Analyse Numérique des Equations aux Dérivées Partielles

Partie théorique

Franck Boyer

Master MAPI^3
Première année

Université Paul Sabatier - Toulouse 3

18 février 2016

Ces notes sont en construction permanente. Ne pas hésiter à signaler des erreurs ou imprécisions à l'adresse
franck.boyer@math.univ-toulouse.fr

Table des matières

Chapitre I

Introduction aux espaces de Sobolev et aux formulations variationnelles de problèmes aux limites

Le but de ce chapitre est de présenter, à partir d'un exemple simple (et relativement concret), quelques notions de calcul des variations. Cela nous mènera à la notion de formulation *variationnelle* d'un problème aux limites (c'est-à-dire une EDP elliptique + des conditions aux limites). Nous verrons également pourquoi il est naturel, en dimension 1 pour l'instant, d'introduire de nouveaux espaces fonctionnels adaptés à ce type d'approche.

Dans les chapitres ultérieurs nous généraliserons ces concepts pour attaquer des problèmes plus complexes, en particulier en dimension quelconque.

I Le problème de la corde/membrane élastique à l'équilibre

I.1 Présentation

On considère une membrane élastique qui au repos est représentée par une région compacte $\overline{\Omega}$ du plan horizontal $\mathbb{R}^2$, où Ω est un ouvert **connexe** de $\mathbb{R}^2$. On applique une force verticale (petite) notée $f(x)$ en chaque point de la membrane ce qui a pour effet de la déformer.

Pour tout $x \in \overline{\Omega}$, le point de l'espace physique $(x, 0) \in \mathbb{R}^3$ est déplacé en un point de $\mathbb{R}^3$ noté $\tilde{u}(x) = (x, u(x))$, où u est une fonction de $\overline{\Omega}$ dans $\mathbb{R}$ à déterminer représentant le déplacement vertical. On se place dans l'hypothèse de petits déplacements. De plus, on va considérée la situation dans laquelle la membrane est attachée par son bord à un référentiel fixe (penser à la peau d'un tambour). Ceci implique que l'on cherchera une fonction u qui est nulle sur le bord $\partial\Omega$.

Faisons le bilan d'énergie potentielle du système :

— Le système acquiert une énergie potentielle virtuelle qui vaut l'opposé du travail des forces extérieures f par rapport au déplacement u, c'est-à-dire :

$$E_1(u) = -\int_\Omega f(x)u(x)\,dx.$$

La présence du signe $-$ est naturelle : si la force est orientée vers le bas ($f \leq 0$) alors les zones de forte énergie potentielle sont les zones les plus hautes (donc pour les $u \geq 0$ grand) (comme pour le champ de gravité par exemple).

— Par ailleurs le système contient de l'énergie potentielle élastique du à la déformation de la membrane. On admet que cette énergie est proportionnelle au changement d'aire de la membrane [1]

$$E_2(u) = k(\text{Aire déformée} - \text{Aire au repos}) = k(|\tilde{u}(\Omega)| - |\Omega|).$$

Par changement de variable, on trouve

$$E_2(u) = k\int_\Omega \left(\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1\right) dx.$$

Dans l'hypothèse des petits déplacements, u est petite ainsi que ses dérivées. Par un développement limité usuel, on approche alors E_2 par l'expression :

$$E_2(u) = \frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

1. Ceci peut se "démontrer", par exemple, en assimilant la membrane à un réseau de petits ressorts

L'énergie potentielle totale du système en fonction du déplacement u est donnée par

$$E(u) = E_1(u) + E_2(u) = \frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega fu\,dx.$$

Le principe fondamental de la mécanique Lagrangienne nous dit alors que, sous l'effet du champ de forces f, la membrane va se déformer selon un déplacement u qui va minimiser l'énergie potentielle totale (qu'on devrait plutôt appeler *l'action* selon le vocabulaire *ad hoc* de la mécanique). On s'intéresse donc au problème suivant : trouver $u \in X$ tel que

$$E(u) = \inf_{v\in X} E(v) = \inf_{v\in X}\left(\frac{k}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega fu\,dx\right), \tag{I.1}$$

où, *a priori* X est l'espace fonctionnel suivant :

$$X = \{v : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R},\ \text{dérivable},\ \ v = 0,\ \ \text{sur } \partial\Omega\},$$

constitué de l'ensemble des positions **admissibles** de la membrane.

Remarque I.1

Noter que le modèle a été établi sous une condition de petitesse des déplacements qui ne se retrouve pas dans la formulation présentée ici ; dans les applications il peut donc être pertinent de se poser a posteriori la question de la validité de la solution obtenue après résolution du problème.

Nous verrons par la suite que l'espace X ci-dessus n'est pas nécessairement le bon choix pour faire fonctionner les méthodes mathématiques que nous allons présenter.

I.2 Les questions mathématiques que l'on veut résoudre

Dans la suite, on va essayer de répondre aux questions suivantes :

1. Le problème (I.1) admet-il une solution ? En particulier, est-ce que l'infimum de E sur X est fini ?
2. Si une telle solution existe, est-elle unique ?
3. Si une telle solution existe, est-ce qu'on peut la caractériser au moyen d'une équation "simple" que l'on pourra éventuellement résoudre ?

I.2.a Simplification

A partir de maintenant, et dans toute la suite du chapitre, on va se placer dans le cas plus simple de la dimension 1. Le modèle correspond alors à une corde élastique (et non plus une membrane). Pour simplifier encore, on considère $\Omega =]0,1[$ de sorte que le problème s'écrit de la façon suivante : trouver $u : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable, nulle en $x = 0$ et $x = 1$ et telle que

$$E(u) = \inf_{v\in X} E(v), \tag{I.2}$$

où $X = \{v : [0,1] \mapsto \mathbb{R}, \text{dérivable et tq } v(0) = v(1) = 0\}$ et l'énergie s'écrit maintenant

$$E(v) = \frac{k}{2}\int_0^1 |v'(x)|^2\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

On supposera également que f est, au minimum, une fonction intégrable.

I.2.b Unicité

On va commencer par traiter le problème de l'unicité, qui est finalement le problème le plus simple. Cette propriété découle naturellement de la **stricte convexité** de la fonctionnelle E (et de la convexité de l'ensemble X).

Supposons données deux fonctions $u_1, u_2 \in X$ solutions du problème (I.2). On suppose donc, en particulier, que l'infimum de E est fini. On notera sa valeur

$$I_E = \inf_{v\in X} E(v),$$

et on a donc, par hypothèse $E(u_1) = E(u_2) = I_E$.

On pose alors $u = \frac{u_1+u_2}{2}$ et on calcule l'énergie de u, en utilisant l'identité du parallèlogramme [2]

$$\begin{aligned} E(u) &= \frac{k}{2}\int_0^1 \left|\frac{u_1'(x)+u_2'(x)}{2}\right|^2 dx - \int_0^1 f(x)\frac{u_1(x)+u_2(x)}{2}\,dx \\ &= \frac{k}{4}\int_0^1 |u_1'(x)|^2\,dx + \frac{k}{4}\int_0^1 |u_2'(x)|^2\,dx - \frac{k}{2}\int_0^1 \left|\frac{u_1'(x)-u_2'(x)}{2}\right|^2 dx \\ &\qquad - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)u_1(x)\,dx - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)u_2(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}E(u_1) + \frac{1}{2}E(u_2) - \frac{k}{2}\int_0^1 \left|\frac{u_1'(x)-u_2'(x)}{2}\right|^2 dx. \end{aligned}$$

Or, par hypothèse, u_1 et u_2 sont solutions du problème (I.2) et donc, on a finalement

$$E(u) = I_E - \frac{k}{2}\int_0^1 \left|\frac{u_1'(x)-u_2'(x)}{2}\right|^2 dx.$$

Comme par ailleurs, par définition de l'infimum (et comme $u = \frac{u_1+u_2}{2} \in X$), on a $E(u) \geq I_E$, on déduit que l'on a nécessairement

$$\frac{k}{2}\int_0^1 \left|\frac{u_1'(x)-u_2'(x)}{2}\right|^2 dx = 0.$$

La fonction sous l'intégrale étant positive, on obtient immédiatement que

$$\forall x \in [0,1], u_1'(x) = u_2'(x).$$

Ceci implique que $u_1 - u_2$ est une fonction constante, mais comme $u_1(0) = u_2(0) = 0$ (par définition des conditions au bord dans X), on a finalement montré

$$\forall x \in [0,1],\ \ u_1(x) = u_2(x),$$

ce qui montre bien l'unicité d'une *éventuelle* solution de (I.2).

I.2.c Caractérisation de la solution

On continue à supposer dans ce paragraphe que la solution $u \in X$ du problème (I.2) existe. On va montrer que, sous de bonnes hypothèses, on peut la caractériser par une équation aux dérivées partielles (ici en 1D donc avec une seule variable).

La méthode ci-dessous est standard en optimisation et calcul des variations. Il s'agit d'établir les équations **d'Euler-Lagrange** associées au problème de minimisation (I.2).

La preuve de ce résultat n'est finalement rien d'autre que la traduction en dimension infinie ($\dim X = \infty$) du résultat élémentaire suivant :

Lemme I.2

Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $t^* \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(t^*) = \inf_{t\in\mathbb{R}} \varphi(t), \tag{I.3}$$

alors on a

$$\varphi'(t^*) = 0.$$

Il ne semble pas inutile de rappeler la démonstration de ce lemme pour comprendre comment intervient l'hypothèse.
Preuve :

D'après (I.3), pour tout $h > 0$ (le signe de h joue ici un rôle crucial !), on a

$$\varphi(t^* + h) \geq \varphi(t^*).$$

Comme $h > 0$, on en déduit

$$\frac{\varphi(t^*+h) - \varphi(t^*)}{h} \geq 0.$$

On passe maintenant à la limite quand $h \to 0^+$ dans cette inégalité, ce qui donne par définition du nombre dérivé

$$\varphi'(t^*) \geq 0.$$

2. Rappel : dans un Hilbert H, pour tous $a, b \in H$ on a $\|\frac{a+b}{2}\|^2 + \|\frac{a-b}{2}\|^2 = \frac{\|a\|^2}{2} + \frac{\|b\|^2}{2}$.

Si maintenant on reprend ce calcul avec $h < 0$, on a

$$\varphi(t^* + h) \geq \varphi(t^*),$$

et ainsi (comme $h < 0$!) il vient

$$\frac{\varphi(t^* + h) - \varphi(t^*)}{h} \leq 0.$$

En passant à la limite quand $h \to 0^-$, on trouve

$$\varphi'(t^*) \leq 0,$$

ce qui donne le résultat. ■

Revenons à notre problème de corde élastique. Supposons donc qu'une solution u de (I.2) existe. On se donne un v quelconque dans X, de sorte que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $u + tv \in X$ (car X est un espace vectoriel !). Ainsi, par définition de l'infimum, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}, E(u + tv) \geq E(u),$$

ce qui montre que la fonction $\varphi_v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\varphi_v(t) = E(u + tv)$ admet un minimum en $t^* = 0$. Par ailleurs, cette fonction est dérivable (on va même voir ci-dessous que c'est un polynôme de degré 2 dans la variable t). D'après le lemme précédent, on en déduit que nécessairement $\varphi_v'(0) = 0$.

Il reste à calculer $\varphi_v'(0)$. Pour cela, on écrit φ_v sous la forme suivante

$$\varphi_v(t) = E(u) + t\left[k\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx - \int_0^1 f(x)v(x)\,dx\right] + \frac{t^2}{2}k\int_0^1 |v'(x)|^2\,dx, \tag{I.4}$$

et donc, la relation $\varphi_v'(0) = 0$ devient

$$k\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx.$$

Comme ceci est vrai pour toute fonction $v \in X$, on a donc démontré que la solution, si elle existe, du problème (I.2) vérifie les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\forall v \in X, \quad k\int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)v(x)\,dx. \tag{I.5}$$

Ce résultat est très général.

En revenant à (I.4), on observe que **dans cet exemple particulier** la réciproque est vraie : si $u \in X$ vérifie (I.5), alors u est solution du problème (I.2). ATTENTION : ceci est faux en général car on sait bien que la réciproque du lemme I.2 n'est pas vraie : si $\varphi'(t^*) = 0$, t^* n'est pas nécessairement un extremum local de φ.

Au bilan, on a donc montré le résultat suivant

Proposition I.3

Une fonction $u \in X$ vérifie (I.5) si et seulement u est solution du problème (I.2).

Jusqu'à présent nous n'avons eu besoin d'aucune hypothèse particulière sur la solution u de notre problème. Si on admet que celle-ci est un peu plus régulière que simplement dérivable, alors on peut aller plus loin dans l'analyse.

Théorème I.4

On suppose que le problème (I.2) admet une solution $u \in X$.
Si on suppose, de plus, que cette solution vérifie $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ et que $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, alors u vérifie le problème de Poisson avec condition de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -k\partial_x^2 u = f, & \text{dans }]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{I.6}$$

La réciproque est également vraie.

On retrouve donc bien le problème de Poisson (en dimension 1 bien sûr). Démontrons ce théorème.

Preuve :

Pour montrer la réciproque, il suffit de multiplier l'équation dans (I.6) par la fonction test v et d'intégrer par parties. Les termes de bord sont bien nuls car v est nulle au bord.

Pour le sens direct, il s'agit, dans un premier temps, également d'une simple intégration par parties. Pour tout $v \in X$, comme u est de classe $\mathcal{C}^2$, on peut en effet intégrer par parties l'équation (I.5) et obtenir

$$\int_0^1 (k\partial_x^2 u(x) + f(x))v(x)\,dx - [k(\partial_x u)v]_0^1 = 0.$$

On ne sait rien de la valeur de $\partial_x u$ en $x = 0$ et $x = 1$, par contre on a $v(0) = v(1) = 0$, ce qui montre que le dernier terme de cette formule est nul.

Si on pose $G(x) = k\partial_x^2 u(x) + f(x)$, on a donc obtenu

$$\forall v \in X, \quad \int_0^1 G(x)v(x)\,dx = 0.$$

On voudrait déduire de cela que la fonction G est identiquement nulle, ce qui montrera bien (I.6). Il faut tout d'abord remarquer que l'on ne peut pas simplement prendre $v = G$ dans la formule car la fonction G n'est pas dans l'espace X (on ne sait pas, a priori, que $G(0) = G(1) = 0$). Il faut donc raisonner autrement en utilisant le lemme qui suit. ■

Ce lemme étant crucial dans tout le cours, nous le démontrons en dimension quelconque.

Lemme I.5

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert non vide et $f \in L^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega f\varphi\,dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \tag{I.7}$$

alors $f = 0$.

Preuve (du Lemme I.5):

On va se contenter de le prouver dans le cas où $f \in L^2(\Omega)$ car la preuve est un peu plus simple.

On utilise la propriété suivante (voir le cours d'intégration, ou d'analyse fonctionnelle) :

L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans Ω est dense dans $L^2(\Omega)$.

Comme $f \in L^2$, cela signifie qu'il existe une suite $(\varphi_n)_n$ d'éléments de $\mathcal{C}_c^\infty$ telle que $\|\varphi_n - f\|_{L^2} \to 0$.

On a alors

$$\int_\Omega |f(x)|^2\,dx = \int_\Omega f(x)(f(x) - \varphi_n(x))\,dx + \int_\Omega f(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Comme $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty$, le second terme est nul d'après l'hypothèse (I.7), et on peut majorer le premier terme comme suit

$$\int_\Omega |f(x)|^2\,dx \leq \|f\|_{L^2}\|f - \varphi_n\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, $|f|^2$ est une fonction positive et d'intégrale nulle, elle est donc bien nulle presque partout.

Si f est continue, on peut faire une preuve plus directe. On raisonne par l'absurde en supposant que f est non identiquement nulle. Comme f est continue, et quitte à changer f en $-f$, il existe une constante $C > 0$ et une boule non triviale $B(\alpha, r) \subset \Omega$ telle que

$$\forall x \in B(x, r), f(x) \geq C.$$

On construit alors une fonction v de classe $\mathcal{C}^\infty$, positive, identiquement nulle en dehors de $B(\alpha, r)$ et telle que $\int_{B(\alpha,r)} v(x)\,dx > 0$. La construction d'une telle fonction est classique mais on n'a pas besoin de connaître la formule exacte pour faire la démonstration.

D'après (I.7) et les propriétés de f et v, on a

$$0 = \int_\Omega f(x)v(x)\,dx = \int_{B(\alpha,r)} f(x)v(x)\,dx \geq C\int_{B(\alpha,r)} v(x)\,dx > 0,$$

ce qui constitue une contradiction manifeste. ■

Vocabulaire

- (I.6) est un problème aux limites (une EDP + des conditions aux limites).
- (I.5) est une formulation variationnelle de ce problème aux limites dont u est la solution.
- La fonction v est appelée fonction-test. Elle habite, en général, dans le même espace que la solution u recherchée.

