Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2010-2011

Analyse Numérique
Equations de transport
Correction

Correction de l'exercice 1

Soit $(t,x) \mapsto u(t,x)$ une éventuelle solution régulière du problème considéré. La vitesse du transport étant constante, les courbes caractéristiques associées sont des droites données par

$$X(t,t_0,x_0) = x_0 + c(t-t_0).$$

Regardons comment la solution u évolue le long de ces courbes. Pour cela, on fixe $x_0 \in \mathbb{R}$ et on pose

$$\varphi(t) = u(t, X(t,0,x_0)) = u(t, x_0 + ct).$$

On calcule alors la dérivée de φ en utilisant le fait que u vérifie l'équation considérée :

$$\varphi'(t) = \partial_t u(t,x_0+ct) + c\partial_x u(t,x_0+ct) = f(t,x_0+ct).$$

Ainsi, φ' ne dépend que de f et on peut donc calculer φ par simple intégration

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(s)\,ds = u_0(x_0) + \int_0^t f(s,x_0+cs)\,ds.$$

On a donc montré la formule

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0, u(t,x_0+ct) = u_0(x_0) + \int_0^t f(s,x_0+cs)\,ds.$$

Il s'agit maintenant de *remonter* les caractéristiques, c'est-à-dire pour tout (t,x), on cherche x_0 vérifiant $x = x_0 + ct$, ce qui donne bien sûr $x_0 = x - ct$. Ainsi, on a

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \;\; u(t,x) = u_0(x-ct) + \int_0^t f(s, x + c(s-t))\,ds.$$

Ceci montre que, si la solution u existe, elle est nécessairement donnée par cette formule. En réalité tous les calculs effectués ci-dessus sont des équivalences et donc cette fonction u est bien solution. On peut bien entendu s'en convaincre en calculant ses dérivées partielles (sous l'hypothèse $f \in \mathcal{C}^1$).

Correction de l'exercice 2

1. Si $c \equiv 0$, le problème devient $\partial_t u + a(t,x)u = 0$, c'est-à-dire une équation différentielle ordinaire linéaire par rapport à la variable t, dans laquelle x n'est plus qu'un paramètre. Cette équation se résout à la main

$$u(t,x) = u_0(x)\exp\left(-\int_0^t a(s,x)\,ds\right).$$

2. La définition des courbes caractéristiques est donnée par le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t,s,x) = c(t, X(t,s,x)), \\ X(s,s,x) = x. \end{cases}$$

   Comme c est régulière, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et montre l'existence et l'unicité de solutions maximales à ce problème de Cauchy. De plus, comme c est supposée bornée, on a vu en cours que les solutions de ce problème sont nécessairement globales (car elles ne peuvent pas exploser en temps fini !).

3. Pour x fixé, on pose $\varphi(t) = u(t, X(t,0,x))$ et on effectue ce calcul (maintenant classique) :

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \partial_t u(t, X(t,0,x)) + \frac{d}{dt}X(t,0,x)\partial_x u(t, X(t,0,x))\\ &= \partial_t u(t, X(t,0,x)) + c(t, X(t,0,x))\partial_x u(t, X(t,0,x))\\ &= -a(t, X(t,0,x))u(t, X(t,0,x)) = -a(t, X(t,0,x))\varphi(t).\end{aligned}$$

4. On est *grosso modo* ramenés à la première question : φ vérifie une équation différentielle linéaire dont x est un paramètre. On obtient donc par calcul direct

$$u(t, X(t,0,x)) = \varphi(t) = \underbrace{u(0,x)}_{=u_0(x)} \exp\left(-\int_0^t a(s, X(s,0,x))\, ds\right).$$

   Il faut maintenant remonter les caractéristiques. Ainsi pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on introduit $x = X(0,t,y)$ de sorte que

$$u(t,y) = u_0(X(0,t,y)) \exp\left(-\int_0^t a(s, X(s,t,y))\, ds\right),$$

   ce qui donne l'unique solution du problème considéré.

5. A $t \geq 0$ fixé, il suffit de prendre la valeur absolue de la formule précédente et de majorer chaque terme pour avoir le premier résultat.

   Si maintenant a et u_0 sont positives, on voit sur la formule que u est bien toujours positive. Par ailleurs, on a les majorations

$$-a(s, X(s,t,y)) \leq -\inf(a), \quad \forall s,t,y \in \mathbb{R},$$
$$u_0(X(0,t,y)) \leq \sup u_0,$$

   qui donnent la seconde inégalité souhaitée.

