $v = \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ dans le problème vérifié par u ci-dessus. Les termes en λ disparaissent car φ est nulle au bord et on obtient que $\partial_x u \in H^1$ et qu'elle vérifie $\partial_x^2 u = -f$. On teste ensuite cette équation contre $v \in H^1(I)$ quelconque et on compare à la formulation variationnelle pour obtenir

$$(\partial_x u)(0)v(0) - (\partial_x u)(1)v(1) = \lambda u(0)v(0) + \lambda u(1)v(1), \ \ \forall v \in H^1(I).$$

Ainsi, u vérifie les conditions aux limites suivantes

$$\partial_x u(0) = \lambda u(0),$$

$$\partial_x u(1) = -\lambda u(1),$$

appelées conditions aux limites de Robin (ou Fourier selon les auteurs). ■