Analyse Numérique
Problèmes elliptiques

Exercice 1

On considère le problème de Poisson-Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} -\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x), & \forall x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On suppose que f et k sont continues sur $[0,1]$ et que $\inf_{[0,1]} k > 0$.

1. Trouver toutes les solutions de l'EDO $-\partial_x(k(x)\partial_x u) = f(x)$ vérifiant la condition $u(0) = 0$.
2. Montrer que parmi toutes les réponses à la question précédente, une seule fonction u vérifie **en plus** la condition $u(1) = 0$. En déduire que le problème (1) admet une unique solution.
3. Déterminer explicitement une fonction $G : [0,1]^2 \mapsto G(x,y)$ telle que l'unique solution de (1) s'écrit

$$u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\, dy, \quad \forall x \in [0,1]. \tag{2}$$

4. Vérifier que G est symétrique et positive. La fonction G s'appelle *la fonction de Green* associée au problème (1).
5. En déduire que le problème (1) satisfait le **principe du maximum fort** :
   – Si $f \geq 0$, l'unique solution u de (1) vérifie $u \geq 0$.
   – Si de plus, u s'annule dans l'intervalle ouvert $]0,1[$, alors u est identiquement nulle.
6. A partir de la formule (2), proposer une méthode numérique qui permette de calculer une approximation de la solution du problème (1) en connaissant f et k. Quels inconvénients voyez-vous à cette méthode ?
7. Reprendre les questions 1 à 5, en remplaçant les conditions aux limites par $u'(0) = u(1) = 0$.

Exercice 2 (Autour de l'inégalité de Poincaré)

Dans cet exercice on travaille sur un intervalle $I =]0, L[$ avec $L > 0$.

1. On souhaite démontrer l'inégalité de Poincaré suivante

$$\forall v \in H_0^1(]0,L[), \quad \|v\|_{L^2(I)} \leq \frac{L}{\pi} \|\partial_x v\|_{L^2(I)}. \tag{3}$$

   (a) Montrer que si on sait prouver (3) pour les fonctions $v \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,L[)$, alors on peut en déduire le résultat souhaité.
   (b) Démontrer l'inégalité (3) pour les fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(]0,L[)$ en utilisant les séries de Fourier.
   (c) Vérifier que la constante $\frac{L}{\pi}$ est **optimale**, c'est-à-dire que c'est la plus petite constante pour laquelle l'inégalité (3) est vraie. On pourra expliciter une fonction v pour laquelle (3) est une égalité.
   (d) Montrer que $v \in H_0^1(I) \mapsto \|\partial_x v\|_{L^2(I)}$ est une norme sur $H_0^1(I)$ équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$.
2. On introduit un nouvel espace fonctionnel

$$H_m^1(]0,L[) = \left\{ v \in H^1(]0,L[), \quad \int_0^L v(x)\, dx = 0 \right\}.$$

   En utilisant un procédé similaire au cas précédent, montrer que l'inégalité de type Poincaré suivante est également vraie, avec une constante optimale :

$$\forall v \in H_m^1(]0,1[), \quad \|v\|_{L^2(I)} \leq \frac{L}{\pi} \|\partial_x v\|_{L^2(I)}.$$

   Montrer que l'application $v \in H_m^1(I) \mapsto \|\partial_x v\|_{L^2(I)}$ est une norme sur $H_m^1(I)$ équivalente à $\|\cdot\|_{H^1(I)}$.

Exercice 3

On travaille dans l'intervalle $I =]0,1[$. Soient q et f deux fonctions continues sur $\overline{I}$. On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + q(x)u = f(x), \quad \forall x \in]0,1[, \\ \quad u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

1. Vérifier que si $q(x) = -\pi^2$ alors le problème est mal posé, c'est-à-dire :
   (a) Pour $f = 0$, il existe des solutions u **non nulles** de (4).
   (b) Il existe des fonctions f pour lesquelles (4) n'a aucune solution.

   Autrement dit, le problème (4) n'admet pas toujours des solutions, et s'il en existe elles sont nécessairement non uniques.
2. A partir de maintenant on suppose que la fonction q vérifie
$$\inf_I q > -\pi^2.$$
   Proposer une formulation variationnelle dans $H_0^1(I)$ du problème (4). Donner l'expression d'une fonctionnelle "énergie" $u \mapsto E(u)$ dont la solution de (4), si elle existe, serait un minimiseur.
3. Montrer que la fonctionnelle E obtenue est continue pour la topologie de $H_0^1(I)$.
4. Montrer que E est minorée sur $H_0^1(I)$ (on utilisera les résultats de l'exercice 2). En déduire l'existence d'une suite minimisante $(u_n)_n$, i.e. une suite vérifiant $E(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \inf_{v \in H_0^1(I)} E(v)$.
5. Démontrer que cette suite minimisante est de Cauchy dans $H_0^1(I)$.
6. Démontrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(I)$, tel que $E(u) = \inf_{v \in H_0^1(I)} E(v)$.