6. La nouvelle équation proposée peut se mettre sous la forme précédente en remarquant qu'elle s'écrit

$$\partial_t u + c(t,x)\partial_x u + (a(t,x) + \partial_x c(t,x))u = 0.$$

   Dans le cas où $a \equiv 0$ et c indépendant de t, on peut appliquer la formule ci-dessus qui donne

$$u(t,x) = u_0(X(0,t,x)) \exp\left(-\int_0^t \partial_x c(X(s,t,x))\, ds\right).$$

   – Pour les points x tels que $c(x) = 0$, on sait que la caractéristique associée est constante $X(s,t,x) = x$ et on obtient donc

$$u(t,x) = u_0(x)\exp(-tc'(x)).$$

     Si maintenant $c(x) \neq 0$, on sait que $c(X(s,t,x)) \neq 0$ pour tous t et s (pourquoi ? ?). Calculons alors l'intégrale dans l'exponentielle en utilisant la définition des caractéristiques

$$\begin{aligned}\int_0^t \partial_x c(X(s,t,x))\, ds &= \int_0^t \underbrace{\frac{\partial_x c(X(s,t,x))}{c(X(s,t,x))}}_{=(\partial_x \log|c|)(X(s,t,x))} \underbrace{\frac{d}{ds}X(s,t,x)}_{=c(X(s,t,x))}\, ds\\ &= \int_{X(0,t,x)}^x (\partial_x \log|c|)(y)\, dy = \log\left|\frac{c(x)}{c(X(0,t,x))}\right| = \log\left(\frac{c(x)}{c(X(0,t,x))}\right),\end{aligned}$$

     car c ne peut changer de signe le long de la caractéristique. En remettant tout cela dans l'exponentielle, on a bien montré

$$u(t,x) = u_0(X(0,t,x))\frac{c(X(0,t,x))}{c(x)},$$

     ce qui est la formule attendue.

Correction de l'exercice 3

1. On regarde ici aussi l'évolution d'une solution éventuelle le long des caractéristiques (qui ici sont des droites) en fixant x et en posant $\varphi(t) = u(t, x + ct)$. On trouve
$$\varphi'(t) = \varphi(t)^2, \text{ avec } \varphi(0) = u_0(x) \le 0.$$
Comme $\varphi(0) \le 0$, cette équation différentielle a une solution définie sur tout $[0, +\infty[$ et donnée par
$$\varphi(t) = \frac{1}{t - \frac{1}{\varphi(0)}} = \frac{1}{t - \frac{1}{u_0(x)}}.$$
Ainsi, en remontant les caractéristiques on obtient la formule
$$u(t, x) = \frac{1}{t - \frac{1}{u_0(x-ct)}}.$$
2. Le début du calcul précédent est toujours valable, mais si $\varphi(0) = u_0(x)$ est strictement positif, on sait que l'EDO $\varphi' = \varphi^2$ explose au temps $\frac{1}{u_0(x)}$. Ainsi, le temps d'existence de la solution de l'équation aux dérivées partielles est le minimum de tous les temps d'explosion obtenus. Ainsi, on a trouvé
$$T^* = \frac{1}{\sup_{\mathbb{R}} u_0}.$$
La formule pour $u(t, x)$ obtenue ci-dessus est encore valable pour tous les $t < T^*$.
3. Les calculs sont strictement identiques en remplaçant la formule explicite des caractéristiques $x + ct$ par la formule générale $X(t, 0, x)$ qui dépend bien sûr de la vitesse c choisie.
Ce qu'on peut remarquer, c'est que l'équation différentielle qu'on obtient sur φ est strictement la même et donc que le temps d'existence maximal de la solution T^* est le même quelle que soit la vitesse c choisie. Ceci reflète le fait que l'explosion éventuelle des solutions est *pilotée* par le terme non-linéaire et pas par le terme de transport linéaire.

Correction de l'exercice 4

1. On multiplie l'équation par P^{-1} et on obtient
$$\partial_t(P^{-1}U) + \underbrace{P^{-1}AP}_{=D}\partial_x(P^{-1}U) = 0.$$
Ainsi la fonction $(t, x) \mapsto V(t, x) = P^{-1}U(t, x)$ vérifie un système d'équations découplées vu que $P^{-1}AP = D$ est diagonale. Plus précisément la première composante v_1 de V vérifie
$$\partial_t v_1 + \lambda_1 \partial_x v_1 = 0,$$
alors que la seconde composante v_2 vérifie
$$\partial_t v_2 + \lambda_2 \partial_x v_2 = 0.$$
Ainsi, on trouve $v_1(t, x) = v_1(0, x - \lambda_1 t)$ et $v_2(t, x) = v_2(0, x - \lambda_2 t)$. On retourne à la variable U en multipliant par P, ce qui donne
$$U(t, x) = P\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x - \lambda_1 t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x - \lambda_2 t)\right).$$
Si on connaît P, λ_1 et λ_2 on peut bien sûr expliciter cette formule plus avant.

