Analyse Numérique - TP no 3

Schémas aux différences finies pour les problèmes elliptiques 1D

1 Equation de Poisson

On s'intéresse dans cette partie à la résolution par un schéma aux différences finies du problème

$$\begin{cases} -u'' = f(x), \ \ \forall x \in]0,1[, \\ \ \ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

1. Pour construire des solutions exactes du problème (1) afin de pouvoir tester les schémas, on utilise la *tricherie* suivante : on choisit une fonction suffisament régulière u vérifiant $u(0) = u(1) = 0$ puis on calcule sur le papier la fonction f définie par $f = -u''$. Cette fonction f est ensuite utilisée comme donnée dans le schéma.
   Calculer ainsi les termes sources f associés, par exemple, aux solutions suivantes :
   $$u_1(x) = \sin(\pi x),$$
   $$u_2(x) = x^2(1-x)^2.$$
2. On souhaite programmer et tester le schéma vu en cours dans le cas d'un maillage uniforme.
   (a) Pour cela, une fois le maillage $(x_i)_i$ construit dans Scilab, on construira la matrice A du système, puis le second membre F correspondant à la donnée f. On calculera [1] alors la solution U du système linéaire $AU = F$.
   (b) On tracera ensuite sur le même graphique la courbe de la solution exacte $\bar{U} = (u(x_i))_{1\leq i\leq n}$ et celle de la solution approchée U.
   (c) Vérifier que le schéma est effectivement exact pour certaines solutions u non nulles bien choisies.
   (d) Pour des solutions u pour lesquelles le schéma n'est pas exact, mettre en évidence l'ordre de convergence du schéma en calculant l'erreur $\|U - \bar{U}\|_\infty$ pour différentes valeurs du pas d'espace Δx. On pourra tracer l'erreur en fonction de Δx dans une échelle logarithmique.
3. Utiliser le schéma précédent pour résoudre le problème (1) avec le terme source donné par
   $$f = 1_{[1/4,1/2]}.$$
   On pourra vérifier que la solution exacte du problème est la fonction suivante (noter qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ - en particulier dans H^1 - mais pas de classe $\mathcal{C}^2$) :
   $$u(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{32}x, \ \ \forall x < \dfrac{1}{4}, \\ -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{13}{32}x - \dfrac{1}{32}, \ \ \forall x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right], \\ \dfrac{3}{32}(1-x), \ \ \forall x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$
   Peut-on conjecturer l'ordre de convergence du schéma ? Commentaires ?
4. On s'intéresse maintenant au problème (1) avec de nouvelles conditions aux limites :
   $$u(0) = \alpha, \ \ u(1) = \beta,$$
   où α et β sont deux valeurs réelles données.
   Proposer (sur le modèle de ce qu'on a vu en cours) un schéma aux différences finies pour ce problème et donner son écriture sous la forme d'un système linéaire $AU = F$.
   Programmer le schéma obtenu, le tester sur diverses solutions.
5. On revient au problème initial (1). Programmer et tester le schéma aux différences finies vu en cours dans le cas d'un maillage non-uniforme.

1. Cette partie du TP sera l'occasion de discuter des différentes façons d'utiliser Scilab pour résoudre un tel système, en utilisant éventuellement la structure **creuse** de la matrice.

2 Un autre problème elliptique

1. On s'intéresse au problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + q(x)u = f(x), & \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

où q est une fonction continue **positive** donnée.
On cherche à approcher la solution de ce problème par un schéma aux différences finies sur un maillage **uniforme** de l'intervalle $[0,1]$.

   (a) En vous basant sur le schéma étudié en cours pour l'équation de Poisson, proposer un schéma aux différences finies pour ce problème. Démontrer que le schéma vérifie le principe du maximum discret, en déduire que ce schéma admet une unique solution pour toute donnée f.

   (b) Programmer le schéma et le tester pour diverses fonctions q et diverses solutions u.

   (c) Si on prend maintenant $q(x) = -\pi^2$ et $f(x) = \sin(\pi x)$, que constate-t'on ?

2. On s'intéresse maintenant au problème suivant

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où k est une fonction donnée régulière et bornée, strictement positive sur $[0,1]$.
On cherche à approcher la solution de ce problème par un schéma aux différences finies sur un maillage **uniforme** de l'intervalle $[0,1]$.

   (a) On propose le schéma suivant

$$-\frac{k\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} - k\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\},$$

   avec $u_0 = u_{n+1} = 0$.
   Démontrer que ce schéma est consistant avec le problème (3) et préciser l'ordre de consistance en norme $\|\cdot\|_\infty$.

   (b) Démontrer que ce schéma vérifie le principe du maximum discret et en déduire que celui-ci admet une unique solution pour toute donnée f.

   (c) Ecrire le schéma sous la forme d'un système linéaire $AU = F$, en précisant la matrice A. Programmer ce schéma et le tester pour diverses fonctions k et diverses solutions u.

   (d) On peut montrer la stabilité L^∞ de ce schéma par une méthode similaire à celle vue en cours et en TD, c'est néanmoins un peu technique et on ne le fera pas ici. Comment peut-on tester *numériquement* cette propriété du schéma ?

   (e) On suppose maintenant que l'on ne connaît les valeurs de la fonction k qu'aux points $(x_i)_i$ du maillage. Proposer un schéma aux différences finies, en s'inspirant de ce qui précède, qui n'utilise que ces valeurs de la fonction k.