   Montrer que la fonction u ainsi obtenue est bien une solution faible du problème (4).
7. Démontrer que la fonction u est de classe $\mathcal{C}^2$ et que u est bien une solution du problème (4) au sens classique.
8. Quelle(s) étape(s) de la démonstration tombe(nt) en défaut quand $q(x) = -\pi^2$ (car d'après la question 1 le problème est mal posé) ?

Exercice 4 (Tiré de l'examen 2008/2009)

On s'intéresse dans cet exercice au problème suivant (où c est une fonction **positive** donnée de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et f une fonction continue sur $[0,1]$) :

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u + c(x)\partial_x u = f(x), \quad \forall x \in]0,1[\\ \quad u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

On **admet** que ce problème admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^2$ que l'on souhaite approcher à l'aide d'une méthode de différences finies. On se donne un maillage **uniforme** du segment $[0,1]$ constitué des points uniformément espacés $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = 1$, avec $\Delta x = 1/(N+1)$. On propose le schéma suivant

$$\forall 1 \leq i \leq N, \quad -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + c(x_i)\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} = f(x_i), \tag{6}$$

où on a posé $u_0 = u_{N+1} = 0$ pour prendre en compte les conditions aux limites du problème.

1. Montrer que le schéma (6) peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire $AU = F$, où A est une matrice carrée de taille $N \times N$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq N}$. On écrira précisément la matrice A et le second membre F.
2. La matrice A est-elle symétrique ? Que pouvez-vous dire de la structure de A ?
3. Enoncer et démontrer le principe du maximum discret pour la matrice A. En déduire que A est inversible.

4. Définir l'erreur de consistance $R = (R_i)_{1\leq i\leq N}$ associée à ce schéma numérique et à une solution u de classe $\mathcal{C}^3$ du problème (5). Montrer qu'il existe $M > 0$ ne dépendant que de c telle que

$$\|R\|_\infty = \sup_i |R_i| \leq M\Delta x(\|u''\|_\infty + \|u'''\|_\infty).$$

5. Soit $\tilde{u}$ l'unique solution du problème (5) pour la donnée f définie par $f(x) = 1$, pour tout $x \in [0, 1]$.
   (a) Montrer que $\tilde{u}$ est de classe $\mathcal{C}^3$.
   (b) On note $\tilde{U} = (\tilde{u}(x_i))_{1\leq i\leq N}$ et $\tilde{R} \in \mathbb{R}^N$ l'erreur de consistance du schéma (6) pour la solution $\tilde{u}$. On note D le vecteur de $\mathbb{R}^N$ dont toutes les composantes valent 1.
      i. Exprimer $A\tilde{U}$ en fonction de $\tilde{R}$ et D.
      ii. En déduire que si on pose
      $$\delta = \frac{1}{2M(\|\tilde{u}''\|_\infty + \|\tilde{u}'''\|_\infty)},$$
      alors on a la propriété suivante :
      $$\text{si } \Delta x \leq \delta, \text{ on a } \ A\tilde{U} \geq \frac{1}{2}D.$$

6. Montrer que, dès que $\Delta x \leq \delta$, on a
$$\|A^{-1}\|_\infty \leq 2\|\tilde{u}\|_{L^\infty}.$$
Comment s'appelle cette propriété du schéma numérique ?

7. Soit f un terme source continu quelconque et u la solution de (5) associée. On note $\bar{U} = (u(x_i))_{1\leq i\leq N}$, U la solution du schéma (6) et $E = \bar{U} - U$, l'erreur d'approximation. Montrer que si u est de classe $\mathcal{C}^3$, et si $\Delta x \leq \delta$ on a l'estimation
$$\|E\|_\infty \leq \tilde{M}\Delta x(\|u''\|_{L^\infty} + \|u'''\|_{L^\infty}),$$
où $\tilde{M} > 0$ est une constante qui de ne dépend ni de u ni de Δx.

