Analyse numérique des EDP - Partiel du 2 Mars 2016
Avec son corrigé

Durée : 2h

Exercice 1

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $(\varphi_n)_n$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$. Donner la définition de la convergence de la suite $(\varphi_n)_n$ dans l'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\Omega)$.
2. On définit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$
Calculer f', f'' et $f^{(3)}$ au sens des distributions sur $\mathbb{R}$.
3. Enoncer le théorème de Lax-Milgram.

Corrigé :

1. Voir le cours.
2. On applique la définition du cours de la dérivée au sens des distributions (la fonction f est identifiée à sa distribution T_f). Ainsi pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a
$$\begin{aligned}\langle f', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -\langle f, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\varphi'(x)\,dx \\ &= -\int_{-\infty}^{0} x^2\varphi'(x)\,dx - \int_0^{+\infty} x\varphi'(x)\,dx.\end{aligned}$$
On effectue une intégration par parties dans les deux termes. Il n'y a pas de terme de bord car, d'une part, φ est à support compact (donc nulle à l'infini) et d'autre part les fonctions x et x^2 s'annulent en $x = 0$.
On obtient donc
$$\langle f', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_{-\infty}^{0} 2x\varphi(x)\,dx + \int_0^{+\infty} \varphi(x)\,dx,$$
et donc
$$\langle f', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \langle g, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}},$$
où g est la fonction définie par
$$g(x) = 2x1_{]-\infty,0[}(x) + 1_{]0,+\infty[}(x).$$
Ainsi, la dérivée de f au sens des distributions, est en fait une fonction L^2_{loc} donnée par
$$f' = g.$$
Continuous pour calculer la dérivée seconde
$$\begin{aligned}\langle f'', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} &= -\langle f', \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \\ &= -\langle g, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} \\ &= -\int_{-\infty}^{0} 2x\varphi'(x)\,dx - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx\end{aligned}$$
On intègre par parties dans la première intégrale et on observe qu'il n'y encore aucun terme de bord. La seconde intégrale se calcule immédiatement. Il vient
$$\langle f'', \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = \int_{-\infty}^{0} 2\varphi(x)\,dx + \varphi(0).$$

Le premier terme correspond à la fonction $2.1_{]-\infty,0[}$ et le second à la masse de Dirac en 0. On trouve donc

$$f'' = 2.1_{]-\infty,0[} + \delta_0.$$

Pour terminer, on écrit

$$\langle f^{(3)}, \varphi\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -\langle f'', \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -2\int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx + \langle \delta_0, \varphi'\rangle_{\mathcal{D}',\mathcal{D}} = -2\varphi(0) + \varphi'(0),$$

ce qui prouve que

$$f^{(3)} = -2\delta_0 + \delta_0'.$$

3. Voir le cours.

■

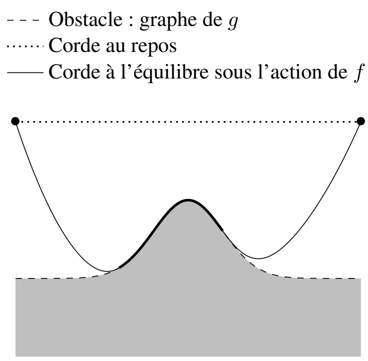
Exercice 2 (Le problème de l'obstacle)

On considère une corde élastique au repos de longueur 1 fixée à ses deux extrémités à l'altitude 0. Celle-ci se situe au dessus d'un obstacle modélisé par une fonction $g : \overline{I} \to \mathbb{R}$, qu'on suppose de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement négative. On a noté $I =]0,1[$.
On soumet la corde à une densité de force notée $f : \overline{I} \to \mathbb{R}$ et supposée continue. L'ensemble des configurations possibles pour la corde est donc décrit par

$$X = \{v \in H_0^1(I),\ \text{ tels que }\ v \geq g\},$$

et l'énergie associée à une configuration $v \in X$ est définie, comme dans le cas étudié en cours mais avec une constante $k = 1$, par

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_0^1 |v'|^2\,dx - \int_0^1 fv\,dx.$$



La physique nous dit, et nous l'admettrons, que la position d'équilibre $u \in X$ de la corde vérifie

$$E(u) = \inf_{v\in X} E(v).$$

Le but de l'exercice est d'étudier ce problème d'optimisation et d'en caractériser l'unique solution.