Remarque I.6

Tous les calculs précédents peuvent être effectués en dimension d quelconque. L'équation aux dérivées partielles que l'on obtient alors à la place de (I.6) est

$$\begin{cases} -k\Delta u = f, \text{ dans } \Omega, \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On rappelle que le Laplacien est l'opérateur différentiel défini par

$$\Delta = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial^2_{x_i}}.$$

Remarque I.7

Si on reprend toute l'analyse précédente en supposant que la tension k de la corde/membrane dépend du point x où l'on se place, alors on aboutit aux équations suivantes

$$-div\ (k(x)\nabla u) = f, \quad \text{dans } \Omega,$$

en dimension 2 et

$$-\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), \quad \text{dans }]0,1[,$$

en dimension 1, toujours assortie des conditions aux limites.

Pour l'instant nous avons démontré que si le problème de minimisation de E sur X admet une solution, alors elle est unique et que de plus si celle-ci est régulière, alors elle est solution de l'équation de Poisson.

I.3 Comment montrer l'existence d'un minimiseur ?

Le principe général de la preuve de l'existence d'un minimiseur pour une fonctionnelle E sur un espace X est le suivant :

1. On démontre que $\inf_X E > -\infty$. Si ceci est faux, le problème de chercher un minimiseur n'a évidemment pas de sens, c'est donc une étape indispensable.
2. On considère une *suite minimisante*, c'est-à-dire une suite $(u_n)_n \subset X$ qui vérifie $\lim_{n\to\infty} E(u_n) = \inf_X E$. Une telle suite existe **toujours**, c'est juste la définition de l'infimum qui nous la fournit.
3. On essaie de démontrer que cette suite (ou l'une de ses sous-suites) converge (en un sens à préciser : idéalement pour la norme de X). On note u la limite obtenue.
4. On essaie de vérifier que u réalise bien le minimum recherché.

Il est bon de remarquer que les deux premiers points ne dépendent que de l'ensemble X (et de E bien sûr) alors que les deux derniers points requièrent une topologie sur X, puisqu'il y est question de suites convergentes, de fonctions continues, etc ...

Ainsi, pour faire fonctionner ce programme de travail, le choix du bon espace X et de la bonne topologie sur cet espace sont cruciales. En effet, l'espace X étant, en général, de dimension infinie, le choix d'une topologie sur X (même une topologie d'e.v.n.) n'est pas du tout trivial.

De façon générale, pour réaliser la troisième étape du programme ci-dessus, on va essayer de montrer que la suite minimisante est de Cauchy, donc convergente, **à condition que l'espace X soit complet**. C'est pourquoi la complétude de l'espace est une notion centrale. Une première idée serait donc de modifier un tout petit peu l'espace X considéré plus haut en choisissant cette fois

$$X = \{v : [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et tq } v(0) = v(1) = 0\},$$

muni de la norme $\|v\|_X = \|v\|_{L^\infty} + \|v'\|_{L^\infty}$.

On sait en effet que cet espace est un Banach, il est donc susceptible de convenir.

Finitude de l'infimum Commençons par vérifier que l'infimum est fini. Pour cela, on utilise le résultat suivant

Lemme I.8

Si $v \in X$, on a

$$\|v\|_{L^\infty} \leq \|v'\|_{L^2}.$$

Preuve :

On écrit, pour tout $x \in [0,1]$,

$$v(x) = \underbrace{v(0)}_{=0, \text{car } v \in X} + \int_0^x v'(t)\, dt,$$

puis on majore l'intégrale par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

Ainsi, pour tout $v \in X$,

$$E(v) = \frac{k}{2}\|v'\|_{L^2}^2 - \int_0^1 fv\, dx \geq \frac{k}{2}\|v'\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^1}\|v\|_{L^\infty} \geq \frac{k}{2}\|v'\|_{L^2}^2 - \|f\|_{L^1}\|v'\|_{L^2}.$$

Or la fonction (polynômiale) $y \mapsto \frac{k}{2}y^2 - \|f\|_{L^1} y$ est minorée sur $\mathbb{R}$ par $-\frac{\|f\|_{L^1}^2}{2k}$.

On a donc montré le résultat attendu

$$\inf_X E \geq -\frac{\|f\|_{L^1}^2}{2k}.$$

Etude d'une suite minimisante Comment peut-on alors montrer la convergence d'une suite minimisante dans cet espace X ?

Une des seules choses que l'on sait sur la suite minimisante, c'est que la suite de nombre réels $(E(u_n))_n$ est bornée et converge vers l'infimum. Est-ce qu'on peut en déduire que la suite $(u_n)_n$ est bornée dans X ?

La réponse à cette question est, en général, non ! On peut par exemple facilement construire une suite $(u_n)_n$ de fonctions de X qui ne soit pas bornée et telle que $(E(u_n))_n$ soit bornée. Voir l'exercice 1 du TD1.

On voit donc qu'il n'est pas du tout évident de tirer une information utile sur la suite $(u_n)_n$ uniquement à partir de la connaissance de la suite des énergies $(E(u_n))_n$.

En théorie de l'optimisation, on dit que la fonctionnelle E n'est pas **coercive** sur $(X, \|\cdot\|_X)$.

On pourrait envisager de changer la norme sur X pour mieux correspondre au problème étudié. Ainsi, si on munit X de la norme suivante

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2},$$

alors il est immédiat de voir que l'on récupère une forme de coercivité de E sur $(X, \|\cdot\|_{H^1})$.

Proposition I.9

Si $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de X telle que $(E(u_n))_n$ est bornée, alors $(u_n)_n$ est bornée dans $(X, \|\cdot\|_{H^1})$.

Preuve :

On note $C = \sup_n E(u_n) < +\infty$. On utilise ensuite la définition de l'énergie

$$\frac{k}{2}\|u_n'\|_{L^2}^2 = E(u_n) + \int_0^1 f(x)u_n(x)\, dx \leq C + \|f\|_{L^1}\|u_n\|_{L^\infty} \leq C + \|f\|_{L^1}\|u_n'\|_{L^2}.$$

On utilise ensuite l'inégalité de Young suivante (immédiate à vérifier)

$$\forall \varepsilon > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon}b^2.$$

pour majorer le dernier terme de la façon suivante

$$\frac{k}{2}\|u_n'\|_{L^2}^2 \leq C + \underbrace{\frac{k}{4}}_{=\varepsilon}\|u_n'\|_{L^2}^2 + \frac{\|f\|_{L^1}^2}{k}.$$

On en déduit

$$\frac{k}{4}\|u_n'\|_{L^2}^2 \leq C + \frac{\|f\|_{L^1}^2}{k},$$

ce qui donne une borne sur $\|u_n'\|_{L^2}$. Il nous faut maintenant une borne sur $\|u_n\|_{L^2}$ mais celle-ci s'obtient immédiatement avec le lemme I.8

$$\|u_n\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |u_n|^2 \, dx \leq \|u_n\|_{L^\infty}^2 \leq \|u_n'\|_{L^2}^2.$$

■

Ainsi, avec cette nouvelle norme, on a la coercivité de E et l'on peut en déduire que toute suite minimisante est bornée pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$. C'est un premier pas vers la convergence de la suite. On peut même montrer que cette suite est de Cauchy toujours pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ (voir plus loin la démonstration).

Malheureusement, en changeant la norme sur X, on a perdu une propriété essentielle : la complétude, voir l'exercice 2 du TD1. On ne peut donc rien déduire du fait que la suite minimisante est de Cauchy.

Bilan : Un choix pour lequel la démarche va fonctionner sera de remplacer X par son **complété** pour la norme $\|\cdot\|_{H^1}$. Cet espace est, *a priori*, un espace abstrait. On va voir dans la suite du chapitre, qu'on peut en fait le construire de façon relativement explicite et travailler dans cet espace de façon finalement naturelle.

II Espaces de Sobolev en dimension 1

II.1 L'espace $H^1(]a,b[)$

Bien qu'on se consacre pour l'instant au cas monodimensionnel à fin de comprendre les idées mises en place, il faut retenir que toutes les méthodes se généralisent au cas multi-D, comme nous le verrons dans la suite du cours. C'est d'ailleurs en dimension quelconque que ces outils d'analyse fonctionnelle sont réellement utiles et efficaces.

ATTENTION quand meme : les résultats théoriques sur les espaces de Sobolev peuvent varier selon la dimension de l'espace.

On se place donc désormais en dimension 1 et on travaille sur un intervalle ouvert borné $I =]a,b[$.

Définition et Proposition I.10

Soit $u \in L^2(I)$ et $g \in L^2(I)$. On dit que g est une **dérivée faible** *de u dans $L^2(I)$ si*

$$\text{Pour toute fonction test } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \text{ on a } \int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b g(x)\varphi(x)\,dx. \tag{I.8}$$

Si une telle dérivée faible existe, elle est unique (au sens presque partout*) et on la note $\partial_x u$.*
On appelle **espace de Sobolev** *$H^1(I)$, l'ensemble des fonctions u de $L^2(I)$ qui admettent une dérivée faible dans $L^2(I)$:*

$$H^1(I) = \{u \in L^2(I),\ \exists \nabla u \in L^2(I)\},$$

et on le munit de la norme

$$\|u\|_{H^1} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2}.$$

Ce qu'il faut retenir, c'est la formule "d'intégration par parties" suivante, qui est en fait la **définition** de la dérivée faible

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \text{ on a } \int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_a^b \partial_x u(x)\varphi(x)\,dx.$$

Preuve :

La seule chose à démontrer ici, c'est l'unicité de la dérivée faible d'une fonction u. Pour cela, on constate que si $g_1, g_2 \in L^2(I)$ sont deux dérivées faibles de u, on a par définition

$$\int_a^b (g_1(x) - g_2(x))\varphi(x)\,dx = 0,\ \ \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

Le lemme I.5 montre que $g_1 = g_2$ presque partout. ■

On va maintenant établir que cette définition généralise la notion usuelle de dérivée.

Proposition I.11

Si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{I} = [a, b]$, alors $u \in H^1(I)$ et la dérivée faible $\partial_x u$ coïncide presque partout avec la dérivée usuelle u'. On a donc l'inclusion algébrique

$$\mathcal{C}^1(\overline{I}) \subset H^1(I),$$

mais on a aussi continuité de cette injection, c'est-à-dire plus précisément que

$$\forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{I}), \quad \|u\|_{H^1} \leq \sqrt{2(b-a)}\|u\|_{\mathcal{C}^1}.$$

Preuve :

Si u est de classe $\mathcal{C}^1$, la formule (I.8) est vraie avec $g = u'$ (la dérivée usuelle) par une simple intégration par parties. Celle-ci ne comporte aucun terme de bord car φ est choisie à support compact.

Pour comparer les normes, on utilise simplement que pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, on a $\|f\|_{L^2} \leq \sqrt{b-a}\|f\|_{L^\infty}$. ∎

Notations

Il n'y a désormais plus d'ambiguité sur les différentes notions de dérivées (faible ou classique) et on se permettra donc souvent de noter indifféremment u', $\partial_x u$ et même parfois ∇u par analogie avec le cas multi-dimensionnel.

Théorème I.12 (Principales propriétés de $H^1(I)$)

1. *L'espace $(H^1(I), \|.\|_{H^1})$ introduit dans la Définition et Proposition I.10 est un espace de Hilbert.*
2. *Si $u \in H^1(I)$ a une dérivée faible $\partial_x u$ nulle presque partout, alors u est une constante.*
3. *Toute fonction $u \in H^1(I)$ admet un représentant (au sens presque partout) continu sur $\overline{I}$, qu'on note toujours u, et on a*
$$u(\beta) - u(\alpha) = \int_\alpha^\beta (\partial_x u)\, dx, \quad \forall \alpha, \beta \in \overline{I}.$$
4. *L'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\overline{I})$ est dense dans $H^1(I)$.*

Notons d'ores et déjà que la propriété 3 - la continuité des fonctions de H^1 - n'est pas vraie en dimensions supérieures.

Preuve :

1. Il est clair que la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est une norme Hilbertienne associée au produit scalaire H^1 défini par
$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\partial_x u, \partial_x v)_{L^2} = \int_I uv\, dx + \int_I \partial_x u \partial_x v\, dx.$$
Il reste juste à vérifier la complétude de $H^1(I)$. Soit donc une suite de Cauchy $(u_n)_n$ dans $H^1(I)$. Par définition de la norme H^1, on déduit que $(u_n)_n$ et $(\partial_x u_n)_n$ sont de Cauchy dans $L^2(I)$. Comme $L^2(I)$ est complet, il existe $u, g \in L^2(I)$ telles que
$$u_n \to u, \quad \text{et} \quad \partial_x u_n \to g.$$
Pour toute fonction test φ, et pour tout n, on a
$$\int_I u_n(x)\varphi'(x)\, dx = -\int_I \partial_x u_n(x)\varphi(x)\, dx,$$
et il est clair que les convergences établies plus haut permettent de passer à la limite dans cette formule (la fonction test φ étant fixée !). Ceci prouve que $u \in H^1(I)$ et que $\partial_x u = g$.
La convergence de $(u_n)_n$ vers u pour la norme H^1 est alors immédiate.
2. Soit donc une fonction $u \in L^2(\Omega)$ telle que pour toute fonction test φ on a :
$$\int_I u(x)\varphi'(x)\, dx = 0. \tag{I.9}$$

On fixe une fonction test $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ telle que $\int_I \theta(t)\,dt = 1$. Maintenant pour toute fonction-test $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ on pose

$$\varphi(x) = \int_a^x \psi(t)\,dt - \left(\int_I \psi\right)\left(\int_a^x \theta(t)\,dt\right).$$

Cette fonction est bien sûr de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on vérifie qu'elle est également à support compact. De plus on a

$$\varphi'(x) = \psi(x) - \left(\int_I \psi\right)\theta(x).$$

Appliquons (I.9) à la fonction φ ainsi construite, on trouve

$$\int_I u(x)\psi(x)\,dx = \left(\int_I \psi(x)\,dx\right)\underbrace{\left(\int_I u(x)\theta(x)\,dx\right)}_{\stackrel{\text{def}}{=} m_{u,\theta}}.$$

On a donc obtenu que, pour toute fonction test ψ, on a

$$\int_I (u(x) - m_{u,\theta})\,\psi(x)\,dx = 0.$$

Le lemme I.5 implique alors que $u - m_{u,\theta}$ est une fonction nulle presque partout, ce qui prouve bien que u est constante.

3. Soit v la fonction définie sur I par

$$v(x) = \int_a^x \partial_x u(t)\,dt, \quad \forall x \in I.$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, cette fonction est continue sur $\overline{I}$. Vérifions que $v \in H^1(I)$ et que $\partial_x v = \partial_x u$. Pour cela, on choisit une fonction-test φ et on calcule, en utilisant le théorème de Fubini

$$\int_a^b \left(\int_a^x \partial_x u(t)\,dt\right)\varphi'(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_t^b \varphi'(x)\,dx\right)\partial_x u(t)\,dt = -\int_a^b \varphi(t)\partial_x u(t)\,dt.$$

Donc, $u - v$ est une fonction de $H^1(I)$ à dérivée nulle, il existe donc une constante C telle que $u = C + v$ presque partout.

Ceci montre que $C + v$ est un représentant continu de u. En identifiant u à ce représentant continu et en utilisant la formule qui définit v on obtient bien la formule annoncée.

4. Ce résultat est admis et se démontre de la même façon que la densité des fonctions régulières dans $L^2(I)$.

■

Bien entendu la construction de cet espace se justifie par le fait (entre autres) qu'elle permet de prendre en compte plus de fonctions que les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ tout en contenant les fonctions dérivables au sens usuel.

Proposition I.13 (Lien entre dérivées faibles et dérivées classiques)

Soit $u \in H^1(I)$ et $J \subset I$ un sous-intervalle ouvert.

1. *Si la restriction $u_{|J}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ alors la dérivée faible de u sur J coïncide presque partout avec la dérivée usuelle de $u_{|J}$.*
2. *Si la restriction de la dérivée faible de u sur J coïncide presque partout avec une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geq 0$), alors la restriction de u à J est une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ dont la dérivée usuelle coïncide avec la dérivée faible de u.*

Preuve :

1. On prend φ à support compact dans le sous-intervalle J, et comme $u_{|J}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut intégrer par parties sur J (sans termes de bord)

$$\int_I u\varphi' = \int_J u\varphi' = -\int_J (u_{|J})'\varphi = -\int_I (u_{|J})'\varphi.$$

Mais par définition de la dérivée faible de u on a aussi

$$\int_I u\varphi' = -\int_I (\partial_x u)\varphi.$$

Par comparaison on a donc établi que

$$\int_I (u'_{|J} - \partial_x u)\varphi = 0,$$

pour toute fonction test à support dans J. D'après le lemme (I.5) on en déduit que $\partial_x u = u'_{|J}$ presque partout dans J.

2. On fixe un point quelconque $y_0 \in J$ et on utilise la propriété 3 du Théorème I.12 pour écrire

$$u(y) = u(y_0) + \int_{y_0}^{y} (\partial_x u)\, dy.$$

Par hypothèse, $\partial_x u$ est $\mathcal{C}^k$ sur J et u est donc une de ses primitives sur J. Le résultat est démontré.

■

Exemples : On prend $I =]-1,1[$.

— La fonction $x \mapsto u(x) = |x|$ est dans $H^1(I)$ et $\partial_x u$ est la fonction de Heaviside $H \in L^2(I)$ qui vaut 1 sur $]0,1[$ et -1 sur $]-1,0[$.