2. On rappelle que toutes les normes de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes, l'idée est donc de choisir la norme la plus adaptée pour obtenir le résultat. On choisit donc la norme $U \mapsto \|P^{-1}U\|_2$ où $\|.\|_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.
   D'après la formule précédente, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\|U(t,x)\| = \|P^{-1}U(t,x)\|_2 &\leq \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x-\lambda_1 t) \right\|_2 + \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x-\lambda_2 t) \right\|_2 \\ &\leq \left\| P^{-1}U_0(x-\lambda_1 t)\right\|_2 + \left\| P^{-1}U_0(x-\lambda_2 t)\right\|_2 \leq 2 \sup_{\mathbb{R}} \|U_0(.)\|.\end{aligned}$$

3. – **Preuve directe par le calcul :** Si A est symétrique réelle, on sait que A est diagonalisable en base orthonormée, ce qui revient à dire qu'on peut choisir la matrice P orthogonale. Dans ce cas, les normes $\|.\|$ (définie à la question d'avant) et $\|.\|_2$ sont égales, on a donc

$$\|U(t,x)\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x-\lambda_1 t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x-\lambda_2 t) \right\|_2^2,$$

   Or, on remarque que pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X \right\|_2^2 + \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y \right\|_2^2.$$

   donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \|U(t,x)\|_2^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x-\lambda_1 t) \right\|_2^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x-\lambda_2 t) \right\|_2^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x) \right\|_2^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x) \right\|_2^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}U_0(x) \right\|_2^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left\| P^{-1}U_0(x) \right\|_2^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \|U_0(x)\|_2^2\, dx\end{aligned}$$

   – **Preuve plus rapide :** On calcule la dérivée en temps de la norme L^2 au carré de la solution

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} \|U(t,x)\|_2^2\,dx\right) &= 2\int_{\mathbb{R}} \big(\partial_t U(t,x), U(t,x)\big)_2\,dx \\ &= -2\int_{\mathbb{R}} \big(A\partial_x U(t,x), U(t,x)\big)_2\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \partial_x\big(AU(t,x), U(t,x)\big)_2\,dx = 0,\end{aligned}$$

   car, t étant fixé, $x \mapsto U(t,x)$ est à support compact (voir la formule explicite qui donne U en fonction de la donnée initiale).

4. (a) Notons u_1 et u_2 les deux composantes de u et $u_{1,0}$ et $u_{2,0}$ les données initiales pour chacune de ces deux composantes. Le système étudié s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + \partial_x u_1 + \partial_x u_2 = 0 \\ \qquad\quad \partial_t u_2 + \partial_x u_2 = 0. \end{cases}$$

   On voit que la seconde équation est découplée de la première, ce qui nous permet de déterminer d'abord u_2, puis ensuite u_1. Tout d'abord on obtient

$$u_2(t,x) = u_{2,0}(x-t).$$

   Puis (utiliser l'exercice 1 par exemple) on trouve

$$u_1(t,x) = u_{1,0}(x-t) + \int_0^t -u_{2,0}'(x-t)\,ds = u_{1,0}(x-t) - t u_{2,0}'(x-t).$$

La solution ainsi obtenue n'est clairement pas bornée sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Par exemple si $u_{1,0}$ est nulle et que $u'_{2,0}$ est non nulle, on voit que la norme infinie de $u_2(t,.)$ augmente linéairement avec le temps. Néanmoins, les solutions sont bornées sur tout intervalle de temps compact $[0,T]$.

(b) La vérification du fait que U_n est solution est évident. La donnée initiale correspondante est donnée par

$$U_n(0,x) = \begin{pmatrix} \sin(nx) \\ -\cos(nx) \end{pmatrix}.$$

Donc $\|U_n(0,.)\|_\infty = 1$, alors que

$$\|U_n(t,.)\|_\infty = e^{tn}.$$

On ne peut donc pas avoir l'estimation étudiée, même de façon locale en temps, car on voit qu'on a construit une famille de solutions qui la contredit.

Correction de l'exercice 5

On constate que tous les schémas proposés ne dépendent que du nombre $\nu = c\Delta t/\Delta x$.

1. – Schéma décentré à gauche : Il s'agit d'un simple calcul qui donne

$$a_{SDAG}(\xi,\nu) = (1-\nu) + \nu e^{-\sqrt{-1}\xi},$$

puis

$$\sup_\xi |a_{SDAG}(\xi,\nu)|^2 = \max(1,(1-2\nu)^2).$$

La condition de stabilité est donc $0 \leq \nu \leq 1$.

– Schéma décentré à droite :

$$a_{SDAD}(\xi,\nu) = (1+\nu) - \nu e^{\sqrt{-1}\xi},$$

puis

$$\sup_\xi |a_{SDAD}(\xi,\nu)|^2 = \max(1,(1+2\nu)^2).$$

La condition de stabilité est donc $-1 \leq \nu \leq 0$.