1. **Préliminaires :**
   (a) Montrer que si $u, v \in X$ alors $\frac{u+v}{2} \in X$.
   (b) Montrer que X est un sous-ensemble fermé de $H^1(I)$.
2. **Résolution du problème de minimisation :**
   (a) Montrer que $\inf_X E > -\infty$. On notera $I = \inf_X E$.
   (b) Justifier l'existence d'une suite $(u_n)_n \subset X$ vérifiant

$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} I.$$

   (c) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $H_0^1(I)$. En déduire qu'elle converge vers une fonction $u \in H_0^1(I)$ puis montrer que $u \in X$.
   (d) Montrer que $E(u) = I$.

3. **Inégalités variationnelles :** On cherche maintenant à établir les équations satisfaites par la solution u du problème de minimisation ci-dessus.

   (a) Soit $v \in X$ quelconque. Justifier que, pour $0 \leq t \leq 1$, on a $u + t(v-u) \in X$.
   Calculer $E(u + t(v-u))$, pour $t \in [0,1]$, et en déduire que u vérifie les *inégalités variationnelles* suivantes
   $$\int_0^1 u'(v-u)'\,dx \geq \int_0^1 f(v-u)\,dx, \;\; \forall v \in X. \tag{$\star$}$$

   (b) Soient $u_1, u_2 \in X$ deux solutions de ($\star$). Démontrer que
   $$\int_0^1 |u_1' - u_2'|^2\,dx \leq 0.$$
   En déduire que la solution u de ($\star$) est unique dans X.

4. **Problème aux limites :** Dans la suite, on suppose que la solution obtenue dans les questions précédentes vérifie $u \in H^2(I)$.
   On notera dans la suite
   $$H^1_{0,+}(I) = \{w \in H^1_0(I), \text{ tel que } w \geq 0\}, \;\; \text{et} \;\; L^2_+(I) = \{w \in L^2(I), \text{ tel que } w \geq 0\},$$
   et on **admettra** que $H^1_{0,+}(I)$ est dense dans $L^2_+(I)$ (pour la topologie de L^2).

   (a) i. Soit $F \in L^2(I)$ une fonction vérifiant
   $$\int_0^1 Fw\,dx \geq 0, \;\; \forall w \in H^1_{0,+}(I).$$
   Montrer que $F \geq 0$ presque partout.

   ii. En considérant des fonctions test de la forme $v = u + w$, avec $w \in H^1_{0,+}(I)$, montrer que $-u'' \geq f$ presque partout dans I.

   (b) Soit $J \subset I$ un intervalle ouvert non vide tel que $u > g$ dans J et soit $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ une fonction test telle que $\operatorname{Supp}\varphi \subset J$.

   i. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $u + \delta\varphi \in X$ et $u - \delta\varphi \in X$.

   ii. En déduire que
   $$\int_0^1 u'\varphi'\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx.$$

   iii. Montrer que $-u'' = f$ dans J.

   (c) En conclure que u vérifie les équations suivantes
   $$\left\{\begin{array}{r} -u'' \geq f, \text{ dans } I, \\ u \geq g, \text{ dans } I, \\ (-u''-f)(u-g) = 0, \text{ dans } I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{array}\right. \tag{$\star\star$}$$

   (d) On souhaite maintenant montrer que ($\star\star$) admet une unique solution dans $H^2(I)$ (qui sera donc celle construite dans la question 2).
   Soit donc $\tilde{u} \in H^2(I)$ une solution de ($\star\star$) quelconque.

   i. Montrer que pour tout $v \in X$, on a
   $$(-\tilde{u}'' - f)(v-g) \geq 0,$$
   et en déduire que
   $$(-\tilde{u}'' - f)(v-\tilde{u}) \geq 0.$$

   ii. Montrer que $\tilde{u}$ vérifie ($\star$) et conclure.