— La fonction de Heaviside H elle-même n'appartient pas à $H^1(I)$ car elle n'admet pas de représentant continu.
On peut également directement vérifier que l'on a

$$\int_{-1}^{1} H(x)\varphi'(x)\, dx = -2\varphi(0),$$

et que cette dernière quantité ne peut pas s'écrire comme un élément de $L^2(I)$: il n'existe pas de fonction $g \in L^2(I)$ telle que

$$-2\varphi(0) = \int_{-1}^{1} g\varphi\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]-1,1[).$$

On étudiera cela plus en détail dans l'exercice 3 du TD1.

— La fonction $x \mapsto u(x) = |x|^\alpha$ est dans $H^1(I)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$ et on a alors $\partial_x u = \alpha |x|^{\alpha-2}x$, pour $x \neq 0$.

Corollaire I.14

L'injection canonique (i.e. l'application identité !) de $H^1(I)$ dans $\mathcal{C}^0(\overline{I})$ est continue et plus précisément on a

$$\|u\|_{L^\infty} \leq \left(\frac{1}{|b-a|} + |b-a|\right)\|u\|_{H^1}, \quad \forall u \in H^1(I).$$

Conséquence : si $(u_n)_n \subset H^1(I)$ vérifie $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u$ dans $H^1(I)$), alors $(u_n)_n$ converge vers u uniformément sur $\overline{I}$.

Preuve :

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a pour tout x, y

$$|u(y)| \leq |u(x)| + |b-a|^{\frac{1}{2}}\|\partial_x u\|_{L^2}.$$

Si on intègre ceci par rapport à x, on trouve

$$|b-a||u(y)| \leq \int_I |u(x)|\, dx + |b-a|^{\frac{3}{2}}\|\partial_x u\|_{L^2}.$$

Utilisant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$|b-a||u(y)| \leq |b-a|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2} + |b-a|^{\frac{3}{2}}\|\partial_x u\|_{L^2}.$$

En prenant finalement le $\sup$ par rapport à y on trouve

$$\|u\|_{\mathcal{C}^0(\overline{I})} \leq |b-a|^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2} + |b-a|^{\frac{1}{2}}\|\partial_x u\|_{L^2},$$

ce qui permet de conclure. ■

Nous verrons dans le TD1 (exercices 4 et 5) d'autres propriétés assez naturelles de cet espace.

II.2 L'espace $H_0^1(I)$

Définition I.15

On appelle $H_0^1(I)$, le sous-espace fermé de $H^1(I)$ constitué des fonctions de $H^1(I)$ dont les valeurs sont nulles au bord.

Cette définition a bien un sens car on a vu que les fonctions de $H^1(I)$ ont un unique représentant continu sur $\overline{I}$, ce qui légitime la notion de "valeur au bord" pour des fonctions *a priori* définies seulement presque partout.

Cette espace est un fermé car c'est le noyau de l'application **continue** (d'après le corollaire I.14) définie par

$$u \in H^1(I) \longmapsto \begin{pmatrix} u(a) \\ u(b) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Le résultat suivant est fondamental dans la théorie. Il est à rapprocher du Lemme I.8.

Proposition I.16 (Inégalité de Poincaré)

Pour tout $u \in H_0^1(I)$, on a l'inégalité suivante

$$\|u\|_{L^2} \leq |b-a| \|\partial_x u\|_{L^2}.$$

Corollaire I.17

L'application $u \mapsto \|\partial_x u\|_{L^2}$ est donc une norme sur $H_0^1(I)$ équivalente à la norme de $H^1(I)$. La structure de Hilbert correspondante est équivalente à la structure héritée de H^1.

Notation

Pour $u \in H^1(I)$, on note

$$|u|_{H^1} \stackrel{\text{def}}{=} \|\partial_x u\|_{L^2},$$

que l'on appelle **la semi-norme** H^1. Le corollaire précédent dit que, sur $H_0^1(I)$, cette semi-norme est en fait une norme équivalente à la norme H^1 standard.

La démonstration du corollaire est immédiate. Montrons l'inégalité de Poincaré :

Preuve :

Comme $u(a) = u(b) = 0$, on peut appliquer la troisième propriété du Théorème I.12, et obtenir que pour tout $x \in I$, on a

$$|u(x)| \leq \int_a^x |\partial_x u| \, dt \leq |b-a|^{\frac{1}{2}} \|\partial_x u\|_{L^2}.$$

En élevant cette inégalité au carré, puis en l'intégrant sur I, on trouve

$$\int_a^b |u(x)|^2 \, dx \leq |b-a|^2 \|\partial_x u\|_{L^2}^2,$$

ce qui donne le résultat. On peut remarquer qu'on a seulement utilisé le fait que $u(a) = 0$ ici. ∎

Remarque I.18

La constante $|b-a|$ qui apparaît dans l'inégalité de Poincaré ci-dessus n'est pas optimale. On peut montrer que la valeur optimale (i.e. la plus petite) de cette constante vaut $\frac{|b-a|}{\pi}$ (voir l'exercice 6 du TD1).

On a enfin le résultat suivant qui est admis.

Théorème I.19

L'ensemble des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ est dense dans $H_0^1(I)$.

Ce résultat démontre que $H_0^1(I)$ est bien **le** complété de l'espace $X = \{v \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), v(0) = v(1)\}$ introduit plus haut pour la norme H^1. En effet, on a les inclusions

$$\mathcal{C}_c^\infty(I) \subset X \subset H_0^1(I),$$

et donc la proposition ci-dessus établit la densité de X dans $H_0^1(I)$ pour la norme H^1. Cet espace étant complet, on a bien affaire à l'unique complété (à isomorphisme près) de X pour cette norme.

L'espace $H_0^1(I)$ semble donc un bon candidat pour notre analyse.

II.3 Résolution du problème variationnel pour la corde élastique

Revenons au problème qui a motivé toute cette théorie. On a maintenant compris qu'il faut travailler dans l'espace $X = H_0^1(I)$ muni de sa norme. Le problème est donc reformulé de la façon suivante :

Soit $f \in L^2(I)$, trouver $u \in H_0^1(I)$ vérifiant

$$E(u) = \inf_{v \in H_0^1(I)} E(v).$$

L'espace $H_0^1(I)$ est un espace vectoriel et dans ces conditions la preuve de l'unicité d'un éventuel minimum, qu'on a déjà effectuée est encore valable.

Démontrons maintenant l'existence d'un minimum. Pour cela, on va commencer par démontrer que la fonctionnelle E est minorée sur $H_0^1(I)$. En effet pour tout $v \in H_0^1(I)$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_I fv\,dx &\leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2}, \text{ par Cauchy-Schwarz}\\ &\leq |b-a|\|f\|_{L^2}\|\partial_x v\|_{L^2}, \text{ par Poincaré, car } v \in H_0^1(I)\\ &\leq \frac{1}{2k}|b-a|^2\|f\|_{L^2}^2 + \frac{k}{2}\|\partial_x v\|_{L^2}^2, \text{ par Young.}\end{aligned}$$

Tout ceci montre que

$$E(v) \geq -\frac{|b-a|^2}{2k}\|f\|_{L^2}^2.$$

Comme E est minorée, son infimum est fini et par définition de celui-ci, il existe une suite minimisante, c'est-à-dire une suite de fonctions $(u_n)_n$ dans $H_0^1(I)$ telle que la suite de nombre réels $(E(u_n))_n$ converge vers $\inf_{H_0^1} E$.

Il faut maintenant démontrer que la suite $(u_n)_n$ converge. Pour cela, on va exploiter la complétude de $H_0^1(I)$ (on a tout fait pour cela !) et directement montrer que $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $H_0^1(I)$.

On note $I_E = \inf_{v\in H_0^1(I)} E(v)$. On reprend la démonstration de la propriété d'unicité (avec l'identité du parallélogramme), pour montrer

$$I_E \leq E\left(\frac{u_n + u_{n+p}}{2}\right) = \frac{1}{2}E(u_n) + \frac{1}{2}E(u_{n+p}) - \frac{k}{8}\|\partial_x u_n - \partial_x u_{n+p}\|_{L^2}^2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{k}{8}\|\partial_x u_n - \partial_x u_{n+p}\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{2}E(u_n) + \frac{1}{2}E(u_{n+p}) - I_E. \tag{I.10}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $E(u_n)$ tend vers I_E sur $H_0^1(I)$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que

$$\forall n \geq n_0, \ \ |E(u_n) - I_E| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour $n \geq n_0$ et $p \geq 0$, l'inégalité (I.10) fournit

$$\frac{k}{8}\|\partial_x u_n - \partial_x u_{n+p}\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon.$$

Ceci montre bien que $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $H_0^1(I)$, donc elle converge vers une certaine fonction $u \in H_0^1(I)$.

On montre ensuite que $E(u) = \lim_{n\to\infty} E(u_n)$ en passant à la limite dans tous les termes de $E(u_n)$ (dans le premier c'est une conséquence de la convergence H^1 et dans le second c'est la convergence L^2 qui donne le résultat). Autrement dit, on démontre ici la continuité de la fonction E.

Finalement, comme $(u_n)_n$ est une suite minimisante, on a bien $E(u) = I_E$.

On peut maintenant reformuler les équations d'Euler-Lagrange associées à ce problème de minimisation exactement de la façon dont on l'a fait dans la section I.2.c et obtenir

$$u \in H_0^1(I) \ \text{ et vérifie } \ \forall v \in H_0^1(I), \ \ \int_I k\partial_x u \partial_x v\,dx = \int_I fv\,dx. \tag{I.11}$$

Notons que cette formulation variationnelle admet, elle-aussi, une unique solution. En effet, si u_1 et u_2 sont deux telles solutions, alors leur différence $\bar{u} \in H_0^1(I)$ vérifie la même formulation avec terme source nul. En prenant $v = \bar{u}$ dans la formulation, on obtient

$$k\int_I |\partial_x \bar{u}|^2\,dx = 0,$$

ce qui prouve que $\bar{u}$ est une constante qui ne peut être que 0 car $\bar{u}$ est nulle au bord.

Régularité de la solution : Dans le cadre de la dimension 1, il est facile maintenant de démontrer que la solution $u \in H_0^1(I)$ obtenue est suffisament régulière et vérifie le problème de Poisson au sens usuel.

En effet, comme $\mathcal{C}_c^\infty(I) \subset H_0^1(I)$, on peut prendre tous les éléments de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ comme fonctions test dans les équations d'Euler-Lagrange (I.11) pour obtenir

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I), \quad \int_0^1 \partial_x u \varphi' \, dx = \int_0^1 \frac{f}{k} \varphi \, dx.$$

Par définition, ceci montre que $\partial_x u$ est elle-même un élément de l'espace de Sobolev $H^1(I)$ qui admet $-\frac{1}{k} f$ comme dérivée faible dans L^2. On a donc, avec des notations évidentes,

$$\partial_x^2 u = \partial_x(\partial_x u) = -\frac{f}{k},$$

ce qui montre bien que u vérifie l'équation aux dérivées partielles $-k\partial_x^2 u = f$ en un sens faible et bien sûr aussi les conditions aux limites (car u est dans l'espace $H_0^1(I)$ des fonctions nulles au bord).

On peut en dire davantage sur la régularité de u. En effet, comme $\partial_x u \in H^1(I)$, le théorème I.12 nous dit que $\partial_x u \in \mathcal{C}^0(\overline{I})$ (ou en tout cas, admet un représentant continu). Ainsi, la Proposition I.13 montre que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{I}$ et que $u' = \partial_x u$.

Remarque I.20

La solution u ainsi obtenue appartient à l'espace X défini au début de l'analyse, et comme $X \subset H_0^1(I)$, la fonction u réalise aussi le minimum de E sur X :

$$E(u) = \inf_{v \in X} E(v).$$

Néanmoins, bien que u réalise aussi le minimum de E sur X, il faut bien comprendre que l'on ne pouvait pas établir directement cette propriété en travaillant dans X et que l'introduction des espaces de Sobolev pour résoudre ce problème est absolument cruciale !

Jusqu'à présent, on a seulement utilisé le fait que $f \in L^2(I)$. Si maintenant, on fait l'hypothèse supplémentaire que le terme source f est une fonction continue sur $\overline{I}$, on peut aller loin car on a alors

$$\partial_x^2 u = -\frac{f}{k} \in \mathcal{C}^0(\overline{I}).$$

La Proposition I.13 montre à nouveau que $u' = \partial_x u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc u est de classe $\mathcal{C}^2$. Ainsi, la fonction u résout bien le problème aux dérivées partielles suivant, au sens classique :

$$\begin{cases} -ku'' = f, & \text{dans } I \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

III Formulations variationelles de problèmes aux limites linéaires 1D. Théorème de Lax-Milgram

On a vu sur l'exemple de la corde élastique que, en partant d'un problème d'optimisation à résoudre, on peut écrire les équations d'Euler-Lagrange qui caractérisent les points critiques de la fonctionnelle étudiée. Si ces équations ont une solution u, alors on peut essayer d'en déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la solution u ainsi que les conditions aux limites. Cela permet donc de construire une solution d'un problème aux limites.

De façon plus générale, on cherche maintenant à inverser le processus et à établir l'existence et l'unicité de solutions de problèmes aux limites *via* une "formulation variationnelle" même si on verra qu'elle n'est pas nécessairement issue d'un problème de calcul des variations.

III.1 Principe général

On se donne un problème aux limites **linéaire** de la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} Au = f, & \text{posée dans un domaine } \Omega \text{ de } \mathbb{R}^d, \\ & + \text{ conditions aux limites sur } u \text{ ou ces dérivées ...,} \end{cases} \tag{I.12}$$

où f est un terme source. Soit X un espace fonctionnel dans lequel on va chercher la solution u.

On choisit également un espace V de fonctions tests et on multiplie l'équation $Au = f$ par un élément de v qu'on intègre ensuite sur le domaine Ω. Ainsi toute solution éventuelle $u \in X$ va vérifier

$$\int_\Omega Au.v\,dx = \int_\Omega fv\,dx, \quad \forall v \in V. \tag{I.13}$$

On a vu que si V est suffisamment gros (s'il contient les fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ par exemple) alors le Lemme I.5 permettra de remonter de la formulation (I.13) à (I.12).

Maintenant, on intègre par parties le membre de droite (ou pas, plusieurs choix sont possibles ici) pour mettre ce problème sous la forme suivante

$$\int_\Omega (B_1 u).(B_2 v)\,dx = \int_\Omega fv\,dx + \cdots \text{termes de bord éventuels}, \quad \forall v \in V. \tag{I.14}$$

Le but du jeu est de faire en sorte que ces équations aient une solution unique et que l'on puisse ensuite montrer que l'on a bien résolu le problème initial. Il s'agit donc de bien choisir :

— L'espace des solutions X.

— L'espace des fonctions test V.

— La forme exacte des intégrations par parties, c'est-à-dire des opérateurs B_1 et B_2 obtenus à partir de l'opérateur de départ.

Notons qu'un même problème aux limites peut avoir plusieurs formulations variationnelles de la forme (I.14). Dans les cas usuels qu'on verra par la suite il y a souvent un choix *naturel*.

Pour choisir ces objets, il faut se raccrocher à un résultat abstrait permettant ensuite d'assurer l'existence de la solution au problème variationnel (I.14). On observe que les équations de (I.14) comportent des termes de deux types : des termes bilinéaires en (u, v), qui sont les termes principaux, et des termes linéaires en v, qui correspondent aux termes sources et éventuellement aux termes de bord.

Voici le résultat fondamental de cette théorie dont nous verrons la preuve dans le dernier paragraphe du chapitre.

Théorème I.21 (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire sur H, L une forme linéaire sur H. On suppose que

1. *a est continue :*
$$\forall u, v \in H, \quad |a(u, v)| \leq \|a\|\|u\|_H\|v\|_H.$$
2. *a est coercive : il existe $\alpha > 0$ tel que*
$$\forall u \in H, \quad a(u, u) \geq \alpha\|u\|_H^2.$$
3. *L est continue :*
$$\forall u \in H, \quad |L(u)| \leq \|L\|\|u\|_H.$$

Alors, il **existe** *un* **unique** *u dans H qui vérifie*

$$\forall v \in H, \quad a(u, v) = L(v), \tag{I.15}$$

et celui-ci vérifie

$$\|u\|_H \leq \frac{\|L\|}{\alpha}.$$

Si de plus a est symétrique, alors u est aussi l'unique élément de H qui minimise la fonctionnelle

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v).$$

Ce théorème donne des conditions suffisantes de résolubilité d'un jeu d'équations de la forme (I.15). Insistons sur le fait que ce ne sont pas des conditions suffisantes. Il existe un résultat du même type donnant des conditions nécessaires et suffisantes d'existence et unicité (y compris dans des espaces de Banach) mais il sort du cadre de ce cours.

Si on veut pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram dans le cadre abstrait introduit précédemment on voit donc qu'il va falloir :

— Choisir les mêmes espaces $X = V$ et prendre un espace de Hilbert, noté dorénavant H.