– Schéma centré

$$a_{SC}(\xi,\nu) = 1 + \sqrt{-1}\nu(\sin\xi),$$

puis

$$\sup_\xi |a_{SC}(\xi,\nu)|^2 = 1 + \nu^2.$$

Le schéma n'est donc jamais stable.

2. Pour le schéma de Lax-Friedrichs, on trouve

$$a_{SLF}(\xi,\nu) = (1+\nu)/2e^{i\xi} + (1-\nu)/2e^{i\xi} = \cos\xi + \sqrt{-1}\nu\sin\xi,$$

donc

$$\sup_\xi |a_{SLF}(\xi,\nu)|^2 = \max(1,|\nu|^2).$$

Le schéma est stable sous la condition $|\nu| \leq 1$.

Correction de l'exercice 6

1. En introduisant $\nu = c\Delta t/\Delta x$, le schéma s'écrit

$$u_i^{n+1} = (2-\nu)u_{i-1}^n + (\nu-1)u_{i-2}^n.$$

La monotonie est donc équivalente à $1 \leq \nu \leq 2$.

Pour que le schéma soit exact pour toute donnée initiale, il est nécessaire que u_i^{n+1} ne dépende que d'une seule valeur u_j^n. Il faut donc $\nu = 1$ ou $\nu = 2$. Supposons le schéma exact au temps n : $u_i^n = u(t^n, x_i)$, $\forall i \in \mathbb{Z}$. La valeur exacte de la solution au temps t^{n+1} est donnée par $u(t^{n+1}, x_i) = u(t^n, x_i - c\Delta t)$

– Si $\nu = 1$, i.e. $c\Delta t = \Delta x$, on a bien $u(t^{n+1}, x_i) = u(t^n, x_i - c\Delta t) = u(t^n, x_{i-1}) = u_{i-1}^n = u_i^{n+1}$.
– Si $\nu = 2$, i.e. $c\Delta t = 2\Delta x$, on a bien $u(t^{n+1}, x_i) = u(t^n, x_i - 2c\Delta t) = u(t^n, x_{i-2}) = u_{i-2}^n = u_i^{n+1}$.

2. Le facteur d'amplification s'écrit

$$\begin{aligned} a(\nu, \xi) = (2-\nu)e^{-\xi\sqrt{-1}} + (\nu - 1)e^{-2\xi\sqrt{-1}} &= e^{-3/2\xi\sqrt{-1}}\left((2-\nu)e^{\xi/2\sqrt{-1}} + (\nu-1)e^{-\xi/2\sqrt{-1}}\right) \\ &= e^{-3/2\xi\sqrt{-1}}\left(\cos(\xi/2) + \sqrt{-1}(3-2\nu)\sin(\xi/2)\right). \end{aligned}$$

Ensuite on trouve
$$\sup_\xi |a(\nu,\xi)|^2 = \max(1, (3-2\nu)^2).$$
On trouve bien que ce sup est plus petit que 1 dès que $1 \leq \nu \leq 2$.

3. De façon usuelle, on définit l'erreur de consistance par la formule

$$R_i^n = \frac{u(t^{n+1}, x_i) - u(t^n, x_i)}{\Delta t} + \left(\frac{c}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta t}\right)(u(t^n, x_{i-1}) - u(t^n, x_{i-2})),$$

où u est la solution du problème considéré. Utilisons les formules de Taylor suivantes autour du point (t^n, x_i)

$$u(t^{n+1}, x_i) = u(t^n, x_i) + \Delta t \partial_t u(t^n, x_i) + \frac{\Delta t^2}{2}\partial_t^2 u(\tau^n, x_i), \quad \text{avec } \tau_i^n \in]t^n, t^{n+1}[$$

$$u(t^n, x_{i-1}) = u(t^n, x_i) - \Delta x \partial_x u(t^n, x_i) + \frac{\Delta x^2}{2}\partial_x^2 u(t^n, \xi_i^n), \quad \text{avec } \xi_i^n \in]x_{i-1}, x_i|$$

$$u(t^n, x_{i-2}) = u(t^n, x_i) - 2\Delta x \partial_x u(t^n, x_i) + 2\Delta x^2 \partial_x^2 u(t^n, \zeta_i^n), \quad \text{avec } \zeta_i^n \in]x_{i-2}, x_i[.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} R_i^n = \partial_t u(t^n, x_i) + \frac{\Delta x}{\Delta t}\partial_x u(t^n, x_i) + \frac{\Delta t}{2}\partial_t^2 u(\tau^n, x_i) - \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\partial_x^2 u(t^n, \xi_i^n) \\ + \left(\frac{c}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta t}\right)\left(\Delta x \partial_x u(t^n, x_i) + \frac{\Delta x^2}{2}\partial_x^2 u(t^n, \xi_i^n) - 2\Delta x^2 \partial_x^2 u(t^n, \zeta_i^n)\right). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que u est solution de l'équation de transport, on trouve

$$R_i^n = \frac{\Delta t}{2}\partial_t^2 u(\tau^n, x_i) - \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\partial_x^2 u(t^n, \xi_i^n) + \left(c\Delta x - \frac{\Delta x^2}{\Delta t}\right)\left(\frac{1}{2}\partial_x^2 u(t^n, \xi_i^n) - 2\partial_x^2 u(t^n, \zeta_i^n)\right).$$