Corrigé :

1. (a) $H^1_0(I)$ est un espace vectoriel donc $u, v \in H^1_0(I) \Rightarrow \frac{u+v}{2} \in H^1_0(I)$. De plus, on vérifie aisément que $u \geq g$

et $v \geq g$ impliquent que $\frac{u+v}{2} \geq g$.

(b) Soit $(u_n)_n \subset X$ une suite qui converge vers une fonction u dans H^1. En dimension 1, la convergence H^1 implique la convergence uniforme sur $\overline{I}$ et donc à plus forte raison la convergence simple. Nous avons donc bien d'une part

$$u(0) = \lim_{n\to\infty} u_n(0) = 0, \ \ u(1) = \lim_{n\to\infty} u_n(1) = 0,$$

et d'autre part, pour tout $x \in I$

$$\Big(u_n(x) \geq g(x), \ \forall n \geq 0\Big) \Rightarrow u(x) \geq g(x).$$

Ainsi $u \in X$ et X est bien un fermé de $H^1(I)$.

2. (a) On a $X \subset H^1_0(I)$ et donc $\inf_X E \geq \inf_{H^1_0} E$, or nous avons vu en cours que $\inf_{H^1_0} E > -\infty$, ce qui implique que l'infimum sur X de E est également fini.

Si on ne se souvient plus du résultat du cours, on peut le redémontrer en utilisant successivement les inégalités de Cauchy-Schwarz, de Poincaré et de Young de la façon suivante

$$\left|\int_0^1 fv\,dx\right| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq C_P\|f\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}\|v'\|^2_{L^2} + \frac{C_P^2}{2}\|f\|^2_{L^2},$$

ce qui montre que

$$E(v) \geq -\frac{C_P^2}{2}\|f\|^2_{L^2}, \ \ \forall v \in X.$$

(b) Par définition de la borne inférieure, la quantité $I + \frac{1}{n}$ avec $n \geq 1$, n'est pas un minorant de E sur X. Ainsi il existe $u_n \in X$ telle que

$$I \leq E(u_n) \leq I + \frac{1}{n}.$$

Ceci implique, par le théorème des gendarmes, que $(E(u_n))_n$ converge vers I.

(c) C'est exactement le même calcul que dans le cours. Le seul point important et nouveau consiste à utiliser la question 1.a) pour constater que pour tout $n, p \geq 0$, on a $\frac{u_n+u_{n+p}}{2} \in X$. Ainsi, nous pouvons écrire à bon droit

$$I \leq E\left(\frac{u_n + u_{n+p}}{2}\right),$$

et par le même calcul que dans le cours (identité du parallélogramme) on obtient

$$E\left(\frac{u_n + u_{n+p}}{2}\right) = \frac{1}{2}(E(u_n) + E(u_{n+p})) - \frac{1}{8}\|u_n' - u_{n+p}'\|^2_{L^2},$$

ce qui fournit, *in fine*,

$$\frac{1}{8}\|u_n' - u_{n+p}'\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{2}(E(u_n) - I) + \frac{1}{2}(E(u_{n+p}) - I).$$

La quantité de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini, uniformément en p, ce qui montre, avec l'inégalité de Poincaré, que $(u_n)_n$ est de Cauchy dans $H^1_0(I)$.

On note $u \in H^1_0(I)$ sa limite. Comme tous les u_n sont dans X et que cet ensemble est fermé d'après la question 1.b) on déduit que $u \in X$.

(d) La convergence de u_n vers u dans H^1 implique en particulier la convergence de u_n' vers u' dans L^2 et donc nous avons

$$\int_0^1 |u_n'|^2\,dx \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 |u'|^2\,dx.$$

De plus, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left|\int_0^1 fu_n\,dx - \int_0^1 fu\,dx\right| \leq \|f\|_{L^2}\|u_n - u\|_{L^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi, on peut passer à la limite dans les deux termes qui définissent l'énergie E et obtenir

$$E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} E(u).$$

Par définition de la suite minimisante $(u_n)_n$ (question 2.b) on trouve bien $E(u) = I$.