— Poser (en oubliant pour l'instant les termes de bord qui selon les cas interviennent ou bien dans a ou bien dans L)

$$a(u,v) = \int_\Omega (B_1 u).(B_2 v)\,dx,\ \forall u,v \in H,$$

$$L(v) = \int_\Omega f v\,dx,\ \ \forall u,v \in H.$$

— Pour assurer que ces objets soient bien définis et continus sur H il faut typiquement que B_1 et B_2 soient bien définis et continus sur H à valeurs dans $L^2(I)$. Si on imagine que B_1 et B_2 sont des opérateurs différentiels du premier ordre, il faudra donc que H contienne au moins l'espace de Sobolev H^1.

— Pour assurer les coercivité de a, il faut que

$$a(u,u) = \int_\Omega (B_1 u).(B_2 u)\,dx \geq \alpha \|u\|_H^2,$$

ceci montre que la norme de H doit être controlée par la quantité $a(u,u)$ donc il ne faut pas que cette norme contienne plus de dérivées que ce que B_1 et B_2 n'en contiennent.

En résumé, si on se restreint aux problèmes aux limites du second ordre, en dimension 1 pour l'instant. On voit qu'on va pouvoir systématiquement choisir pour H un sous-espace fermé de l'espace $H^1(I)$. Celui-ci dépendra notamment des conditions aux limites choisies. Le fait qu'il soit fermé est indispensable pour qu'il soit lui-même un espace de Hilbert.

III.2 Exemples

III.2.a Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet

Soit $I = [0,1]$. On se donne une fonction $k : I \to \mathbb{R}$ mesurable positive, bornée et telle que $\alpha = \inf_I k > 0$ et un terme source $f \in L^2(I)$.

On considère le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & x \in I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{I.16}$$

Ce n'est autre que le problème de la corde élastique déjà étudié plus haut que l'on va reprendre avec l'éclairage nouveau ci-dessus.

Le cadre fonctionnel adéquat est $H = H_0^1(I)$ et on pose

$$a(u,v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v)\,dx,$$

et

$$L(v) = \int_I f(x) v\,dx.$$

L'espace H est bien complet, la forme bilinéaire a est continue sur H car k est bornée et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|a(u,v)| \leq \|k\|_\infty \|\partial_x u\|_{L^2} \|\partial_x v\|_{L^2} \leq \|k\|_\infty \|u\|_H \|v\|_H.$$

De même, on trouve

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_H.$$

Pour la coercivité de a, on utilise les hypothèses sur k pour obtenir

$$a(u,u) = \int_I k|\partial_x u|^2\,dx \geq \alpha \|\partial_x u\|_{L^2}^2,$$

et d'après l'inégalité de Poincaré (Proposition I.16 et son Corollaire I.17), on obtient bien

$$a(u,u) \geq C\|u\|_H^2.$$

Les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont donc vérifiées et on peut en déduire l'existence et l'unicité d'une solution $u \in H$ de la formulation variationnelle.

Conditions aux limites non homogènes Essayons maintenant de résoudre le même problème mais avec des données au bord non nulles. Les conditions aux limites sont donc de même nature (Dirichlet) mais sont non-homogènes. On se donne deux valeurs $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ et on s'intéresse à

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), \quad x \in I, \\ u(0) = u_0, \\ u(1) = u_1. \end{cases} \tag{I.17}$$

Il est clair que cette fois, on ne peut pas chercher $u \in H_0^1(I)$ car sinon elle serait nulle au bord. On va donc *relever* les conditions aux limites de la façon suivante :

On prend une fonction $R : I \to \mathbb{R}$ (comme *relèvement*) suffisamment régulière mais quelconque, qui vérifie

$$R(0) = u_0, \;\; R(1) = u_1.$$

L'idée est alors de chercher u sous la forme $u = R + w$ avec cette fois w qui est nulle au bord. Ecrivons l'équation satisfaite par w

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x w) = f + \partial_x(k(x)\partial_x R), \quad x \in I, \\ w(0) = w(1) = 0. \end{cases}$$

C'est donc un problème de Poisson avec conditions homogène et le nouveau terme source

$$\tilde{f} = f + \partial_x(k(x)\partial_x R).$$

On a choisi R régulière, donc $\partial_x R$ est également régulière.

— Si k est régulière, la fonction $\tilde{f}$ est bien définie et appartient à L^2 donc l'existence et l'unicité de $w \in H_0^1$ solution du problème ci-dessus est conséquence de l'analyse du cas homogène. On en déduit donc l'existence et unicité de la solution $u \in H^1$ du problème initial.

— Si par contre on ne suppose pas de régularité particulière de k (si k est discontinue par exemple), la fonction $\tilde{f}$ n'est peut-être pas bien définie ... l'idée est alors d'intégrer par parties le terme gênant dans la définition de la forme linéaire L.
  Plus précisément, au lieu de définir $L(v) = \int_I \tilde{f} v \, dx$, on va poser

  $$L(v) = \int_I fv \, dx - \int_I k(x)\partial_x R \partial_x v \, dx.$$

  On vérifie aisément que L est linéaire continue sur H et on peut à nouveau appliquer le théorème de Lax-Milgram à ce nouveau cadre et ainsi obtenir l'existence et unicité de la solution $w \in H_0^1$ du problème

  $$\int_I k(x)\partial_x w \partial_x v \, dx = \int_I fv \, dx - \int_I k(x)\partial_x R \partial_x v \, dx, \;\; \forall v \in H_0^1,$$

  ce qui s'écrit encore

  $$\int_I k(x)\partial_x(w + R)\partial_x v \, dx = \int_I fv \, dx, \;\; \forall v \in H_0^1,$$

  et donne donc la solution $u = w + R$.

III.2.b Ajout d'un terme de réaction linéaire

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on se donne maintenant un nombre réel $\gamma \in \mathbb{R}$ quelconque et on s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) + \gamma u = f(x), \quad x \in I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{I.18}$$

On peut reproduire le formalisme précédent en posant $H = H_0^1(I)$,

$$a(u, v) = \int_I k(x)(\partial_x u)(\partial_x v) \, dx + \gamma \int_I uv \, dx,$$

$$L(v) = \int_I fv \, dx.$$

Toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram sont clairement vérifiées sauf peut-être la coercivité de a. En effet, on calcule aisément que

$$a(u, u) = \int_I k|\partial_x u|^2 \, dx + \gamma \int_I |u|^2 \, dx.$$

— Si $\gamma \geq 0$, alors le second terme est positif ou nul et on peut donc à nouveau minorer $a(u, u)$ par $\|u\|_H^2$ à une constante multiplicative près.

— Si $\gamma < 0$, le second terme a le mauvais signe et il est donc nécessaire de le contrôler. Nous verrons en TD une étude un peu plus poussée de ces questions.
On peut déjà remarquer que si γ est "trop" négatif alors a n'est pas coercive. En effet, pour $\bar{u} \in H_0^1(I)$ quelconque non nul, on peut toujours trouver un $\gamma < 0$ tel que

$$a(\bar{u}, \bar{u}) = \int_I k|\partial_x \bar{u}|^2 \, dx + \gamma \int_I |\bar{u}|^2 \, dx < 0,$$

ce qui implique la non coercivité de a.

III.2.c Problème de convection-diffusion avec conditions de Dirichlet

Considérons maintenant le problème au bord suivant

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u + \partial_x u = f(x), & x \in I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{I.19}$$

Par rapport au problème de Poisson vu plus haut, on a ajouté un terme d'ordre 1 dit *de convection* ou de *de transport*. Celui-ci étant d'ordre inférieur au terme principal, on peut conserver l'espace fonctionnel $H = H_0^1(I)$ comme espace de travail et adopter la formulation faible suivante

$$a(u, v) = \int_0^1 (\partial_x u)(\partial_x v) \, dx + \int_0^1 (\partial_x u) v \, dx,$$

$$L(v) = \int_0^1 f v \, dx.$$

Là encore la continuité de a et L sur H ne fait aucun doute ; étudions la coercivité de a. Pour $u \in H$, nous avons

$$a(u, u) = \int_0^1 |\partial_x u|^2 \, dx + \int_0^1 (\partial_x u) u \, dx.$$

A priori le second terme n'a pas de signe clair et cela peut donc poser un problème. En réalité, on va voir que ce terme est nul. En effet, nous savons que (voir l'exercice 4 ou l'exercice 5 du TD1) $u^2 \in H_0^1(I)$ et que $\partial_x(u^2) = 2u\partial_x u$ de sorte que

$$\int_0^1 (\partial_x u) u = \frac{1}{2} \int_0^1 \partial_x(u^2) \, dx = \frac{1}{2} u^2(1) - \frac{1}{2} u^2(0) = 0.$$

Il s'en suit que a est coercive et donc que l'on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram. La fin de l'histoire est la même que pour le problème de Dirichlet : on prend $v = \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ dans la formulation faible,

$$\int_0^1 \partial_x u \partial_x \varphi \, dx = \int_0^1 (f - \partial_x u) \varphi \, dx.$$

Comme $f \in L^2$ et $\partial_x u \in L^2$, on en déduit que $\partial_x u$ est en fait dans $H^1(I)$ et qu'elle vérifie, au sens faible.

$$\partial_x(\partial_x u) = -(f - \partial_x u).$$

Si maintenant on suppose que $f \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$, sachant que $\partial_x u \in \mathcal{C}^0(\bar{I})$ d'après le Corollaire I.14, nous obtenons que $\partial_x(\partial_x u)$ est continue et donc $\partial_x u \in \mathcal{C}^1(\bar{I})$ et donc $u \in \mathcal{C}^2(\bar{I})$. Ainsi la fonction u ainsi construite est bien une solution au sens usuel du problème (I.19).

Remarque I.22

Dans ce cas précis, la forme bilinéaire a n'est pas symétrique sur H (s'en convaincre !) et donc, bien que l'on parle encore de méthode variationnelle, il faut bien comprendre que ce problème n'est pas issu d'un problème de minimisation d'une fonctionnelle !

Dans l'analyse précédente, on a bénéficié d'un *miracle* lié à l'annulation du terme nouveau dans l'estimation de coercivité. On va voir que, malheureusement, ceci n'est pas toujours vrai. Considérons par exemple le problème suivant Considérons maintenant le problème au bord suivant

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u + b(x)\partial_x u = f(x), & x \in I, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{I.20}$$

où $b : \overline{I} \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière donnée. La forme bilinéaire associée à ce problème s'écrit (l'espace H et la forme linéaire L restant inchangés)

$$a(u,v) = \int_0^1 (\partial_x u)(\partial_x v)\,dx + \int_0^1 b(x)(\partial_x u)v\,dx,$$

et le calcul de coercivité devient

$$a(u,u) = \int_0^1 |\partial_x u|^2\,dx + \int_0^1 b(x)(\partial_x u)u\,dx.$$

On peut, par exemple, intégrer par parties le second terme et obtenir

$$\int_0^1 b(x)(\partial_x u)u\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 b(x)\partial_x(u^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 b'(x)u^2\,dx.$$

On observe que ce terme n'est plus nul et peut donc poser problème. Regardons quelques exemples :

— Si b est décroissante, alors le terme en question est positif ou nul et on a donc

$$a(u,u) \geq \int_0^1 |\partial_x u|^2\,dx \geq C\|u\|_H^2,$$

et le théorème de Lax-Milgram s'applique.

— Si b est de la forme $b(x) = -\gamma x$ alors on a

$$a(u,u) = \int_0^1 |\partial_x u|^2\,dx + \frac{\gamma}{2}\int_0^1 u^2\,dx.$$

Comme on l'a vu plus haut, pour γ suffisamment négatif, cette quantité peut devenir négative et ainsi on ne peut pas appliquer le théorème de Lax-Milgram.

— Supposons maintenant que b est "petite" en un sens qui sera précisé ci-dessous. On peut donc écrire avec Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_0^1 b(x)(\partial_x u)u\,dx\right| \leq \|b\|_\infty \|\partial_x u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$$

puis en utilisant l'inégalité de Poincaré (Proposition I.16)

$$\left|\int_0^1 b(x)(\partial_x u)u\,dx\right| \leq \|b\|_\infty \|\partial_x u\|_{L^2}^2,$$

de sorte que

$$a(u,u) \geq (1 - \|b\|_\infty)\|\partial_x u\|_{L^2}^2.$$

Ainsi, on vient de montrer que si $\|b\|_\infty < 1$ alors la forme bilinéaire a est coercive et toute la théorie peut se dérouler sans soucis.

— Remarquons que les deux cas dans lesquels nous avons pu appliquer le théorème de Lax-Milgram sont réellement différents :

  — Cas 1 : b est décroissante mais elle peut être aussi grande que l'on veut.

  — Cas 2 : b est petite mais sans aucune hypothèse de monotonie.

Concluons cette discussion en mentionnant que, bien que le théorème de Lax-Milgram ne s'applique pas toujours pour ce problème, il est possible de montrer l'existence d'une solution pour n'importe quelle fonction b mais cela utilise d'autres techniques qui dépassent le cadre de ce cours. Il faut seulement retenir que le théorème de Lax-Milgram, s'il est très utile, ne fonctionne pas à tous les coups.

III.2.d Conditions aux limites de Neumann

Les conditions de Neumann consistent à imposer les valeurs des dérivées de la solution au bord du domaine, plutôt que de la solution elle-même. Ainsi, dans le modèle de la corde élastique par exemple, imposer $\partial_x u(0) = 0$ revient à dire que les forces de tension à l'extrémité gauche de la corde sont nulles ou encore que la corde est fixée sur un axe vertical sur lequel elle peut glisser librement (sans frottement).

Le cas mixte Dirichlet-Neumann Essayons donc de résoudre le nouveau problème suivant

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u = f(x), \quad x \in I, \\ \partial_x u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases} \tag{I.21}$$

On commence par supposer l'existence d'une solution u assez régulière puis par prendre une fonction test v (suffisamment régulière pour l'instant et sans préciser l'espace dans lequel elle vit). On multiplie l'équation par v, on intègre et on essaie de le mettre sous une forme du type "Lax-Milgram".

$$\begin{aligned} \int_0^1 fv\,dx &= \int_0^1 (-\partial_x^2 u)v\,dx \\ &= [-(\partial_x u)v]_0^1 + \int_0^1 (\partial_x u)(\partial_x v)\,dx \\ &= (\partial_x u)(0)v(0) - (\partial_x u)(1)v(1) + \int_0^1 (\partial_x u)(\partial_x v)\,dx. \end{aligned}$$

Observons les termes de bord. Le premier doit être nul car on demande que $\partial_x u(0) = 0$ (du coup la valeur de $v(0)$ n'a aucune importance dans ce calcul). Le second n'a *a priori* aucune raison d'être nul. En revanche, on se souvient que, pour faire fonctionner le théorème de Lax-Milgram, il faut que la solution u et les fonctions test v habitent dans le même espace. Ainsi, comme on veut que $u(1) = 0$ (et que cette condition va être directement prise en compte dans la définition de l'espace fonctionnel) on va aussi se restreindre à des fonctions test vérifiant $v(1) = 0$, ce qui va donc faire *disparaitre* le second terme de bord.

Résumons : on va prendre

$$H = \{v \in H^1(I), \;\; v(1) = 0\},$$

$$a(u,v) = \int_0^1 (\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \;\; \forall u, v \in H,$$

$$L(v) = \int_0^1 fv\,dx.$$

Attention : Il peut sembler que a et L sont les mêmes formes (bi-)linéaires que dans le cas de conditions de Dirichlet mais il n'en est rien car elles ne sont pas définies sur lemême espaces.

On observe que H est un sous-espace fermé de H^1 (donc un Hilbert), et que a et L sont continues sur H. Encore une fois il reste à étudier la coercivité de a. Comme précédemment nous avons

$$a(u,u) = \int_0^1 |\partial_x u|^2\,dx,$$

mais comme nous ne sommes plus sur l'espace $H_0^1(I)$, nous ne savons pas si on peut utiliser l'inégalité de Poincaré pour contrôler toute la norme H^1 par ce terme. En réalité, on peut le faire à bon droit car, si on reprend la même preuve que dans la Proposition I.16, on peut montrer que

$$\|u\|_{L^2} \leq \|\partial_x u\|_{L^2}, \;\; \forall u \in H.$$

Autrement dit, l'inégalité de Poincaré est vraie aussi pour les fonctions ne s'annulant qu'en un des deux points du bord.

Au final, on a donc montré que a est coercive, et le théorème de Lax-Milgram nous donne donc l'existence et unicité d'une solution $u \in H$ du problème

$$a(u,v) = L(v), \;\; \forall v \in H.$$

Qu'avons nous résolu ? Pour l'instant nous savons que $u \in H^1(I)$ et que $u(1) = 0$ car c'est la définition de H. Il reste à montrer que u vérifie l'EDP et la seconde condition aux limites. Nous avons encore $\mathcal{C}_c^\infty(I) \subset H$ et donc nous pouvons prendre $v = \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ comme fonction test dans la formulation variationnelle. C'est exactement le même calcul que précédemment. Il nous montre que $\partial_x u$ est en fait une fonction de $H^1(I)$ dont la dérivée faible vaut f. En particulier $\partial_x u$ est continue.