A priori les termes en $\Delta x^2/\Delta t$ sont désagréables mais il est bon de ce rappeler que ce schéma ne sera stable (et donc utilisable) que sous la condition CFL $1 \leq \nu \leq 2$, c'est-à-dire sous la condition

$$1 \leq c\Delta t/\Delta x \leq 2.$$

Ainsi les quotients $\Delta t/\Delta x$ et $\Delta x/\Delta t$ ne peuvent pas devenir grands sous peine de sortir de la zone de stabilité du schéma. Ainsi, **sous la condition CFL ci-dessus**, les termes en $\Delta x^2/\Delta t$ peuvent être majorés par $c\Delta x$ et on obtient l'estimation
$$|R_i^n| \leq C(\Delta t + \Delta x),$$
où C ne dépend que des dérivées secondes de u.

4. Pour tout $n \geq 0$, on note $\bar{U}^n = (u(t^n, x_i))_i$ le vecteur composé des valeurs exactes de la solution. On note également le schéma sous la forme compacte $U^{n+1} = SU^n$. De sorte que l'on a $\bar{U}^{n+1} = S\bar{U}^n + \Delta t R^n$. Ainsi l'erreur $E^n = \bar{U}^n - U^n$ vérifie l'équation

$$E^{n+1} = SE^n + \Delta t R^n.$$

Sous la condition CFL, on a vu que le schéma est monotone et donc L^∞ stable (car il préserve les constantes !) et même mieux $\|S\|_\infty \leq 1$. Ainsi, on a

$$\forall n \geq 0, \|E^{n+1}\| \leq \|E^n\|_\infty + \Delta t\|R^n\|_\infty.$$

Comme $E^0 = 0$, on obtient par une somme télescopique immédiate

$$\sup_{n \leq T/\Delta t} \|E^n\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{n} \Delta t \|R^k\|_\infty \leq C_T(\Delta t + \Delta x).$$

Correction de l'exercice 7

1. La technique usuelle consiste à étudier l'évolution d'une solution éventuelle le long des caractéristiques. On trouve
$$\frac{d}{dt} u(t, x+t) = -\alpha u(t, x+t),$$
et donc par intégration
$$u(t, x+t) = u_0(x) e^{-\alpha t}.$$
Il s'en suit
$$u(t, x) = u_0(x-t) e^{-\alpha t}.$$
2. (a) Le calcul de l'erreur de consistance est tout à fait identique à celui du schéma décentré à gauche standard car le nouveau terme est inoffensif. On trouve un schéma d'ordre 1 en temps et en espace.

   (b) On pose $\nu = \Delta t / \Delta x$ et on écrit le schéma sous la forme
$$u_i^{n+1} = (1 - \nu - \alpha \Delta t) u_i^n + \nu u_{u-1}^n.$$
   La condition de positivité est donc donnée par
$$0 \leq \nu \leq 1 - \alpha \Delta t.$$
   Si α est négatif, cette condition est moins contraignante que la CFL usuelle du schéma décentré à gauche. Si α est positif, on voit que cette condition ne peut être réalisée que si $\Delta t \leq 1/\alpha$, ce qui peut être contraignant en pratique si α est grand.

   (c) Si U^n est une constante, U^{n+1} est aussi une constante donnée par $U^{n+1} = (1 - \alpha \Delta t) U^n$. On note D le vecteur ne contenant que des 1. Au rang n on a
$$-\|U^n\|_\infty D \leq U^n \leq \|U^n\|_\infty D.$$
   Sous les conditions assurant la positivité du schéma (qui est linéaire !), on a donc
$$-\|U^n\|_\infty (1 - \alpha \Delta t) D \leq U^{n+1} \leq (1 - \alpha \Delta t) \|U^n\|_\infty D,$$
   ce qui fournit
$$\|U^{n+1}\|_\infty \leq (1 - \alpha \Delta t) \|U^n\|_\infty.$$

   (d) Par l'argument usuel, on trouve
$$\sup_{n \leq T/\Delta t} \|U^n\|_\infty \leq \|U^0\|_\infty e^{-\alpha T},$$
   ce qui fournit la stabilité L^∞.