3. (a) Il s'agit du même raisonnement qu'en 1.a) Il suffit de remarquer que $u + t(v - u) = tv + (1 - t)u$ et que t et $1 - t$ sont des coefficients positifs. Ainsi, si $u \geq g$ et $v \geq g$, on a bien $tv + (1 - t)u \geq tg + (1 - t)g = g$. On suit l'énoncé et on calcule en développant le carré

$$E(u + t(v - u)) = E(u) + t\left(\int_0^1 u'(v - u)'\, dx - \int_0^1 f(v - u)\, dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_0^1 |v' - u'|^2\, dx.$$

Comme u est le minimiseur de E sur X et que $u + t(v - u) \in X$, on a $E(u) \leq E(u + t(v - u))$ ce qui fournit les inégalités

$$t\left(\int_0^1 u'(v - u)'\, dx - \int_0^1 f(v - u)\, dx\right) + \frac{t^2}{2}\int_0^1 |v' - u'|^2\, dx \geq 0, \ \ \forall t \in [0, 1].$$

Pour tout $t > 0$, on peut diviser l'inégalité par t sans changer de signe et obtenir

$$\left(\int_0^1 u'(v - u)'\, dx - \int_0^1 f(v - u)\, dx\right) + \frac{t}{2}\int_0^1 |v' - u'|^2\, dx \geq 0, \ \ \forall t \in]0, 1].$$

En passant à la limite quand $t \to 0$, on trouve bien l'inégalité demandée dans l'énoncé.

(b) On prend l'inégalité ($\star$) vérifiée par u_1 avec $v = u_2$ comme fonction test

$$\int_0^1 u_1'(u_2 - u_1)'\, dx \geq \int_0^1 f(u_2 - u_1)\, dx,$$

puis l'inégalité ($\star$) vérifiée par u_2 avec $v = u_1$ comme fonction test

$$\int_0^1 u_2'(u_1 - u_2)'\, dx \geq \int_0^1 f(u_1 - u_2)\, dx.$$

Par sommation des deux inégalités, il vient

$$\int_0^1 (u_1' - u_2')(u_2' - u_1')\, dx \geq 0,$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int_0^1 |u_1' - u_2'|^2\, dx \leq 0.$$

Comme la fonction sous l'intégrale est positive ou nulle, cette inégalité nous dit que $(u_1 - u_2)' = 0$ et donc que $u_1 - u_2$ est une constante. Grâce aux conditions aux limites en $x = 0$ et $x = 1$, cette constante ne peut être que 0 et donc on a bien établi que $u_1 = u_2$.

4. (a) i. En utilisant le résultat de densité admis et l'hypothèse sur F, on obtient que

$$\int_0^1 Fw\, dx \geq 0, \ \ \forall w \in L^2_+(I).$$

On applique cette propriété à $w = |F| - F$ qui est bien dans $L^2_+(I)$, ce qui donne

$$\int_0^1 F(|F| - F)\, dx \geq 0,$$

ou encore

$$\int_0^1 |F|(|F| - F)\, dx \leq 0.$$

Comme la fonction $|F|(|F| - F)$ est positive, on en déduit que $|F|(|F| - F) = 0$ presque partout, et donc que $F = |F|$ presque partout. Ceci montre bien *in fine* que $F \geq 0$ presque partout.

ii. Soit $w \in H^1_{0,+}(I)$. Comme $u \in X$ et $w \geq 0$, on a bien $v = u + w \in X$. En appliquant l'inégalité ($\star$) à ce choix de v, on trouve

$$\int_0^1 u'w'\, dx \geq \int_0^1 fw\, dx.$$

On intègre par parties le premier terme (ce qui est licite vu que $u \in H^2(I)$) et on obtient

$$\int_0^1 (-u'' - f)w\, dx \geq 0, \tag{1}$$

car les termes de bord sont nuls (vu que $w(0) = w(1) = 0$). Il suffit alors d'appliquer la question précédente à $F = -u'' - f$.