Prenons maintenant $v \in H$ quelconque et calculons en intégrant par parties (voir l'exercice 4 du TD1)

$$\begin{aligned} -\int_0^1 fv\,dx &= \int_0^1 \partial_x(\partial_x u)v\,dx \\ &= [(\partial_x u)v]_0^1 - \int_0^1 \partial_x u \partial_x v\,dx. \end{aligned}$$

Comme $v(1) = 0$, la formule ci-dessus s'écrit

$$a(u,v) - L(v) = (\partial_x u)(0)v(0),$$

et doit être vérifiée pour tous les $v \in H$. Mais on sait, par la définition de la formulation variationnelle vérifiée par u, que le membre de gauche de l'égalité est nul pour tout $v \in H$. On a donc finalement montré que

$$(\partial_x u)(0)v(0) = 0, \ \ \forall v \in H.$$

Comme H contient des fonctions non nulles en 0 (par exemple $v(x) = 1 - x$) on conclut que

$$\partial_x u(0) = 0,$$

et le problème initial est bien résolu.

Le cas Neumann partout Que se passe-t'il si on impose une condition de Neumann aux deux bords de l'intervalle.

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u = f(x), & x \in I, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0. \end{cases}$$

Deux remarques importantes sont nécessaires :

— La solution n'intervient que par l'intermédiaire de sa dérivée dans le problème, ce qui montre que si u est solution, alors $u + c$ est solution pour tout $c \in \mathbb{R}$. Il ne peut donc en aucun cas y avoir unicité de la solution (si elle existe).

  Pour "fixer" la constante c, on est souvent amenés à imposer une condition supplémentaire, par exemple le fait que u doit être d'intégrale nulle (i.e. de moyenne nulle).

— S'il existe une solution, on peut intégrer l'équation sur l'intervalle I et on trouve

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (-\partial_x^2 u)\,dx = \partial_x u(0) - \partial_x u(1) = 0.$$

  Donc, il ne peut y avoir de solution que pour les termes sources de moyenne nulle. On parle de condition de compatibilité entre le terme source et les conditions au bord.

On peut donc maintenant préciser les choses et considérer le problème complet suivant

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u = f(x), & x \in I, \\ \partial_x u(0) = \partial_x u(1) = 0, \\ \displaystyle\int_0^1 u\,dx = 0, \end{cases} \tag{I.22}$$

sous l'hypothèse

$$\int_0^1 f\,dx = 0. \tag{I.23}$$

L'expérience des exemples précédents nous montre que les conditions aux limites de Neumann ne doivent pas apparaître dans la définition de l'espace fonctionnel [3]. En revanche, il semble naturel d'imposer "en dur" la contrainte de moyenne nulle (bien qu'on puisse faire autrement, voir l'exercice 9 du TD1).

On va donc introduire l'espace des fonctions à moyenne nulle, $H = H^1_m(I)$ où

$$H^1_m(I) = \{v \in H^1(I),\ m(v) = 0\}, \ \ \text{ou on a noté } m(v) = \int_0^1 v\,dx.$$

C'est un sous-espace fermé de $H^1(I)$ et donc un Hilbert.

Posons

$$a(u,v) = \int_0^1 (\partial_x u)(\partial_x v)\,dx, \quad L(v) = \int_0^1 fv\,dx.$$

Encore une fois, c'est la coercivité de a qui peut poser soucis. On a à nouveau

$$a(u,u) = \int_0^1 |\partial_x u|^2\,dx,$$

3. D'ailleurs pour une fonction quelconque de H^1, la valeur de $\partial_x u(0)$ n'est pas bien définie...

et on a donc besoin d'une inégalité de type Poincaré. Il se trouve que cette inégalité est vraie (voir aussi l'exercice 6 du TD1)

Proposition I.23 (inégalité de Poincaré-moyenne ou de Poincaré-Wirtinger)

Il existe $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^2} \leq C\|\partial_x u\|_{L^2}, \ \ \forall u \in H^1_m.$$

Preuve :

Pour $s, t \in I$, on écrit

$$u(t) = u(s) + \int_s^t \partial_x u(x)\, dx,$$

puis on intègre cette égalité par rapport à s pour pouvoir utiliser la condition de moyenne nulle sur u

$$u(t) = \underbrace{\int_0^1 u(s)\, ds}_{=m(u)=0} + \int_0^1 \left(\int_s^t \partial_x u\, dx\right)\, ds.$$

On a donc, pour tout t,

$$|u(t)| \leq \int_0^1 \left|\int_s^t |\partial_x u|\, dx\right|\, ds \leq \int_0^1 |\partial_x u|\, dx \leq \|\partial_x u\|_{L^2}.$$

On élève au carré et on intègre par rapport à t pour trouver le résultat. ■

D'après cette inégalité, la forme a est donc coercive sur H^1_m et le théorème de Lax-Milgram nous fournit l'existence et unicité d'une solution $u \in H^1_m$ de

$$a(u, v) = L(v), \ \ \forall v \in H^1_m.$$

Pour l'instant nous savons que $u \in H^1$ et qu'elle est à moyenne nulle. Il nous faut montrer qu'elle vérifie l'EDP et les conditions aux limites.

Nous sommes confrontés ici à une nouvelle difficulté liée au fait que les éléments de $\mathcal{C}^\infty_c(I)$ ne sont pas tous dans H^1_m car ils ne sont pas tous à moyenne nulle ! On ne peut donc pas prendre $v = \varphi$ dans la formulation variationnelle sans prendre garde. On peut par contre prendre $v = \varphi - m(\varphi)$ qui est bien un élément de H^1_m et ainsi écrire

$$a(u, \varphi - m(\varphi)) = L(\varphi - m(\varphi)), \ \ \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I).$$

Comme la dérivée faible des constantes est nulle, cette formule s'écrit

$$\int_0^1 \partial_x u \partial_x \varphi\, dx = \int_0^1 f(\varphi - m(\varphi))\, dx.$$

Le second membre peut aussi s'écrire

$$\int_0^1 f\varphi\, dx - m(\varphi)\int_0^1 f\, dx = \int_0^1 f\varphi\, dx,$$

grâce à l'hypothèse de compatibilité (I.23). Au final, on a bien établi que

$$\int_0^1 \partial_x u \partial_x \varphi\, dx = \int_0^1 f\varphi\, dx, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(I).$$

De façon maintenant habituelle ceci montre que u est solution de l'EDP au sens faible.

On prend alors n'importe quelle fonction test $v \in H^1_m$ que l'on test contre l'équation. En utilisant la formulation variationnelle résolue plus haut on trouve in fine

$$(\partial_x u)(0)v(0) - (\partial_x u)(1)v(1) = 0, \ \ \forall v \in H^1_m.$$

On choisit alors n'importe quelle fonction v telle que $v(0) = 0$, $v(1) = 1$ et $\int_0^1 v\, dx = 0$ pour en déduire que $\partial_x u(1) = 0$ puis n'importe quelle fonction telle que $v(0) = 1$, $v(1) = 0$ et $\int_0^1 v\, dx = 0$ pour obtenir $\partial_x u(0) = 0$.

On a bien résolu le problème de Neumann initial.

IV Preuve du théorème de Lax-Milgram

Il s'agit ici de démontrer le théorème I.21. Le cas symétrique peut se traiter de deux façons (très proches en réalité) :

Preuve 1 : on introduit directement la fonctionnelle J de l'énoncé et on y applique exactement la même analyse que pour le cas de la corde élastique :

1. On montre que J est minorée (on utilise la continuité de L et la coercivité de a).
2. On prend une suite minimisante $(u_n)_n$.
3. On démontre que $(u_n)_n$ est de Cauchy en utilisant l'identité du parallèlogrammme pour la forme bilinéaire a et la coercivité de a.
4. On en déduit que $(u_n)_n$ converge vers une limite $u \in H$ (on utilise la complétude de H).
5. On montre que $J(u) = \inf_H J$, on utilise la continuité de L et a.
6. Enfin, on écrit que $J(u+tv) \geq J(u)$ pour tout $v \in H$ et $t \in \mathbb{R}$ et on en déduit les équations d'Euler-Lagrange du problème qui sont exactement les équations recherchées.

Preuve 2 : Comme a est symétrique et coercive (en particulier définie positive), c'est un produit scalaire sur H, qui possède donc maintenant deux produits scalaires. Par continuité et coercivité, la norme induite par le produit scalaire a est équivalent à la norme initiale. Ainsi L est continue aussi dans H muni de ce nouveau produit scalaire.

On peut donc appliquer le théorème de représentation de Riesz dans ce nouvel espace et obtenir immédiatement le résultat.

Intéressons-nous au cas non-symétrique qui est un peu plus délicat et ne peut en aucun cas se prouver par une méthode de type *variationnel*. Il nous faut pour cela introduire une reformulation du problème sous la forme d'un opérateur dont on doit montrer l'inversibilité.

Constatons que pour tout $u \in H$, la forme linéaire $v \in H \mapsto a(u,v)$ est continue et donc il existe un unique $Au \in H$ tel que $a(u,v) = (Au, v)_H$, par application du théorème de représentation de Riesz. Il est clair que le A ainsi construit est un opérateur linéaire.

Par hypothèse sur a, on a $\forall u \in H, \|Au\|_H \leq \|\|a\|\| \|u\|_H$ et donc A est un opérateur continu. Par ailleurs, on a

$$(Au, u)_H = a(u,u) \geq \alpha \|u\|_H^2, \ \ \forall u \in H,$$

donc

$$\|Au\|_H \geq \alpha \|u\|_H, \ \forall u \in H.$$

Ceci implique en particulier que A est injectif. D'après le théorème de Riesz, on peut représenter L par un élément $l \in H$ et on est maintenant amenés à prouver qu'il existe un $u \in H$ tel que $Au = l$.

Soit $\rho > 0$, on introduit l'application $T : u \in H \mapsto Tu = u - \rho(Au - l)$ et on voit que notre problème se ramène à l'existence d'un point fixe pour T. Dans un espace de Hilbert, le résultat sera montré si on prouve que T est contractante. Pour cela, on mène le calcul suivant

$$\begin{aligned}
\|Tu - Tv\|_H^2 &= \|u - v\|_H^2 + \rho^2 \|Au - Av\|_H^2 - 2\rho(u - v, A(u - v))_H \\
&\leq \|u - v\|_H^2 + \rho^2 \|\|a\|\|^2 \|u - v\|_H^2 - 2\rho\alpha \|u - v\|_H^2 \\
&= (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 \|\|a\|\|^2) \|u - v\|_H^2.
\end{aligned}$$

En choisissant ρ suffisamment petit, et comme $\alpha > 0$, on voit que T est bien contractante et le résultat est démontré.

Chapitre II

Eléments de la théorie des distributions

Le but du chapitre est d'introduire la "bonne" théorie qui permet (entre autres) de travailler avec des notions de dérivées faibles de façon extrêmement confortable et plus générale que ce qu'on a vu plus haut. Il n'est pas question de traiter la théorie complète mais seulement les principales définitions et propriétés qui sont indispensables à l'étude de toutes les équations aux dérivées partielles, y compris à leur analyse numérique.

I Intégration par parties en dimension d : le cas des fonctions à support compact

On souhaite désormais disposer d'une formule d'intégration par parties pour les fonctions de plusieurs variables qui ressemble à celle que l'on connaît pour les fonctions d'une variable.

Commençons par rappeler ce qui fait marcher le calcul en dimension 1 pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier mais à support compact.

1. On montre que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ on a
$$\int_{\mathbb{R}} f'(x)\, dx = 0. \tag{II.1}$$
2. On utilise que pour toutes fonctions $u, v \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ on a
$$(uv)' = u'v + uv'.$$
3. On applique la première formule à $f = uv$ en supposant que l'une des deux fonctions u ou v (éventuellement les deux) est à support compact. Ainsi f est à support compact et on a
$$0 = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\, dx,$$
ce qui fournit
$$\int_{\mathbb{R}} u'(x)v(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}} u(x)v'(x)\, dx,$$
ce qui est bien une intégration par parties pour des fonctions à support compact.

Essayons le même processus pour les fonctions de plusieurs variables réelles. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

Définition II.1

Pour toute fonction scalaire $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et tout champ de vecteurs $F \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^d)$ on définit

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} u \\ \vdots \\ \partial_{x_d} u \end{pmatrix},$$

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}^2 u,$$

$$\mathit{div}\, F = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} F_i.$$

Proposition II.2 (Quelques formules utiles)

$$div\,(uF) = F\cdot(\nabla u) + (div\,u)F, \tag{II.2}$$
$$\Delta u = div\,\big(\nabla u\big).$$

Proposition II.3 (Intégration par parties)

1. *Soit $F\in\mathcal{C}^1_c(\Omega,\mathbb{R}^d)$ un champ de vecteurs à support compact, alors on a*
$$\int_\Omega div\,F\,dx = 0.$$
2. *Soient $u\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ et $V\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^d)$ tels que u ou V soit à support compact, alors on a*
$$\int_\Omega u(div\,V)\,dx = -\int_\Omega(\nabla u)\cdot V\,dx.$$
3. *Soient $u,v\in\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ tels que u ou v soit à support compact, alors on a*
$$\int_\Omega u(-\Delta v)\,dx = \int_\Omega(\nabla u)\cdot(\nabla v)\,dx = \int_\Omega(-\Delta u)v\,dx.$$

Preuve :

On se contente de montrer le cas $\Omega=\mathbb{R}^d$. En effet dans le cas général, au moins l'une des fonctions an jeu est à support compact dans Ω et on peut donc la prolonger par 0 à l'espace entier sans changer son caractère $\mathcal{C}^1$ et ainsi se ramener au cas de l'espace entier.

1. Par définition nous avons div $F=\sum_{i=1}^d\partial_{x_i}F_i$, on peut donc s'intéresser à l'un quelconque des termes et voir que par le théorème de Fubini on a
$$\int_{\mathbb{R}^d}\partial_{x_i}F_i\,dx = \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\partial_{x_i}F_i\,dx_1\,\cdots dx_d = \int_{\mathbb{R}}\cdots\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\partial_{x_i}F_i\,dx_i\right)dx_1\,\cdots\widehat{dx_i}\cdots\,dx_d,$$
et d'après (II.1) l'intégrale par rapport à x_i est nulle pour tout $x_1,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_d$.
2. On applique le résultat ci-dessus au produit $F=uV$ et on utilise la formule (II.2) pour en déduire
$$0=\int_{\mathbb{R}^d}\text{div }(uV)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}u(\text{div }V)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d}(\nabla u)\cdot V\,dx.$$
3. Il suffit d'appliquer la formule ci-dessus avec $V=\nabla v$ par exemple et remarquer ensuite que u et v jouent des rôles symétriques.

■

On détaille dans l'annexe ce qu'il convient de faire pour pouvoir "intégrer par parties" quand les fonctions en jeu ne sont plus à support compact. Le résultat à retenir est que
$$\int_\Omega\text{div }F\,dx = \int_{\partial\Omega}F\cdot n\,d\sigma,$$
où n désigne la normale unitaire sortante à Ω et $\int_{\partial\Omega}$ est l'intégrale de surface. Ces objets sont définis en annexe et nécessitent un peu de régularité du bord du domaine Ω, qui ne peut donc pas être un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$.

II Espace des fonctions test. Espace des distributions.

Notation

- Un d-uplet d'entiers positifs $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$ est appelé un multi-index.
- L'entier $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_d$ est la longueur du multi-index.
- Pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^d$ et toute fonction f suffisamment dérivable on définit la dérivée partielle
$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}}f.$$

Ces notations permettent souvent d'écrire de façon plus compacte des formules assez lourdes. [1]

II.1 Définitions, exemples

On a déjà utilisé l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans le premier chapitre. Cet ensemble va jouer un rôle très important dans la suite et dorénavant, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, on va noter

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),\ \text{ il existe un compact } K \subset \Omega \text{ tel que } f = 0 \text{ sur } K^c\}.$$

On prendra garde au fait que le compact K qui intervient dans cette définition dépend bien sûr de la fonction f considérée. On définira ainsi

$$\operatorname{Supp}\varphi = \text{Le plus petit compact } K \text{ tel que } \varphi = 0 \text{ sur } K^c.$$

Il est utile de comprendre que de telles fonctions existent et qu'on peut en fabriquer aisément qui vérifient de bonnes propriétés.

