Master $1^{ère}$ année de Mathématiques

CMI, Université de Provence
Année 2010-2011

Analyse Numérique - TP no 2

Schémas aux différences finies pour l'équation de transport 1D

On s'intéresse à la résolution par des schémas aux différences finies de l'équation de transport à vitesse constante

$$\begin{cases} \partial_t u + c\,\partial_x u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

où $t \in [0,T]$, $x \in]0,1[$. On prendra par exemple l'instant final $T = 1$.

A propos des conditions au bord : Pour résoudre ce problème sur l'intervalle borné $]0,1[$ il est nécessaire de prescrire des conditions au bord (appelées aussi *conditions aux limites*). En général, le choix des conditions au bord est prescrit à partir de la modélisation. Ici, pour les besoins du TP, on va se placer dans un cadre 1-périodique et on choisira une donnée initiale à support compact dans $]0,1[$ (et donc prolongée par périodicité) - Voir le préliminaire.

Points de discrétisation : On se donne deux entiers N et M, on définit le pas d'espace et le pas de temps par

$$\Delta x = \frac{1}{N-1}, \;\; \Delta t = \frac{T}{M-1}.$$

On considère les points de discrétisation en espace définis par

$$x_i = (i-1)\Delta x, \;\; \forall 1 \leq i \leq N,$$

de sorte que $x_1 = 0$ et $x_M = 1$. On considère enfin les instants de discrétisation t^n définis par

$$t^n = (n-1)\Delta t, \;\; \forall 1 \leq n \leq M,$$

de sorte que $t^1 = 0$ et $t^M = T$.

Ces définitions diffèrent légèrement de celles vues en cours à cause du fait que les tableaux en Scilab sont indexés à partir de l'indice 1 et non pas de l'indice 0 ...

Données du TP :

- Le but de ce TP est la mise en oeuvre et l'étude du comportement des quatre schémas suivants pour le problème (1) :

$$\text{Schéma centré : } \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0. \tag{SC}$$

$$\text{Schéma décentré à gauche : } \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} = 0. \tag{SDAG}$$

$$\text{Schéma décentré à droite : } \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0. \tag{SDAD}$$

$$\text{Schéma de Lax-Friedrichs : } \frac{u_i^{n+1} - \frac{u_{i-1}^n + u_{i+1}^n}{2}}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0. \tag{SLF}$$

- On pourra, par exemple, utiliser les données initiales suivantes (prolongées par "périodicité")

$$u_0(x) = \exp\left(-\frac{(x-0.5)^2}{\alpha}\right), \;\; \forall x \in]0,1[. \tag{2}$$

$$u_0(x) = \tanh\left(\frac{x-0.2}{\alpha}\right) - \tanh\left(\frac{x-0.6}{\alpha}\right) \;\; \forall x \in]0,1[, \tag{3}$$

  avec $\alpha > 0$ suffisament petit (on pourra par exemple prendre $\alpha = 10^{-2}$).

Préliminaire

Vérifier que si u_0 est une fonction 1-périodique alors l'unique solution u de (1) dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ est également 1-périodique par rapport à la variable x, c'est-à-dire

$$u(t, x+1) = u(t,x), \;\;\; \forall t \geq 0, \; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pourquoi peut-on raisonnablement considérer que les données initiales (2) et (3) peuvent être prolongées par périodicité tout en restant des fonctions régulières ?

1 Stabilité

1. Programmer les schémas proposés ci-dessus **en tenant compte des conditions de 1-périodicité**.
2. Illustrer les propriétés de stabilité des schémas (SC), (SDAG) et (SDAD) (vues en cours) en fonction des valeurs des paramètres c, Δt et Δx.

   Pour cela, on choisira une donnée initiale U^0 aléatoire pour le schéma (commande Scilab `rand`) et on s'intéressera à l'évolution de la solution U^n du schéma par rapport à n.
3. En reprenant la démonstration du cours, déterminer une condition liant c, Δt et Δx pour laquelle le schéma de Lax-Friedrichs (SLF) est monotone, donc L^∞-stable. Illustrer la pertinence de cette condition par quelques exemples numériques bien choisis.
4. On s'intéresse ici au schéma considéré dans l'exercice 8 de la feuille de TD :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - c^2\frac{\Delta t}{2}\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0.$$

   Programmer ce schéma (appelé : schéma de Lax-Wendroff) et vérifier numériquement que ce schéma n'est jamais monotone (sauf dans des cas triviaux ...). Vérifier numériquement, en revanche, la stabilité L^2 de celui-ci sous la condition $|c|\Delta t/\Delta x \leq 1$.

2 Résultats qualitatifs

Tester maintenant les différents schémas programmés précédemment en prenant pour donnée initiale U^0 les valeurs exactes de la donnée initiale u_0 du problème (1), c'est-à-dire

$$U_i^0 = u_0(x_i), \ \ \forall i.$$

On pourra utiliser successivement les données (2) et (3) et proposer dans chaque cas une animation qui montre, sur le même graphique, l'évolution de la solution approchée et de la solution exacte au cours du temps, pour un choix convenable du pas de temps et du pas d'espace, vérifiant la condition de stabilité. Commenter les résultats observés dans les différents cas.

3 Estimation de l'erreur d'approximation

Pour chaque schéma, chaque donnée initiale u_0 et pour des valeurs de Δt et Δx bien choisies, calculer l'erreur d'approximation à l'instant final en norme infinie, c'est-à-dire la quantité

$$E(\Delta t, \Delta x) = \|U^M - \widetilde{U}^M\|_\infty,$$

où $\widetilde{U}^M$ est le vecteur *solution exacte* donné par $(u(t^M, x_i))_{1\leq i\leq N}$.

Tracer des courbes (en échelle logarithmique) illustrant le comportement de l'erreur E en fonction de Δt et Δx. On pourra imposer à Δt et Δx d'être liés par une relation qu'on choisira convenablement.