8. Quel schéma proposeriez-vous dans le cas où c est négative ? On se contentera d'une réponse précise et concise.

Exercice 5 (Généralités sur les méthodes de Galerkin)

On a vu en cours que l'on pouvait résoudre d'un point de vue théorique l'équation de Poisson dans l'espace de Sobolev $H^1_0(I)$ *via* la formulation variationnelle du problème. Par exemple, pour le problème (1) de l'exercice 1, la formulation variationnelle s'écrit (avec $I =]0, 1[$)

$$\text{Trouver } u \in H^1_0(I) \text{ tel que } \int_I k(x)\nabla u(x)\nabla v(x)\,dx = \int_I f(x)v(x)\,dx,\ \ \forall v \in H^1_0(I). \qquad (\mathcal{P})$$

On suppose dans la suite que $k \in L^\infty(I)$ et $f \in L^2(I)$ et que de plus, il existe $\alpha > 0$ tel que $\inf_I k \geq \alpha$. On munit $H^1_0(I)$ de la norme $\|u\|_{H^1_0(I)} = \|\nabla u\|_{L^2(I)}$ (qui est équivalente à la norme H^1 d'après l'inégalité de Poincaré).

1. On introduit la forme bilinéaire $a : H^1_0(I) \times H^1_0(I) \mapsto \mathbb{R}$ définie par
$$a(u, v) = \int_I k(x)\nabla u(x)\nabla v(x)\,dx.$$
   (a) Montrer que a est continue et que $\|a\| \leq \|k\|_\infty$.
   (b) Montrer que a vérifie
   $$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2_{H^1_0(I)},\ \ \forall u \in H^1_0(I),$$
   on dit que a est **coercive**.

2. Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-espaces de dimension finie de $H_0^1(I)$, telle que $\dim V_n = n$. Démontrer que le problème suivant admet une unique solution notée u_n

$$\text{Trouver } u_n \in V_n \text{ tel que } \int_I k(x)\nabla u_n(x)\nabla v_n(x)\,dx = \int_I f(x)v_n(x)\,dx,\ \ \forall v_n \in V_n. \qquad (\mathcal{P}_n)$$

3. Démontrer que la solution u de $(\mathcal{P})$ et la solution u_n du problème $(\mathcal{P}_n)$ vérifient

$$d(u,V_n) \leq \|u-u_n\|_{H_0^1} \leq \frac{\|k\|_\infty}{\alpha} d(u,V_n),$$

où $d(u,V_n) = \inf_{v\in V_n} \|u-v\|_{H_0^1}$.

Exercice 6 (Méthode des éléments finis $\mathbb{P}^1$)

On prend encore les notations générales de l'exercice 3. Pour tout $n \geq 1$, on introduit une subdivision non uniforme

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1,$$

de l'intervalle I et on note $\Delta x_n = \sup_i |x_{i+1}-x_i|$ le pas de cette subdivision. On suppose que $\Delta x_n \to 0$ quand n tend vers l'infini.

Pour tout $i \in \{1,\cdots,n\}$, on appelle φ_i^n la fonction continue, affine sur chacun des intervalles de la subdivision et telle que

$$\varphi_i^n(x_j) = \delta_{i,j},\ \ \forall j \in \{0,\cdots,n+1\}.$$

1. Dessiner l'allure des fonctions φ_i^n, montrer qu'elles appartiennent à $H_0^1(I)$ et calculer leur dérivée faible $\nabla\varphi_i^n$.

2. On appelle V_n l'espace vectoriel engendré par les fonctions $(\varphi_i^n)_{1\leq i\leq n}$. On introduit l'application π_n définie par

$$v \in H_0^1(I) \mapsto \pi_n(v) = \sum_{i=1}^n v(x_i)\varphi_i^n.$$

   (a) Vérifier que π_n est bien définie et continue sur H_0^1. Que peut-on dire de sa norme ?

   (b) Pour tout $v \in H_0^1(I)$, calculer $\nabla(\pi_n(v))$. Démontrer que si $v \in \mathcal{C}^1(\overline{I})$ alors on a

$$\|\pi_n(v)\|_{H_0^1} = \|\nabla\pi_n(v)\|_{L^2} \leq \|\nabla v\|_{L^2}. \qquad (7)$$

   Démontrer que (7) est encore vraie pour tout $v \in H_0^1(I)$.

   (c) Montrer que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^2(\overline{I})$, on a

$$\|\pi_n(v)-v\|_{H_0^1(I)} \leq \Delta x_n \|v''\|_\infty.$$

3. En déduire que, si la solution u du problème $(\mathcal{P})$ est de classe $\mathcal{C}^2$, alors la solution u_n du problème $(\mathcal{P}_n)$ converge vers u et de plus

$$\|u-u_n\|_{H_0^1} \leq \frac{\|k\|_\infty\|u''\|_\infty}{\alpha}\,\Delta x_n.$$

   On a donc affaire à une méthode numérique d'ordre 1.

4. Ecrire le problème $(\mathcal{P}_n)$ sous la forme d'un système linéaire que l'on pourrait résoudre en pratique. On calculera explicitement la matrice du système ainsi que le second membre. Quelle est la forme particulière de cette matrice ?