Lemme II.4 (Construction de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact)

1. *La fonction numérique définie par*

$$\eta : s \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} e^{-1/s^2}, & \text{si } s > 0, \\ 0, & \text{si } s < 0, \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. *Soient $a < b$, la fonction $\xi_{a,b}$ définie par*

$$\xi_{a,b}(s) = \frac{\eta(s-a)}{\eta(s-a) + \eta(b-s)}, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\xi_{a,b}(s) \begin{cases} = 0, & \text{si } s \leq a, \\ \in]0,1[, & \text{si } a < s < b, \\ = 1, & \text{si } s \geq b. \end{cases}$$

3. *Soit $a < \alpha < \beta < b$, la fonction $\varphi_{a,\alpha,\beta,b}$ définie par*

$$\varphi_{a,\alpha,\beta,b}(s) = \eta_{a,\alpha}(s)(1 - \eta_{\beta,b}(s)), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\varphi_{a,\alpha,\beta,b} = 0, \text{ en dehors de } [a,b],$$

$$\varphi_{a,\alpha,\beta,b} = 1, \text{ dans } [\alpha,\beta].$$

4. *Soient U, V deux ouverts non vides de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\overline{U} \subset V$ et tel que U est borné. Alors, il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ telle que*

$$\varphi = 1, \text{ dans } U, \text{ et } \varphi = 0, \text{ en dehors de } V.$$

Preuve :

1. Il est clair que η est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 0[$ (toutes ses dérivées y sont nulles !) et sur $]0, +\infty[$. Il reste donc à montrer que toutes les dérivées à droite en 0 se raccordent avec les dérivées à gauche (autrement dit : sont nulles). Pour cela, on établit par récurrence que

$$\forall k \geq 0, \exists P_k \in \mathbb{R}[X], \text{ tel que } \eta^{(k)}(s) = P_k(1/s)\eta(s), \quad \forall s > 0. \tag{II.3}$$

Le cas $k = 0$ est immédiat, et le cas $k = 1$ donne

$$\eta'(s) = \frac{2}{s^3}e^{-1/s^2} = P_1(1/s)\eta(s),$$

1. Voir par exemple : https://fr.wikipedia.org/wiki/Multi-indice

avec $P_1(X) = 2X^3$.
Si on suppose maintenant le résultat vrai au rang k, on calcule la dérivée $(k+1)$-ième

$$\begin{aligned}\eta^{(k+1)}(s) &= (\eta^{(k)})'(s)\\ &= \frac{d}{ds}\left(P_k(1/s)\eta(s)\right)\\ &= \left(-\frac{1}{s^2}P_k'(s) + P_k(1/s)P_1(1/s)\right)\eta(s),\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat avec le polynôme $P_{k+1}(X) = -X^2 P_k'(X) + P_K(X)P_1(X)$.
On déduit de (II.3) que

$$\lim_{s\to 0^+} \eta^{(k)}(s) = \lim_{x\to+\infty} \left(P_k(x)e^{-x^2}\right) = 0,$$

d'après les résultats de croissance comparée des puissances et des exponentielles.

2. On constate que le dénominateur ne s'annule jamais ce qui assure la régularité $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction. Le reste des propriétés est immédiate en utilisant que $\eta = 0$ sur $\mathbb{R}^-$.
3. Idem que dans le point précédent.
4. Pour tout point $x \in \overline{U}$, il existe $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x) \subset V$. On écrit ensuite

$$\overline{U} \subset \bigcup_{x\in\overline{U}} B\left(x, \frac{r_x}{2}\right),$$

dont on extrait un sous-recouvrement fini, par compacité de $\overline{U}$. On a donc obtenu des $x_i \in \overline{U}$ et des $r_i > 0$, $i = 1, ..., N$, tels que

$$\overline{U} \subset \bigcup_{i=1}^N B\left(x_i, \frac{r_i}{2}\right).$$

Pour chaque $i \in \{1, ..., N\}$, on définit alors

$$\psi_i(x) = \xi_{r_i/2, r_i}(\|x - x_i\|),$$

de sorte que $\psi_i \in \mathcal{C}^\infty$ (pas de problème avec la singularité de la norme en 0 ici, voyez-vous pourquoi ?) et vérifie

$$\psi_i = 0, \text{ dans } B(x_i, r_i/2),$$

$$\psi_i = 1, \text{ en dehors de } B(x_i, r_i).$$

On pose alors

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^N \psi_i(x),$$

qui est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie les propriétés attendues.

■

On va avoir besoin de définir une notion de convergence pour les suites d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ mais on ne traitera pas en détail la topologie de cet espace qui est assez complexe (en particulier ce n'est pas un espace vectoriel normé ...).

Définition II.5 (Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$)

On dit qu'une suite $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge, au sens de $\mathcal{D}(\Omega)$, vers une autre fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement si

1. *Il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\operatorname{Supp}(\varphi_n) \subset K$ pour tout n et $\operatorname{Supp}(\varphi) \subset K$.*
2. *Pour **tout** multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la suite des dérivées $(\partial^\alpha \varphi_n)_n$ converge uniformément vers $\partial^\alpha\varphi$ dans Ω, c'est-à-dire*

$$\|\partial^\alpha \varphi_n - \partial^\alpha\varphi\|_{L^\infty} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On notera $\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

Remarque II.6

Une remarque élémentaire : si $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge vers φ, alors pour tout multi-indice $\beta \in \mathbb{N}^d$, on a $\partial^\beta\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \partial^\beta\varphi$.

On peut maintenant définir l'objet central de ce chapitre.

Définition II.7 (Espace des distributions)

On dit qu'une forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *est une* **distribution sur** Ω *si elle est continue au sens suivant : pour toute suite* $(\varphi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on a*

$$\left[\varphi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega)\right] \Longrightarrow T(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} T(\varphi).$$

On notera $\mathcal{D}'(\Omega)$ *l'ensemble des distributions sur* Ω*. C'est un espace vectoriel réel.*

Remarque II.8

L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ *est donc, en un certain sens, le dual topologique de* $\mathcal{D}(\Omega)$*. En particulier, on pourra souvent utiliser la notation suivante*

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}, \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

inspirée de la notation standard du produit scalaire dans un espace de Hilbert.

Donnons maintenant quelques exemples fondamentaux

— Les fonctions de $L^1_{loc}(\Omega)$:
Commençons par un rappel

Définition II.9 (Espace $L^1_{loc}(\Omega)$)

Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$*. On note*

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ classe de fonctions mesurables telle que } 1_K f \in L^1(\Omega) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega\}.$$

On peut munir cet espace d'une distance qui en fait un espace métrique complet et tel que $(f_n)_n$ *converge vers* f *dans* $L^1_{loc}(\Omega)$ *si et seulement si*

$$\|1_K(f_n - f)\|_{L^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \ \forall K \subset \Omega \text{ compact}.$$

Remarque II.10

Tous les espaces de fonctions usuels $L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \geq 0$, *etc ... s'injectent naturellement et continûment dans* $L^1_{loc}(\Omega)$*. On peut donc le voir comme un gros espace contenant tous les autres.*

Proposition II.11

1. *Pour toute fonction* $f \in L^1_{loc}(\Omega)$*, l'application* T_f *définie par*

$$T_f : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \int_\Omega f\varphi \, dx,$$

définit une distribution sur Ω*.*

2. *L'application*

$$f \in L^1_{loc}(\Omega) \mapsto T_f \in \mathcal{D}'(\Omega),$$

est injective.

Preuve :

1. Soit $(\varphi_n)_n$ une suite de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers φ. On prend K un compact qui contient tous les supports des φ_n et de φ. On écrit alors

$$|T_f(\varphi_n) - T_f(\varphi)| \leq \int_K |f||\varphi_n - \varphi| \, dx \leq \|f\|_{L^1(K)} \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

2. Supposons que $T_f = 0$, cela signifie que

$$\int_\Omega f\varphi\, dx = 0, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Soit U n'importe quelle boule telle que $\overline{U} \subset \Omega$, on déduit de ce qui précède que

$$\int_U f\varphi\, dx = 0, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U),$$

et comme $f \in L^1(U)$, on peut alors appliquer le lemme I.5 pour déduire que $f = 0$ sur U. Ceci étant vrai pour toute boule $\overline{U}$ inclue dans Ω, on a bien que $f = 0$.

■

En conséquence de cette proposition on dira, par léger abus de langage, que les fonctions de $L^1_{loc}(\Omega)$ **sont des distributions** et on identifiera systématiquement f et T_f. Ainsi, on écrira

$$\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_\Omega f\varphi\, dx,$$

et

$$L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Pour cette raison on ne s'étonnera pas que dans certains ouvrages les distributions sont appelées **fonctions généralisées**.

En particulier, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une distribution quelconque, et E un espace de fonctions usuel (L^p, $\mathcal{C}^k$, etc ...), on dira que $T \in E$ s'il existe $f \in E$ tel que $T = T_f$ et alors identifiera T à la fonction f en question (qui est unique d'après la propriété d'injectivité).

— Masses de Dirac :
Soit $x_0 \in \Omega$, alors la masse de Dirac δ_{x_0} est une distribution sur Ω définie par

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \varphi(x_0), \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

— Mesures : plus généralement toute mesure borélienne μ localement finie sur Ω est une distribution

$$\langle \mu, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_\Omega \varphi d\mu, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

— L'ensemble des distributions contient des objets encore plus généraux comme par exemple

$$\delta'_{x_0} : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle \delta'_{x_0}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\varphi'(x_0),$$

pour $x_0 \in \Omega$,

$$\delta_\Gamma : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle \delta_\Gamma, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_\Gamma \varphi\, d\sigma,$$

où Γ est une hypersurface régulière contenue dans Ω.

II.2 Convergence au sens des distributions

On a maintenant besoin de définir une topologie dans l'ensemble des distributions. Là encore on ne va pas entrer dans les détails abstraits de cette problématique mais se contenter d'un niveau pragmatique suffisant pour nos besoins.

Définition II.12 (Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$)

On dit qu'une suite de distributions $(T_n)_n \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si et seulement si

$$\langle T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}, \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On notera $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Il est clair que, la limite d'une suite de distributions, si elle existe, est unique.

Cette convergence est assez aisée à manipuler car il s'agit simplement d'une convergence simple. En contre partie, on ne sera pas surpris d'apprendre que cette convergence est trop faible pour propager certaines bonnes propriétés. Ainsi si

$(f_n)_n$ est une suite de fonctions continues qui converge au sens des distributions vers une fonction f, alors il n'y a aucune raison que f soit continue. Voir les exemples plus bas.

Remarque II.13

On peut démontrer, mais cela sort du cadre de ce cours, que si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, les suites numériques $(\langle T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}})_n$ sont convergentes, alors il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $T_n \to T$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Cette définition de la convergence au sens des distributions est compatible avec toutes les notions raisonnables de convergence auxquelles on peut penser. Donnons quelques exemples fondamentaux.

— Convergence L^1_{loc} et distributions

Proposition II.14

Soit $(f_n)_n$ une suite d'éléments de $L^1_{loc}(\Omega)$ qui converge, dans cet espace, vers un certain $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors nous avons

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f, \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Preuve :

On se fixe un $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on introduit le compact $K = \operatorname{Supp}\varphi$. On écrit alors

$$|\langle f_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}| = \left|\int_\Omega (f_n - f)\varphi\, dx\right| = \left|\int_K (f_n - f)\varphi\, dx\right| \leq \|\varphi\|_\infty \|f_n - f\|_{L^1(K)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ce qui montre bien le résultat. ■

— Attention, il est tout à faire possible (et c'est l'un des intérêts de cette théorie) que la suite $(f_n)_n$ converge vers une distribution T qui n'est pas une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$. Etudions l'exemple suivant : on définit $\Omega = B(0,1)$ la boule unité de $\mathbb{R}^d$ et on se fixe une fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $\operatorname{Supp} g \subset \Omega$ et $\int_\Omega g\, dx = 1$.

On pose alors $f_n(x) = n^d g(nx)$, qui est une fonction de $L^1(\Omega)$. On va montrer que

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \delta_0, \quad \text{au sens des distributions sur } \Omega.$$

Pour cela, on choisit un $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et il s'agit de démontrer que

$$\langle f_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \delta_0, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \varphi(0).$$

On constate que le support de f_n vérifie $\operatorname{Supp} f_n \subset B(0, 1/n)$ et aussi, par changement de variable, que

$$\int_\Omega f_n\, dx = \int_\Omega g\, dx = 1, \text{ et } \int_\Omega |f_n|\, dx = \int_\Omega |g|\, dx = \|g\|_{L^1}.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}
|\langle f_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} - \varphi(0)| &= \left|\int_\Omega f_n\varphi\, dx - \varphi(0)\right| \\
&= \left|\int_\Omega f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\, dx\right| \\
&= \left|\int_{B(0,1/n)} f_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\, dx\right| \\
&\leq \left(\sup_{x\in B(0,1/n)} |\varphi(x) - \varphi(0)|\right) \left|\int_\Omega |f_n|(x)\, dx\right| \\
&= \|g\|_{L^1} \left(\sup_{x\in B(0,1/n)} |\varphi(x) - \varphi(0)|\right),
\end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend bien vers 0 par continuité de φ au point 0.

— On peut aussi avoir $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ au sens des distributions sans avoir convergence de $(f_n)_n$ vers f dans $L^1_{loc}(\Omega)$.
Si on reprend le calcul précédent mais avec $\int_\Omega g\,dx = 0$ cette fois (et g non identiquement nulle), alors on peut montrer que $(f_n)_n$ tend vers 0 au sens des distributions et pourtant on a

$$\|f_n\|_{L^1} = \|g\|_{L^1} \neq 0, \ \ \forall n,$$

ce qui montre qu'elle ne peut pas converger vers 0 dans L^1.

— La convergence au sens des distributions n'est pas compatible avec la multiplication des fonctions ! Prenons un exemple :
Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \cos(nx), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors nous avons

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

$$f_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}, \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

En effet, fixons une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et effectuons l'intégration par parties (en primitivant f_n et dérivant φ)

$$\int_{\mathbb{R}} f_n\varphi\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx.$$

On a donc

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f_n\varphi\,dx\right| \leq \frac{1}{n}\|\varphi'\|_{L^1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Si maintenant on calcule f_n^2, on trouve grâce aux formules de trigonométrie,

$$f_n^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2nx)}{2} = \frac{1}{2}(1 + f_{2n}),$$

et donc d'après ce qui précède on a bien la convergence de f_n^2 vers $1/2$.

III Dérivation au sens des distributions.

Comme les distributions sont des *fonctions généralisées* destinées à aider à la résolution des équations aux dérivées partielles, il est nécessaire de savoir les dériver.

L'un des énormes avantage de cette théorie est que **toutes les distributions sont dérivables** ce qui simplifie énormément l'analyse, au moins sur ce point.

Définition et Proposition II.15 (Dérivée d'une distribution)

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice. L'application $\partial^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\partial^\alpha T : \varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}},$$

est une distribution sur Ω appelée distribution dérivée α-fois de T.

Preuve :

On remarque tout d'abord que si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors $\partial^\alpha\varphi$ est aussi dans $\mathcal{D}(\Omega)$ et donc l'application $\partial^\alpha T$ est bien définie. Il reste à voir qu'elle est continue. Pour cela, on constate que si $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ alors $\partial^\alpha\varphi_n \to \partial^\alpha\varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

■

Bien entendu, cette notion ne fait que généraliser la notion usuelle d'après la proposition suivante

Proposition II.16

Si $f \in \mathcal{C}^k(\Omega, \mathbb{R})$, alors nous avons pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leq k$

$$\partial^\alpha(T_f) = T_{\partial^\alpha f}.$$

Autrement dit, la notion de dérivée au sens des distributions et celle de dérivée usuelle coïncident.

Preuve :

Il s'agit simplement d'une utilisation répétée de la formule d'intégration par parties pour les fonctions à support compact. ■

Une dernière chose très agréable avec les distributions est la possibilité d'intervertir la dérivation et la limite d'une suite "sans réfléchir".

Théorème II.17

Soit $(T_n)_n$ une suite de distributions qui converge vers une distribution T et soit $\alpha \in \mathbb{N}^d$ alors on a

$$\partial^\alpha T_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \partial^\alpha T, \quad \textit{au sens des distributions.}$$

Preuve :

On écrit juste les définitions

$$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = (-1)^{|\alpha|}\langle T_n, \partial^\alpha \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}.$$

■

Exemples :

— Dérivée d'une masse de Dirac en 1D :
On calcule
$$\langle \delta'_{x_0}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle \delta_{x_0}, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\varphi'(x_0).$$

— Dérivée d'une fonction $\mathcal{C}^1$ par morceaux en 1D :
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On note $x_1 < \cdots < x_n$ les points de discontinuité potentielle de f et $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$. Un simple calcul d'intégration par parties permet de montrer la **formule des sauts**
$$\begin{aligned}\langle \partial_x f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -\langle f, \partial_x\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}}\\ &= -\sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\varphi'\,dx\\ &= -\sum_{i=0}^n \left[f(x_{i+1}^-)\varphi(x_{i+1}) - f(x_i^+)\varphi(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'\varphi\,dx\right]\\ &= \sum_{i=1}^n \varphi(x_i)[f(x_i^+) - f(x_i^-)] + \sum_{i=0}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'\varphi\,dx.\end{aligned}$$
Ainsi, au sens des distributions nous avons
$$\partial_x f = f' + \sum_{i=1}^n [f(x_i^+) - f(x_i^-)]\delta_{x_i},$$
où on a noté f' la fonction continue par morceaux qui coïncide avec la dérivée de f sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Les termes de Dirac montrent l'influence des discontinuités de f dans la dérivée.
On retrouve le fait que $f \in H^1(]0,1[)$ si et seulement si les sauts sont nuls, autrement dit, si f est continue sur $[0,1]$.

— Piège classique : le produit de deux distributions n'est pas bien défini en général (ni même le produit d'une distribution par une fonction insuffisamment régulière).
Ainsi, si $u \in L^2(]0,1[)$, la quantité $u(\partial_x u)$ n'est pas bien définie en général (elle l'est si $u \in H^1(]0,1[)$). Par contre, on sait que (au moins formellement) on a $u(\partial_x u) = \frac{1}{2}\partial_x(u^2)$ et cette deuxième écriture est, elle, parfaitement définie car $u^2 \in L^1(]0,1[)$ est une distribution qui admet bien une dérivée.

