Analyse Numérique - TP no 1

Equations différentielles ordinaires

On s'intéresse dans ce TP à la résolution de problèmes de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} y'(t) = F(t, y(t)), & \forall t \in [0, T], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{1}$$

où $T > 0$ est fixé et $y_0 \in \mathbb{R}^d$ est la donnée initiale.

Remarques préliminaires

Il faut essayer d'écrire vos programmes SCILAB en gardant en tête les points suivants :

- Votre programme doit être **souple** au maximum. Cela signifie que l'on devrait pouvoir réutiliser le programme en changeant les données de base du problème sans avoir à tout refaire. Il ne faut donc pas hésiter à utiliser des variables, à définir des fonctions externes séparément du programme principal dans une ou plusieurs bibliothèques de fonctions, etc ...
- Votre programme doit être lisible par quelqu'un d'autre que vous (et par vous-mêmes si vous le retravaillez dans plusieurs semaines !). Pour cela, il ne faut pas hésiter à utiliser les **commentaires** pour expliquer le déroulement du programme, à donner des **noms suffisamment explicites** aux variables utilisées ou au moins à expliquer ce qu'elles sont censées contenir dans un commentaire, à mettre des **titres** et des **légendes** aux figures, à utiliser des couleurs variées pour différencier plusieurs courbes sur un même graphique, etc ...

Ces quelques conseils vous feront perdre du temps au début mais vous en feront gagner dans le long terme.

1 Calculs exacts

On se place dans le cas $d = 1$ et on considère les valeurs possibles suivantes de la fonction F qui définit l'équation différentielle :

$$F_1(t, y) = ay, \quad \text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ constante donnée,} \tag{2}$$

$$F_2(t, y) = \cos(t)\, y, \tag{3}$$

$$F_3(t, y) = y(1 - y), \tag{4}$$

$$F_4(t, y) = \sin(y^2). \tag{5}$$

1. Vérifier que les fonctions données par (2)-(5) satisfont les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz. Que peut-on en déduire, sans calcul, sur l'existence et l'unicité de solutions ?

   Etudier très rapidement l'ensemble de définition des solutions maximales dans chacun des cas.
2. Calculer explicitement les solutions de (1) dans les trois cas (2), (3) et (4).
3. Ecrire des fonctions SCILAB qui calculent les solutions exactes ainsi obtenues sur un intervalle $[0, T]$ en fonction de la donnée initiale y_0 choisie.

2 Calcul approché des solutions

Dans le cas où $F = F_4$ est définie par (5), il n'y a pas de formule analytique simple donnant la solution. Il est donc nécessaire de procéder à une approximation numérique pour accéder à la solution.

On fixe le temps final du calcul $T > 0$ et on se donne un nombre entier M. Le pas de temps est défini par $\Delta t = \frac{T}{M}$. L'intervalle de temps $[0, T]$ est alors découpé en M intervalles $[t^n, t^{n+1}]$, $0 \leq n \leq M - 1$ avec $t^n = n\Delta t$.

1. Ecrire une fonction SCILAB qui permette de résoudre de façon approchée le problème de Cauchy (1) par la méthode d'Euler explicite. Le programme devra pouvoir traiter n'importe laquelle des fonctions F considérées plus haut (2)-(5).

2. Dans les cas (2)-(4), tracer sur un même graphique les valeurs approchées obtenues à la question précédente $(y^n)_{0\leq n\leq M}$ et les valeurs de la solution exacte $(y(t^n))_{0\leq n\leq M}$ calculée dans le paragraphe 1. Faire afficher l'erreur maximale commise définie par
$$E(\Delta t) = \sup_{n\leq M} |y(t^n) - y^n|.$$
3. En lançant plusieurs fois votre programme pour différentes valeurs de Δt, vérifier que le comportement de $E(\Delta t)$ en fonction de Δt est bien conforme aux résultats théoriques vus en cours.
4. Reprendre les questions précédentes avec la méthode d'Euler implicite. Quelle est la nouvelle difficulté que l'on rencontre et comment la résoudre ?
5. **Si vous avez complètement résolu et compris les questions précédentes :** Reprendre les deux premières questions avec une méthode numérique d'ordre 2, par exemple les deux méthodes explicites évoquées en cours.

3 Le cas des systèmes linéaires en dimension 2

Cette partie du TP fait écho aux questions 2 et 3 de l'exercice 3 de la première feuille de TD. On s'intéresse à la résolution numérique de l'équation $y' = Ay$ où A est une matrice carrée de taille $d = 2$.

1. Choisir un exemple (non trivial !) de matrice A définie négative et une donnée initiale y_0. Ecrire des fonctions SCILAB pour tracer sur un même graphe la solution exacte du problème [1] et les solutions approchées par les deux méthodes d'Euler.
2. En faisant varier le pas de temps Δt vérifier que des phénomènes non souhaités peuvent parfois se produire.
3. Mêmes questions avec une matrice A antisymétrique. On testera aussi la méthode d'ordre 2 proposée dans la feuille de TD.
4. Observer l'allure des solutions si A est quelconque (on pourra tester le cas d'une matrice non diagonalisable, ou le cas où les signes des valeurs propres de A sont différents).

4 Pour aller plus loin

- Illustrer en SCILAB le comportement des modèles présentés dans la feuille de TD : le modèle du pendule et le modèle de Lotka-Volterra :
  - Tracé des lignes de niveau des quantités invariantes.
  - Tracé des trajectoires : On observera l'influence de la méthode numérique utilisée et de la valeur du pas de temps choisi.
  - Illustrations de la stabilité des équilibres.
- Le logiciel SCILAB contient des routines pour résoudre les équations différentielles ordinaires. Essayez de reprendre ce TP en utilisant par exemple la routine `ode` et ses différentes options. On pourra s'aider de la documentation disponible sur la page WEB du cours.

`http://www.cmi.univ-mrs.fr/~fboyer/Enseignement/M1_AN/`

1. SCILAB calcule l'exponentielle de matrice par la commande `expm`