Correction de l'exercice 8

1. Il s'agit d'un simple calcul utilisant le théorème de Schwarz
$$\partial_t^2 u = \partial_t(\partial_t u) = -c \partial_t(\partial_x u) = -c \partial_x(\partial_t u) = c^2 \partial_x^2 u.$$
Cette nouvelle équation satisfaite par u est appelée *équation des ondes* car c'est l'équation qui apparaît naturellement pour la description de tous les phénomènes ondulatoires (propagation de la lumière, du son, des vagues, etc ...)

2. La définition de R_i^n est standard

$$R_i^n = \frac{u(t^{n+1},x_i)-u(t^n,x_i)}{\Delta t} + c\frac{u_(t^n,x_{i+1})-u(t^n,x_{i-1})}{2\Delta x} - c^2\frac{\Delta t}{2}\frac{u(t^n,x_{i+1})-2u(t^n,x_i)+u(t^n,x_{i-1})}{\Delta x^2}.$$

On utilise maintenant les formules de Taylor suivantes autour du point (t^n, x_i) (qu'on n'écrit pas pour simplifier les notations)

$$u(t^{n+1},x_i) = u + \Delta t\partial_t u + \frac{\Delta t^2}{2}\partial_t^2 u + \frac{\Delta t^3}{6}\partial_t^3 u(\tau_i^n, x_i), \quad \text{avec } \tau_i^n \in]t^n, t^{n+1}[,$$

$$u(t^n,x_{i+1}) = u + \Delta x\partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2}\partial_x^2 u + \frac{\Delta x^3}{6}\partial_x^3 u(t^n, \xi_i^n), \quad \text{avec } \xi_i^n \in]x_i, x_{i+1}[,$$

$$u(t^n,x_{i-1}) = u - \Delta x\partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2}\partial_x^2 u - \frac{\Delta x^3}{6}\partial_x^3 u(t^n, \zeta_i^n), \quad \text{avec } \zeta_i^n \in]x_{i-1}, x_i[.$$

On obtient

$$R_i^n = \partial_t u + \frac{\Delta t}{2}\partial_t^2 u + \frac{\Delta t^2}{6}\partial_t^3 u(\tau_i^n, x_i) + c\left(\partial_x u + \frac{\Delta x^2}{6}\partial_x^3 u(t^n,\xi_i^n) + \frac{\Delta x^2}{6}\partial_x^3 u(t^n,\zeta_i^n)\right)$$
$$- c^2\frac{\Delta t}{2}\left(\partial_x^2 u + \frac{\Delta x}{6}\partial_x^3 u(t^n,\xi_i^n) + \frac{\Delta x}{6}\partial_x^3 u(t^n,\zeta_i^n)\right).$$

On utilise maintenant le fait que u est solution de l'équation de transport mais aussi de l'équation des ondes (Cf. la première question), il reste

$$R_i^n = \frac{\Delta t^2}{6}\partial_t^3 u(\tau_i^n, x_i) + c\left(\frac{\Delta x^2}{6}\partial_x^3 u(t^n,\xi_i^n) + \frac{\Delta x^2}{6}\partial_x^3 u(t^n,\zeta_i^n)\right) - c^2\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\Delta x}{6}\partial_x^3 u(t^n,\xi_i^n) + \frac{\Delta x}{6}\partial_x^3 u(t^n,\zeta_i^n)\right).$$

On trouve donc bien

$$|R_i^n| \leq C(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta t\Delta x) \leq C'(\Delta t^2 + \Delta x^2),$$

en utilisant l'inégalité de Young $\Delta t\Delta x \leq \frac{1}{2}(\Delta t^2 + \Delta x^2)$.

3. On introduit $\nu = c\Delta t/\Delta x$. C'est un simple calcul qui donne

$$\gamma_{-1} = \frac{1}{2}\nu(1+\nu), \;\; \gamma_0 = 1-\nu^2, \;\; \gamma_1 = -\frac{1}{2}\nu(1-\nu).$$