Chapitre III

Espaces de Sobolev et problèmes elliptiques sur un domaine de $\mathbb{R}^d$

I Espaces de Sobolev sur un domaine de $\mathbb{R}^d$

Grâce au formalisme introduit dans le chapitre précédent, on peut introduire les espaces de Sobolev en toute généralité.

Définition III.1 (Espace $H^1(\Omega)$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On note $H^1(\Omega)$ le sous-espace de $L^2(\Omega)$ constitué des fonctions dont les dérivées premières au sens des distributions sont des éléments de $L^2(\Omega)$, ce qui donne

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega), \ \textit{tel que } \partial_{x_i} u \in L^2(\Omega), \ \forall i \in \{1, ..., d\}\right\}.$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\|u\|_{L^2}^2 + \sum_{i=1}^d \|\partial_{x_i} u\|_{L^2}^2},$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Il est aisé de se convaincre que, en dimension $d = 1$, cette définition coïncide avec celle vue au premier chapitre et que ce qu'on avait appelé *dérivée faible* n'est rien d'autre que la dérivée au sens des distributions.

Définition III.2 (Espace $H^k(\Omega)$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $k \geq 1$ un entier. On définit l'espace $H^k(\Omega)$ par la formule

$$H^k(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega), \ \textit{tel que } \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \ \textit{avec } |\alpha| \leq k, \ \partial^\alpha u \in L^2(\Omega)\right\}.$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{H^k} = \sqrt{\sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq k}} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2},$$

qui en fait un espace de Hilbert.

Remarque III.3

Si $U \subset \Omega$ est un autre ouvert, alors on a $H^k(\Omega) \subset H^k(U)$, ce qui signifie plus précisément que, pour tout $u \in H^k(\Omega)$, on a

$$u_{|U} \in H^k(U), \ \textit{ et } \ \partial^\alpha(u_{|U}) = (\partial^\alpha u)_{|U}, \ \textit{pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^d, \ |\alpha| \leq k.$$

Théorème III.4 (densité des fonctions régulières)

1. *Soit Ω un ouvert borné quelconque de $\mathbb{R}^d$. Alors l'ensemble*
$$\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H^k(\Omega)$$
est dense dans $H^k(\Omega)$.
2. *Soit Ω un domaine borné régulier (de classe $\mathcal{C}^1$). Alors l'ensemble*
$$\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$$
est dense dans $H^k(\Omega)$.

Remarque III.5

Quand $d \geq 2$, contrairement à la dimension 1, nous avons
$$H^1(\Omega) \not\subset \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}).$$
En dimension $d = 2$ par exemple, prenons $\Omega = B(0,1)$, et posons
$$u(x) = \log|\log r|, \quad r = |x|.$$
Cette fonction n'est clairement pas continue (elle explose au voisinage de 0).
En revanche, par passage en polaire, nous avons
$$\int_\Omega |u(x)|^2\,dx = \int_\Omega |\log|\log r||^2\,dx = 2\pi \int_0^1 r|\log|\log r||^2\,dr < +\infty,$$
et
$$\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx = \int_\Omega \left|\frac{1}{r\log r}\right|^2 dx = 2\pi \int_0^1 \left|\frac{1}{r\log r}\right|^2 r\,dr = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{r|\log r|^2}\,dr < +\infty,$$
d'après les résultats bien connus sur les intégrales de Bertrand.
Ainsi, cette fonction u est bien dans $H^1(\Omega)$ sans être continue sur son domaine de définition.

On a néanmoins le résultat plus faible suivant.

Théorème III.6 (Injections de Sobolev)

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. On pose
$$2^* = \begin{cases} \frac{2d}{d-2}, & \text{si } d \geq 3, \\ q, & \text{pour n'importe quel } q < +\infty, \text{ si } d = 2. \end{cases}$$
Alors nous avons
$$\forall u \in H^1(\Omega), \;\; u \in L^{2^*}(\Omega), \text{ et } \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)},$$
pour un $C > 0$ ne dépendant que de Ω.
Ces injections sont optimales.

Malgré tout, on va essayer de définir la trace sur le bord du domaine Ω d'une fonction dans un espace de Sobolev. Pour cela, on commence par définir l'espace des fonctions de carré intégrable sur le bord de Ω. En supposant que (U,γ) est une paramétrisation de $\partial\Omega$ (éventuellement locale ...) cet espace s'écrit
$$L^2(\partial\Omega) = \{f : \partial\Omega \to \mathbb{R}, \;\text{ telles que } f \circ \gamma \in L^2(U)\},$$
que l'on munit alors de la norme définie par
$$\|f\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |f|^2\,d\sigma.$$

On donne ainsi sans démonstration les résultats suivants.

Théorème III.7 (Traces)

Soit Ω un domaine borné régulier (de classe au moins $\mathcal{C}^1$). L'application

$$\gamma_0 : u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \mapsto u_{|\partial\Omega} \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega),$$

vérifie, pour un $C > 0$ ne dépendant que de Ω, l'inégalité

$$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}). \tag{III.1}$$

Ainsi γ_0 se prolonge de façon unique en un opérateur linéaire continu

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega),$$

appelé **opérateur de traces** *associé à l'espace $H^1(\Omega)$.*

Proposition III.8 (Formules de Stokes dans les espaces de Sobolev)

Si $u \in H^1(\Omega)$ et $V \in (H^1(\Omega))^d$ alors nous avons

$$\int_\Omega u(div\, V)\, dx = -\int_\Omega (\nabla u)\cdot V\, dx + \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_0 V)\cdot n\, d\sigma.$$

Théorème III.9 (Espace de traces et relèvement)

L'opérateur de traces γ_0 **n'est pas surjectif**. *On notera conventionnellement $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ son image*

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega)).$$

On le munit de la norme quotient

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \inf_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ \gamma_0(u)=v}} \|u\|_{H^1(\Omega)},$$

qui en fait un espace de Hilbert.
L'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ainsi obtenu contient $\mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ et il est dense dans $L^2(\partial\Omega)$.
Enfin, il existe un (non unique) opérateur linéaire continu $R_0 : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$ (appelé **opérateur de relèvement***) qui vérifie*

$$\gamma_0\big(R_0 v\big) = v, \quad \forall v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

Remarque III.10

1. *Dans ce théorème on a utilisé l'espace $\mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur le bord de Ω. Si (U, γ) est une paramétrisation (éventuellement locale) de $\Gamma = \partial\Omega$, on dira qu'une fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si $f \circ \gamma \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.*
   Sous les hypothèses du théorème, on peut montrer que $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement s'il existe $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que
   $$F_{|\Gamma} = f.$$
2. *Il est difficile, et hors de propos dans ce cours, d'expliquer pourquoi cet espace de traces s'appelle $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Moralement, cela signifie que les fonctions dans cet espace possèdent des* demi-dérivées ....
   On peut aussi le comprendre en raffinant l'inégalité (III.1). En effet, on peut montrer qu'il existe $C > 0$ telle que
   $$\|\gamma_0 u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$
   Ainsi la trace de u peut s'estimer en norme L^2 en utilisant seulement la racine carrée de la norme H^1 (celle qui contient des dérivées de u dans Ω).

Définition III.11 (Espace $H_0^1(\Omega)$)

On définit $H_0^1(\Omega)$ comme le sous-espace **fermé** *de $H^1(\Omega)$ constitué des fonctions nulles au bord, au sens de la trace. Autrement dit*

$$H_0^1(\Omega) = Ker\, \gamma_0.$$

Proposition III.12

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$. L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est alors dense dans $H_0^1(\Omega)$.

Théorème III.13 (Inégalité de Poincaré)

Soit Ω un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$, il existe alors une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω vérifiant

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \;\; \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème III.14 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger)

Soit Ω un domaine borné régulier **connexe** *de $\mathbb{R}^d$, il existe alors une constante $C > 0$ ne dépendant que de Ω vérifiant*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \;\; \forall u \in H_m^1(\Omega),$$

où $H_m^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonction de H^1 à moyenne nulle.

II Problèmes aux limites elliptiques

On va reprendre les exemples vus dans le premier chapitre mais cette fois en dimension quelconque. Dans toute la suite, Ω sera un domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$.

II.1 Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet

Soit $k : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée et telle que $\alpha = \inf_\Omega k > 0$ et $f \in L^2(\Omega)$. On pose $H = H_0^1(\Omega)$, et on définit

$$a(u, v) = \int_\Omega k(x)(\nabla u) \cdot (\nabla v)\, dx, \quad L(v) = \int_\Omega f v\, dx.$$

La continuité de a et L ne fait aucun doute. La coercivité de a provient de l'inégalité de Poincaré et de l'hypothèse sur le coefficient k.

On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram et ainsi obtenir une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega k(x)\nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx, \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

En prenant $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, cette formule devient

$$\sum_{i=1}^{d} \langle k\partial_{x_i} u, \partial_{x_i}\varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}},$$

et on a donc résolu le problème

$$-\text{div}\, (k\nabla u) = f, \;\; \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

avec la condition de Dirichlet homogène sur le bord.

Remarque III.15

Si k est constante, on a résolution le problème suivant

$$-k\Delta u = f,$$

avec conditions au bord de Dirichlet homogène.

En dimension 1, nous avions déduit que la dérivée seconde de u était dans L^2 mais ici on va admettre la proposition (difficile) suivante

Théorème III.16 (Régularité elliptique)

Si Ω est suffisamment régulier et que k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$, alors la solution du problème précédent vérifie

$$u \in H^2(\Omega), \text{ avec } \|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2},$$

pour un $C > 0$ ne dépendant que de Ω.

Pour le cas non-homogène, on cherche $u \in H^1(\Omega)$ vérifiant

$$\begin{cases} -\text{div } (k(x)\nabla u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = u_b, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

D'après le théorème de trace, cela nécessite que $u_b \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. De fait, si on fait cette hypothèse, le théorème de relèvement nous dit qu'il existe une fonction $R_0 u_b \in H^1(\Omega)$ dont la trace est égale à u_b.

On modifie alors la forme linéaire L de la façon suivante

$$\tilde{L}(v) = \int_\Omega f v \, dx - \int_\Omega k(x)\nabla(R_0 u_b) \cdot \nabla v \, dx.$$

Le nouveau terme est toujours continue pour la norme $H^1(\Omega)$. On résout alors le problème

$$w \in H^1_0(\Omega), \quad a(w, v) = \tilde{L}(v), \ \ \forall v \in H^1_0(\Omega),$$

de sorte que $u = w + R_0 u_b$ vérifie bien l'équation de Poisson $-\text{div } (k\nabla u) = f$ et la condition au bord $\gamma_0 u = u_b$ prescrite au départ.

II.2 Problème de diffusion-advection

Soit $b : \Omega \to \mathbb{R}^d$ un champ de vecteurs régulier. On s'intéresse au problème

$$\begin{cases} -\Delta u + b \cdot \nabla u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On propose la formulation variationnelle suivante

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega (b \cdot \nabla u) v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \ \ \forall v \in H^1_0(\Omega).$$

Comme en dimension 1, la difficulté principale est d'établir la coercivité de la partie bilinéaire et donc d'estimer le terme d'advection

$$\int_\Omega (b \cdot \nabla u) u \, dx,$$

lequel peut être contrôlé dès que $\|b\|_\infty$ est assez petite. On peut aussi l'intégrer par parties et l'écrire

$$-\frac{1}{2}\int_\Omega (\text{div } b) u^2 \, dx,$$

ce qui, par exemple, permet de le minorer si div $b \leq 0$.

Encore une fois c'est un exemple d'utilisation du théorème de Lax-Milgram dans un cadre non symétrique.

II.3 Conditions aux limites de Neumann

On suppose que Ω est connexe et on se donne un $f \in L^2(\Omega)$ et un $g \in L^2(\partial\Omega)$ tels que

$$\int_\Omega f \, dx + \int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0. \tag{III.2}$$

On définit l'espace $H^1_m(\Omega)$ par

$$H^1_m(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), \ \int_\Omega u \, dx = 0\},$$

sur lequel on admet que l'inégalité de Poincaré-Wirtinger suivante est vraie

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \ \ \forall u \in H^1_m(\Omega).$$

On définit ensuite les formes bilinéaires et linéaires suivantes

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \ \ L(v) = \int_\Omega fv \, dx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0(v) \, d\sigma, \ \ \forall v \in H^1_m(\Omega).$$

— La continuité de a est claire et la coercivité vient de l'inégalité de Poincaré-Wirtinger.
— La continuité de L provient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du théorème de traces

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq (\|f\|_{L^2(\mathcal{O})} + C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)})\|v\|_{H^1}.$$

Le théorème de Lax-Milgram s'applique et nous donne un unique $u \in H^1_m(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0(v) \, d\sigma, \ \ \forall v \in H^1_m(\Omega).$$

Pour $v \in H^1(\Omega)$, on constate que $v - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v \, dx$ est dans $H^1_m(\Omega)$. On peut donc appliquer la propriété ci-dessus et utiliser la condition de compatibilité (III.2) pour obtenir

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \int_{\partial\Omega} g\gamma_0(v) \, d\sigma, \ \ \forall v \in H^1(\Omega). \tag{III.3}$$

On peut maintenant prendre $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans (III.3) et obtenir

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Ceci montre que

$$-\Delta u = -\text{div } (\nabla u) = f, \ \ \text{au sens des distributions.}$$

Si on suppose que $u \in H^2(\Omega)$ (ce qu'il est possible de démontrer si les données sont suffisamment régulières) alors on peut utiliser la formule d'intégration par parties donnée dans la proposition III.8 pour obtenir pour tout $v \in H^1_m(\Omega)$

$$\int_\Omega fv \, dx = \int_\Omega -\text{div } (\nabla u)v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_{\partial\Omega} \gamma_0(v)\gamma_0(\nabla u) \cdot n \, d\sigma.$$

En comparant cette égalité avec (III.3) on obtient

$$\int_{\partial\Omega} (g - \gamma_0(\nabla u) \cdot n)\gamma_0(v) \, d\sigma = 0, \ \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme l'image de l'opérateur de trace (l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$) est dense dans $L^2(\partial\Omega)$, nous déduisons que

$$\gamma_0(\nabla u) \cdot n = g.$$

Nous avons donc résolu le problème de Poisson avec la condition de Neumman non-homogène ci-dessus.

Annexe A

La formule de Stokes

Le but de la suite de cette annexe est de comprendre ce qu'il convient de faire quand on ne travaille plus sur $\mathbb{R}^d$ tout entier avec des fonctions à support compact mais dans un domaine quelconque et des fonctions potentiellement non nulles au bord. Comme on le sait d'après notre expérience de l'intégration par parties en 1D, des termes de bord doivent nécessairement apparaître dans la formule.

Notre but va donc être de prouver le résultat suivant

Théorème I.1 (Formule de la divergence / Formule de Stokes)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant des hypothèses détaillées plus loin, alors pour tout champ de vecteurs $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ on a l'égalité

$$\int_\Omega div\, F\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot n\, d\sigma,$$

où n désigne la **normale unitaire sortante** *au domaine Ω.*

Pour montrer ce théorème, il est donc nécessaire de définir ce qu'est la normale unitaire sortante d'un domaine Ω d'une part, et ce qu'est l'intégrale d'une quantité scalaire sur le bord $\partial\Omega$ de ce domaine (il ne peut s'agir de l'intégrale de Lebesgue usuelle car selon toute probabilité $\partial\Omega$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$). Ce sera l'objet des sections suivantes.

De la même façon que ci-dessus on peut déduire plusieurs formules utiles à partir de ce théorème.

Corollaire I.2

Soit Ω comme dans le théorème précédent.

1. *Soient $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ et $V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ alors on a*

$$\int_\Omega u(div\, V)\, dx = -\int_\Omega (\nabla u) \cdot V\, dx + \int_{\partial\Omega} u(V \cdot n)\, d\sigma.$$

2. *Soient $u, v \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ tels que u ou v soit à support compact, alors on a*

$$\int_\Omega u(-\Delta v)\, dx = \int_\Omega (\nabla u) \cdot (\nabla v)\, dx - \int_{\partial\Omega} u(\nabla v \cdot n)\, d\sigma,$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v\, dx - \int_\Omega u(\Delta v)\, dx = \int_{\partial\Omega} v(\nabla u \cdot n)\, d\sigma - \int_{\partial\Omega} u(\nabla v \cdot n)\, d\sigma.$$

I Hypersurfaces de $\mathbb{R}^d$. Intégrale de surface

I.1 Courbes planes

Définition I.3

Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $\gamma : J \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in J$ et telle que γ est injective. On dit alors que l'image $\Gamma = \gamma(J) \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe simple de $\mathbb{R}^2$ et que le couple (J, γ) est une paramétrisation de Γ.