(b) i. On remarque d'abord que pour n'importe quelle valeur de δ, nous avons $u \pm \delta\varphi \in H_0^1(I)$. La difficulté est donc de montrer que $u \pm \delta\varphi \geq g$ pour un choix convenable de δ.

On note $K = \mathrm{Supp}\,\varphi$ qui est donc un compact inclus dans J. Comme u et g sont continues et vérifient $u - g > 0$ sur K, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $u - g \geq \varepsilon$ sur K. On prend alors n'importe quel $\delta > 0$ vérifiant $\delta < \frac{\varepsilon}{\|\varphi\|_\infty}$. De sorte que pour tout $x \in K$, on a

$$(u \pm \delta\varphi)(x) = u(x) \pm \delta\varphi(x) \geq u(x) - \delta|\varphi(x)| \geq u(x) - \delta\|\varphi\|_\infty \geq u(x) - \varepsilon.$$

Par choix de ε, on a bien $u(x) - \varepsilon \geq g(x)$ et donc finalement $(u \pm \delta\varphi)(x) \geq g(x)$.

Pour les x qui ne sont pas dans K, on a $\varphi(x) = 0$ et donc $(u \pm \delta\varphi)(x) = u(x) \geq g(x)$.

On a bien montré que $u \pm \delta\varphi \in X$.

ii. D'après la question i), on peut prendre $v = u + \delta\varphi$ et $v = u - \delta\varphi$ dans ($\star$), ce qui donne les deux inégalités

$$\delta \int_0^1 u'\varphi'\,dx \geq \delta \int_0^1 f\varphi\,dx,$$
$$-\delta \int_0^1 u'\varphi'\,dx \geq -\delta \int_0^1 f\varphi\,dx.$$

Comme $\delta \neq 0$, ces deux inégalités fournissent bien l'égalité attendue.

iii. L'égalité de la question ii) est valable pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(J)$, et elle montre exactement que la dérivée au sens des distributions dans J de u' est égale à $-f$, ce qui exprime bien l'égalité $-u'' = f$ dans J.

(c) La première inégalité provient de la question a). La seconde inégalité ainsi que les conditions aux limites sont contenues dans la définition de l'espace X.

Il reste à montrer que le produit $(-u'' - f)(u - g)$ est nul.

Pour cela, on considère un point $x \in I$ tel que $(u - g)(x) \neq 0$. Comme u et g sont continues, il existe un intervalle ouvert J contenant ce point x et tel que $u > g$ dans J. D'après la question b) on a alors $-u'' = f$ dans J et donc en particulier $(-u'' - f)(u - g) = 0$ dans J. Le résultat est démontré.

(d) i. Comme $v \in X$, on a $v - g \geq 0$ et donc on peut multiplier l'inégalité $-\tilde{u}'' \geq f$ par $v - g$ sans changer de signe. Nous obtenons

$$(-\tilde{u}'' - f)(v - g) \geq 0, \text{ presque partout.}$$

On soustrait maintenant l'égalité $(-\tilde{u}'' - f)(\tilde{u} - g) = 0$ pour obtenir

$$(-\tilde{u}'' - f)(v - \tilde{u}) \geq 0, \text{ presque partout.}$$

ii. Nous intégrons l'inégalité précédente sur I pour obtenir

$$-\int_0^1 \tilde{u}''(v - \tilde{u})\,dx \geq \int_0^1 f(v - \tilde{u})\,dx.$$

On peut intégrer le premier terme par parties, en observant que les termes de bord sont nuls car $\tilde{u}$ et v sont nuls en $x = 0$ et $x = 1$. Nous obtenons le résultat attendu

$$\int_0^1 \tilde{u}'(v - \tilde{u})'\,dx \geq \int_0^1 f(\tilde{u} - g)\,dx.$$

Ainsi $\tilde{u} \in X$ vérifie les inégalités variationnelles ($\star$) dont on a montré précédemment qu'elles admettaient une unique solution qui ne peut être que la fonction u obtenue dans la question 2)

■