4. Le schéma est positif si les trois coefficients $\gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1$ sont tous positifs. On constate que cela n'est possible que si $\nu = 0$, ou $\nu = -1$ ou $\nu = 1$.
5. Si on applique la schéma à un vecteur de la forme $(e^{\sqrt{-1}\xi})_i$, on a vu que l'on obtient un multiple de ce vecteur, le coefficient multiplicatif obtenu est appelé facteur d'amplification $a(\xi, \nu)$. Un calcul simple nous donne ici
$$a(\xi,\nu) = (1-\nu^2) + \nu^2\cos(\xi) - \sqrt{-1}\nu\sin(\xi).$$
En prenant le module au carré on trouve (avec $\mu = \nu^2$)
$$|a(\xi,\nu)|^2 = ((1-\mu)+\mu\cos(\xi))^2 + \mu\sin(\xi)^2 = \mu + (1-\mu)^2 + 2\mu(1-\mu)\cos(\xi) + \mu(\mu-1)\cos(\xi)^2.$$
6. On doit étudier le maximum de $\xi \mapsto |a(\xi,\nu)|^2$, ce qui revient à étudier le polynôme
$$\varphi : X \mapsto \mu + (1-\mu)^2 + 2\mu(1-\mu)X + \mu(\mu-1)X^2,$$
sur l'intervalle des valeurs prises par $\cos(\xi)$ c'est-à-dire $[-1,1]$.
La fonction φ' s'annulle en $X = 1$. Il y a donc trois possibilités :
   - Si $\mu(1-\mu) = 0$, φ est affine et donc constante égale à 1. Le schéma est donc bien stable.
   - Si $\mu(1-\mu) > 0$, le polynôme φ est concave et donc $X = 1$ est un point de maximum de φ. Comme $\varphi(1) = 1$, on a bien $\sup_{[-1,1]}\varphi = 1$.
   - Si $\mu(1-\mu) < 0$, le polynôme φ est convexe et donc $X = 1$ est un point de minimum de φ et dans ce cas $\sup_{[-1,1]}\varphi > 1$, le schéma est donc instable.

Ainsi, la condition de stabilité est donc $0 \leq \mu(1-\mu)$ ce qui donne $0 \leq \mu \leq 1$. Comme $\mu = \nu^2$ est toujours positif, la condition de stabilité s'exprime donc sous la forme donnée dans l'énoncé

$$-1 \leq \nu \leq 1.$$

7. On a vu que le schéma est L^2-stable sous la condition CFL ci-dessus. De plus on a estimé l'erreur de consistance à la question 2. La preuve de l'estimation de l'erreur est donc strictement identique à celle du cours.

Correction de l'exercice 9

1. Quand c_i est positif, le terme de dérivée spatiale est décentré à gauche, tandis que si c_i est négatif, ce terme est décentré à droite. Comme on l'a vu en cours, au moins dans le cas où c est constante, c'est le bon choix à faire pour avoir la stabilité du schéma. En conséquence, ce schéma peut raisonnablement s'appeler **Schéma décentré amont**.
2. La définition de l'erreur de consistance est standard

$$R_i^n = \frac{u(t^{n+1},x_i) - u(t^n,x_i)}{\Delta t} + c_i^+ \frac{u(t^n,x_i) - u(t^n,x_{i-1})}{\Delta x} - c_i^- \frac{u(t^n,x_{i+1}) - u(t^n,x_i)}{\Delta x}.$$

Par développements de Taylor au point (t^n, x_i), maintenant usuels, on trouve

$$R_i^n = \partial_t u + \frac{\Delta t}{2}\partial_t^2 u(\tau_i^n, x_i) + c_i^+(\partial_x u - \frac{\Delta x}{2}\partial_x^2 u(t^n,\xi_i^n)) - c_i^-(\partial_x u + \frac{\Delta x}{2}\partial_x^2 u(t^n,\zeta_i^n)).$$

En utilisant le fait que $c_i^+ - c_i^- = c(x_i)$ et que u vérifie l'équation au point (t^n, x_i), on trouve

$$R_i^n = \frac{\Delta t}{2}\partial_t^2 u(\tau_i^n, x_i) - c_i^+ \frac{\Delta x}{2}\partial_x^2 u(t^n,\xi_i^n) - c_i^- \frac{\Delta x}{2}\partial_x^2 u(t^n,\zeta_i^n),$$

et donc $|R_i^n| \leq C(\Delta t + \Delta x)$ où C dépend seulement de la solution u.
3. On pose $\nu_i = c_i \Delta t/\Delta x$ et on écrit le schéma sous la forme

$$u_i^{n+1} = (1-|\nu_i|)u_i^n + \nu_i^+ u_{i-1}^n + \nu_i^- u_{i+1}^n,$$

et comme ν_i^+ et ν_i^- sont toujours positifs, on voit que la positivité du schéma est équivalente à $1-|\nu_i| \geq 0$, ce qui est le résultat attendu.