Définition I.4

Pour tout $t \in J$, le vecteur $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^2$ est un **vecteur tangent** *à la courbe au point $\gamma(t)$.*
On note $R_{\pi/2}$ la rotation d'angle $\pi/2$ (une orientation étant préalablement choisie). Pour tout $t \in J$, le vecteur

$$n = \frac{R_{\pi/2}\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

est un **vecteur normal unitaire** *à la courbe au point $\gamma(t)$. Celui-ci ne dépend pas de la paramétrisation, à part peut-être son orientation.*

Définition et Proposition I.5

Soit $\Gamma = \gamma(J)$ une courbe simple de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, on définit alors la quantité

$$I_\gamma(f) = \int_J f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt,$$

où $\|\cdot\|$ désigne ici la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^2$.
Alors nous avons :

- *$I_\gamma(f)$ ne dépend que des valeurs de f sur Γ.*
- *$I_\gamma(f)$ ne dépend pas de la paramétrisation de Γ, c'est-à-dire que si $(\tilde{J}, \tilde{\gamma})$ est une autre paramétrisation vérifiant $\tilde{\gamma}(\tilde{J}) = \Gamma$, alors on a*
$$I_{\tilde{\gamma}}(f) = I_\gamma(f).$$

Ainsi, la quantité $I_\gamma(f)$ sera appelée l'intégrale de f sur Γ et notée

$$\int_\Gamma f\, d\sigma, \quad ou \quad \int_\Gamma f(x)\, d\sigma(x).$$

Preuve :

On ne va pas faire la preuve complète mais en expliquer rapidement le principe, le point-clé étant le théorème de changement de variable.

Soit (J, γ) est une paramétrisation de Γ (on supposera sans perte de généralité que $J = [0, T]$) et soit $S : t \in [0, T] \mapsto [0, S(T)]$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ bijective et telle que $S'(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$. Alors on peut construire une nouvelle paramétrisation de Γ donnée par $(\tilde{J} = [0, S(T)], \tilde{\gamma})$ et

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(S^{-1}(s)), \ \ \forall s \in [0, S(T)].$$

Comme S est bijective, cette application est bien définie et on a bien $\gamma(J) = \tilde{\gamma}(\tilde{J}) = \Gamma$. Enfin, nous avons

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(S(t)), \ \ \forall t \in [0, T], \tag{I.1}$$

et donc

$$\gamma'(t) = S'(t)\tilde{\gamma}'(S(t)), \ \ \forall t \in [0, T], \tag{I.2}$$

ce qui prouve en particulier que $\tilde{\gamma}'$ ne peut pas s'annuler. On a donc bien affaire à une nouvelle paramétrisation du même ensemble Γ.

On effectue maintenant le changement de variable $s = S(t)$ dans l'intégrale qui définit $I_\gamma(f)$

$$\begin{aligned} I_\gamma(f) &= \int_0^T f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|\, dt \\ &= \int_0^T f(\tilde{\gamma}(S(t)))\|S'(t)\tilde{\gamma}'(S(t))\|\, dt \\ &= \int_0^T f(\tilde{\gamma}(S(t)))\|\tilde{\gamma}'(S(t))\|\, S'(t)dt \\ &= \int_0^{S(T)} f(\tilde{\gamma}(s))\|\tilde{\gamma}'(s)\|\, ds \\ &= I_{\tilde{\gamma}}(f), \end{aligned}$$

ce qui est bien ce qu'on voulait démontrer.

Pour clore complètement la preuve, il faudrait montrer que **toutes** les paramétrisations de Γ ont bien, plus ou moins, la forme $\tilde{\gamma} = \gamma \circ S^{-1}$ pour une application S bien choisie vérifiant les hypothèses plus haut. Nous laissons cette partie aux soins du lecteur. ■

Remarque I.6

Avec cette définition, la **longueur** *de la courbe* Γ *est l'intégrale de la fonction constante égale à* 1

$$|\Gamma| = \int_\Gamma 1\, d\sigma.$$

Donnons quelques exemples :

— Intégrale sur un segment : Soient $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$ deux points de $\mathbb{R}^2$ et $\Gamma = [A, B]$ le segment joignant A et B. On choisit la paramétrisation naturelle de ce segment

$$\gamma : t \in [0,1] \mapsto tA + (1-t)B = (ta_1 + (1-t)b_1, ta_2 + (1-t)b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour une fonction f quelconque on a donc

$$\int_\Gamma f\, d\sigma = \int_0^1 f(tA + (1-t)B)\|A - B\|\, dt = \|A - B\| \int_0^1 f(tA + (1-t)B)\, dt.$$

Pour $f = 1$, on retrouve que la longueur du segment vaut $\|A - B\|$.

— Intégrale sur un cercle : On considère $\Gamma = C(0, R)$ le cercle de centre 0 et de rayon R et une paramétrisation donnée par

$$\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto \gamma(t) = R(\cos(t), \sin(t)).$$

Remarquons que $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ ici et donc que γ n'est pas injective, néanmoins on se convainc aisément que les propriétés établies plus haut s'adaptent sans difficulté au cas des paramétrisations périodiques (courbes fermées). Dans ces conditions, comme $\|\gamma'(t)\| = R$ pour tout t, on a

$$\int_{C(0,R)} f\, d\sigma = R \int_0^{2\pi} f(R\cos(t), R\sin(t))\, dt,$$

et pour $f = 1$ on retrouve bien le périmètre du cercle égal à $2\pi R$.

— Intégrale sur un graphe : Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. On s'intéresse à la courbe du plan formée de la portion de graphe de φ et définie par

$$\Gamma = \{(x, \varphi(x)),\ x \in [\alpha, \beta]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Cette courbe possède une paramétrisation "naturelle" donnée par

$$\gamma : x \in [\alpha, \beta] \mapsto (x, \varphi(x)) \in \Gamma.$$

On a alors pour une fonction f quelconque

$$\int_\Gamma f\, d\sigma = \int_\alpha^\beta f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\, dx.$$

I.2 Intégrales sur des hypersurfaces de $\mathbb{R}^d$

On se contente ici du cas $d = 3$ par simplicité mais toute la théorie peut s'adapter à la dimension quelconque.

On va admettre que l'on peut définir, comme précédemment, l'intégrale de n'importe quelle fonction (disons continue) sur une hypersurface Γ de $\mathbb{R}^3$ par la formule

$$\int_\Gamma f\, d\sigma = \int_U f(\gamma(u)) \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial u_2} \right\| du,$$

où

$$\gamma : u \in U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \gamma(u) \in \mathbb{R}^3,$$

est une paramétrisation de Γ (i.e. une bijection régulière telle que $\frac{\partial \gamma}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial u_2} \neq 0$ en tout point u).

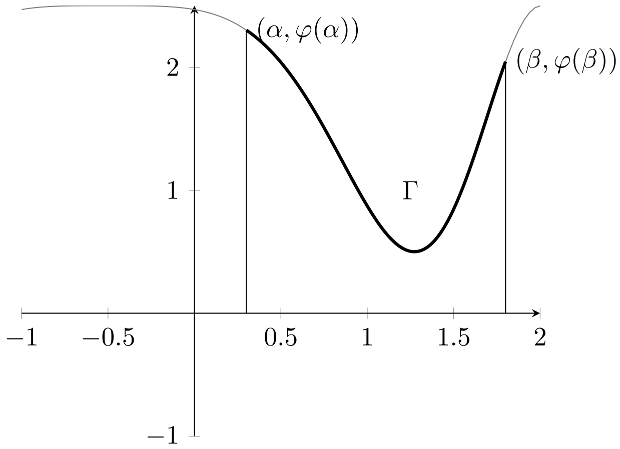

FIGURE I.1 – Intégrale sur le graphe d'une fonction

En pratique, il n'est pas toujours vrai qu'une telle paramétrisation globale de Γ existe et on doit raisonner par des paramétrisations locales et une technique de recollement mais on ne va pas détailler ces points.

Définition I.7

Pour tout $u \in U$, les vecteurs $\frac{\partial\gamma}{\partial u_1}(u), \frac{\partial\gamma}{\partial u_2}(u) \in \mathbb{R}^3$ sont des **vecteurs tangents** *à la surface au point $\gamma(u)$. De plus, ils sont linéairement indépendants et le plan qu'ils engendrent ne dépend pas de la paramétrisation choisie, on l'appelle* **le plan tangent** *à la surface en ce point.*
Pour tout $u \in J$, le vecteur

$$n = \frac{1}{\left\| \frac{\partial\gamma}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial u_2} \right\|} \frac{\partial\gamma}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial u_2},$$

est un **vecteur normal unitaire** *à la surface au point $\gamma(u)$. Celui-ci ne dépend pas de la paramétrisation, à part peut-être son orientation.*

Le cas des graphes est toujours intéressant à étudier de plus près. Soit donc $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction régulière, le graphe de φ est défini par

$$\Gamma = \{(u, \varphi(u)), u \in U\} \subset \mathbb{R}^3,$$

et il est naturellement paramétrisé par l'application

$$\gamma : u = (u_1, u_2) \in U \mapsto (u_1, u_2, \varphi(u)) \in \mathbb{R}^3.$$

Un calcul immédiat montre que

$$\frac{\partial\gamma}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \end{pmatrix}, \text{ et } \frac{\partial\gamma}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$\frac{\partial\gamma}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \\ 1 \end{pmatrix},$$

et en particulier, on a

$$\left\| \frac{\partial\gamma}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial\gamma}{\partial u_2} \right\| = \sqrt{1 + \|\nabla\varphi(u)\|^2} > 0,$$

ce qui prouve que la paramétrisation est licite. L'intégrale sur Γ s'exprime alors par la formule

$$\int_\Gamma f\, d\sigma = \int_U f(u_1, u_2, \varphi(u_1, u_2)) \sqrt{1 + \|\nabla\varphi(u)\|^2}\, du. \tag{I.3}$$

Par ailleurs, la normale unitaire sur ce graphe est donnée par

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 + \|\nabla\varphi(u)\|^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial u_2} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{I.4}$$

et on observe que ce vecteur est orienté “vers le haut”, c'est-à-dire dans le sens des x_3 croissants, et ce indépendamment de φ.

II Domaines réguliers de $\mathbb{R}^d$

Définition I.8

On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ est un **domaine régulier** *(ou par abus de langage* **un ouvert régulier***) si, localement, $\partial\Omega$ est une hypersurface régulière de $\mathbb{R}^d$ et que Ω se situe d'un seul côté de $\partial\Omega$.*
Ainsi, en tout point de $\partial\Omega$, on peut définir l'unique vecteur normal unitaire orienté de l'intérieur vers l'extérieur de Ω.

Quelques exemples d'ouverts qui **ne sont pas** des domaines réguliers :

— $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$
En effet, le bord de Ω est réduit à un point et n'est donc pas une hypersurface de $\mathbb{R}^d$.

— $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \left(\{0\} \times \mathbb{R}^{d-1}\right)$ est une union de deux demi-espaces.
Son bord est bien une hypersurface de $\mathbb{R}^d$ mais Ω se situe localement des deux côtés de sa frontière, on ne peut donc pas définir de normale *sortante*.
Remarquons que, dans ce type de situation, on peut souvent (mais pas toujours) décomposer Ω en deux ouverts disjoints qui, eux, sont des domaines réguliers.

— $\Omega =]0,1[\times]0,1[\subset \mathbb{R}^2$
Son bord n'est pas une hypersurface régulière à cause des coins du carré. En pratique, on peut quand même travailler avec ce type de domaines à condition de relaxer un peu (mais pas trop) les hypothèses de régularité sur sa frontière.

— Domaine à cusp :
L'ouvert
$$\Omega = \{(x,y),\ \ 0 < x < 1, 0 < y < x^2\},$$
dessiné dans la figure I.2 n'est pas un domaine régulier à cause de la singularité “pointue” dans le coin inférieur gauche. Ce type de domaine présente un certain nombre de particularités que nous ne détaillerons pas plus avant ici.

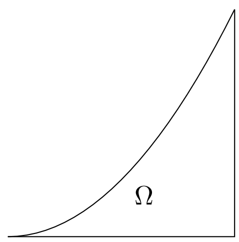

FIGURE I.2 – Domaine à cusp

III Formule de Stokes

On souhaite ici démontrer le théorème I.1 au moins dans des cas particuliers.

III.1 Le cas du demi-espace $\mathbb{R}^d_+$

On se place sur $\Omega = \mathbb{R}^d_+ = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}^+_*$. Dans le cas $d = 3$, on a donc $\mathbb{R}^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3),\ x_3 > 0\}$. Le bord de cet ouvert est le plan $\Gamma = \partial\Omega = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.

On prend maintenant un champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$ et à support compact dans $\mathbb{R}^d$. On intègre la divergence de F sur Ω. La contribution des termes $\partial_{x_1} F_1$ et $\partial_{x_2} F_2$ est toujours nulle d'après le théorème de Fubini. En revanche celle du troisième terme devient
$$\int_\Omega \partial_{x_3} F_3\, dx = \int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} \left(\int_0^{+\infty} \partial_{x_3} F_3(x_1, x_2, x_3)\, dx_3\right)\, dx_1 dx_2 = -\int_{\mathbb{R}^2} F_3(x_1, x_2, 0)\, dx_2 dx_2.$$
En remarquant que la normale unitaire **sortante** à Ω sur Γ est donnée par $n = {}^t(0, 0, -1)$, on a établi
$$\int_\Omega \text{div}\, F\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} F \cdot n(x_1, x_2, 0)\, dx_1 dx_2.$$

Cette dernière est bien égale à l'intégrale sur l'hypersurface (plate) $\partial\Omega$ que l'on a défini plus haut.

III.2 Le cas du demi-espace à frontière non plane

On se donne maintenant une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et on considère l'ouvert (appelé épigraphe de φ) défini par

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) \;\; x_3 > \varphi(x_1, x_2)\},$$

dont le bord $\Gamma = \partial\Omega$ n'est rien d'autre que le graphe de φ. L'ensemble Ω est donc la partie de l'espace qui se trouve *au-dessus* du graphe Γ.

On prend à nouveau un champ de vecteurs F régulier et à support compact. On introduit le changement de variable

$$\Psi : \tilde{x} \in \mathbb{R}^3 \mapsto (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 + \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)) \in \mathbb{R}^3.$$

On vérifie aisément que celui-ci est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. De plus, sa jacobienne vaut

$$\mathrm{Jac}\Psi(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial_{x_1}\varphi & \partial_{x_2}\varphi & 1 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant vaut 1.

Enfin, on observe que l'image du demi-espace droit $\mathbb{R}^3_+$ par Ψ est exactement le domaine Ω qui nous intéresse. On définit donc un nouveau champ de vecteur $\tilde{F}$ par la formule

$$\tilde{F} = F \circ \Psi.$$

On calcule immédiatement

$$(\mathrm{div}\, \tilde{F})(\tilde{x}) = (\mathrm{div}\, F)(\Psi(\tilde{x})) + \partial_{x_1}\varphi(\tilde{x})(\partial_{x_3}F_1)(\Psi(\tilde{x})) + \partial_{x_2}\varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)(\partial_{x_3}F_2)(\Psi(\tilde{x})).$$

On remarque les deux derniers termes s'écrivent comme des dérivées par rapport à $\tilde{x}_3$. Autrement dit si on définit un nouveau champ de vecteur

$$G(\tilde{x}) = \tilde{F}(\tilde{x}) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(\partial_{x_1}\varphi)\tilde{F}_1 - (\partial_{x_2}\varphi)\tilde{F}_2 \end{pmatrix},$$

alors on a montré que

$$(\mathrm{div}\, G)(\tilde{x}) = (\mathrm{div}\, F)(\Psi(\tilde{x})).$$

On intègre alors cette égalité sur le demi-espace $\mathbb{R}^3_+$ pour obtenir

$$\int_{\mathbb{R}^3_+} (\mathrm{div}\, G)(\tilde{x})\, d\tilde{x} = \int_{\mathbb{R}^3_+} (\mathrm{div}\, F)(\Psi(\tilde{x}))\, d\tilde{x}.$$

Comme le Jacobien de Ψ vaut 1 partout et que Ψ envoie $\mathbb{R}^3_+$ sur Ω, on voit que le second terme vaut exactement $\int_\Omega \mathrm{div}\, F\, dx$. Quant au premier terme on peut lui appliquer la formule de Stokes sur un demi-espace que nous avons prouvée dans le paragraphe précédent. On a donc finalement établi

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, F\, dx = -\int_{\mathbb{R}^2\times\{0\}} G_3\, d\sigma = -\int_{\mathbb{R}^2} G_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0)\, d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2.$$

Par définition de G ceci s'écrit finalement

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{div}\, F\, dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_{x_1}\varphi)\tilde{F}_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0) + (\partial_{x_2}\varphi)\tilde{F}_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0) - \tilde{F}_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, 0)\right] d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[(\partial_{x_1}\varphi)F_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) + (\partial_{x_2}\varphi)F_2(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - F_3(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \varphi(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)\right] d\tilde{x}_1 d\tilde{x}_2.\end{aligned}$$

Par les définitions rappelées plus haut (en particulier les formules (I.3), (I.4)), et en prenant garde à l'orientation de la normale, on a bien obtenu que

$$\int_\Omega \mathrm{div}\, F\, dx = \int_{\partial\Omega} (F \cdot n)\, d\sigma.$$

Bibliographie

[1] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[2] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[3] Philippe G. Ciarlet. *Linear and nonlinear functional analysis with applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2013.

[4] Françoise Demengel and Gilbert Demengel. *Espaces fonctionnels*. Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2007. Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles. [Application to the solution of partial differential equations].

[5] Claude Zuily. *Problems in Distributions and Partial Differential Equations*, volume 143. Elsevier, 1988.