Bien que la vitesse soit variable dans ce problème, le schéma préserve les constantes et donc la preuve du cours permet, à l'identique, de montrer la stabilité L^∞ du schéma sous la condition CFL obtenue ci-dessus.
4. Si on pose $\bar{U}^n = (u(t^n, x_i))_{i\in\mathbb{Z}}$, et l'erreur $E^n = \bar{U}^n - U^n$ alors l'estimation d'erreur s'écrit

$$\sum_{n \leq T/\Delta t} \|E^n\|_\infty \leq C(\Delta t + \Delta x).$$

La démonstration se fait exactement comme dans le cours dans le cas à vitesse constante. Le schéma est d'ordre 1 en temps et en espace.
5. (a) On ne peut pas utiliser l'analyse de Von Neumann car les coefficients du schéma ne sont pas constants et donc le schéma n'est pas invariant par translation (ν_i dépend de i !).
   (b) On multiplie l'équation par u, ce qui donne $\partial_t(u^2) + c(x)\partial_x(u^2) = 0$. En intégrant par rapport à x on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx\right) = -\int_{\mathbb{R}} c(x)\partial_x(u^2)(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \partial_x c(x) u^2(t,x)\,dx.$$

Ainsi
$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx\right) \leq \|\partial_x c\|_{L^\infty}\left(\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx\right),$$
ce qui donne, par intégration, la majoration souhaitée
$$\|u(t,.)\|_{L^2}^2 = \left(\int_{\mathbb{R}} u^2(t,x)\,dx\right) \leq \|u_0\|_{L^2}^2 e^{\|\partial_x c\|_\infty t}.$$

(c) Il s'agit de multiplier le schéma par $\Delta t \Delta x u_i^n$ et de sommer sur i. Ensuite, il faut effectuer les calculs suivants
$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta x(u_i^{n+1}-u_i^n)u_i^n = \frac{1}{2}\|U^{n+1}\|_2^2 - \frac{1}{2}\|U^n\|_2^2 - \frac{1}{2}\|U^{n+1}-U^n\|_2^2,$$

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^+\Delta t(u_i^n - u_{i-1}^n)u_i^n &= \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^+\Delta t(|u_i^n|^2 - |u_{i-1}^n|^2 + |u_i^n - u_{i-1}^n|^2)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^+\Delta t|u_i^n - u_{i-1}^n|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(c_i^+ - c_{i+1}^+)\Delta t|u_i^n|^2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^-\Delta t(u_{i+1}^n - u_i^n)u_i^n &= \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^-\Delta t(|u_{i+1}^n|^2 - |u_i^n|^2 - |u_{i+1}^n - u_i^n|^2)\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}} c_i^-\Delta t|u_{i+1}^n - u_i^n|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}(c_{i-1}^- - c_i^-)\Delta t|u_i^n|^2.\end{aligned}$$

(d) Le schéma s'écrit
$$u_i^{n+1} - u_i^n = -\frac{c_i^+\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) + \frac{c_i^-\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n),$$
en remarquant que les deux termes ne sont jamais simultanément non nuls, on obtient
$$\|U^{n+1}-U^n\|_2^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\Delta x|u_i^{n+1}-u_i^n|^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\Delta x\left(\frac{(c_i^+)^2\Delta t^2}{\Delta x^2}|u_i^n - u_{i-1}^n|^2 + \frac{(c_i^-)^2\Delta t^2}{\Delta x^2}|u_{i+1}^n - u_i^n|^2\right).$$
Sous l'hypothèse $|c_i|\Delta t \leq \Delta x$ on a donc bien
$$\|U^{n+1} - U^n\|_2^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}}\Delta x\left(\frac{c_i^+\Delta t}{\Delta x}|u_i^n - u_{i-1}^n|^2 + \frac{c_i^-\Delta t}{\Delta x}|u_{i+1}^n - u_i^n|^2\right).$$

(e) Il suffit de constater que les fonction $t\mapsto t^+$ et $t\mapsto t^-$ sont 1-lipschitziennes et donc par exemple par le théorème des accroissements finis, on trouve
$$|c_i^+ - c_{i+1}^+| \leq |c_i - c_{i+1}| \leq \Delta x\|\partial_x c\|_\infty,$$
idem pour c_i^-.

(f) D'après la question (d), la somme des troisième et quatrième termes de la formule obtenue en (c) est positive, et le cinquième terme se majore par la question précédente :
$$\|U^{n+1}\|_2^2 - \|U^n\|_2^2 \leq 2\|\partial_x c\|_\infty \Delta t\|U^n\|_2^2,$$
ainsi on a
$$\|U^{n+1}\|_2^2 \leq (1 + 2\|\partial_x c\|_\infty \Delta t)\|U^n\|_2^2.$$

(g) On conclut grâce à l'inégalite usuelle $1+t \leq e^t,\ \forall t\geq 0$ qui donne
$$\|U^{n+1}\|_2^2 \leq e^{2\|\partial_x c\|_\infty \Delta t}\|U^n\|_2^2,$$
puis le résultat attendu par récurrence.
Le schéma proposé est donc bien L^2-stable.

Correction de l'exercice 10

1. La matrice A proposé admet une valeur propre strictement négative λ_1 et une valeur propre strictement positive λ_2. On note V_1 et V_2 deux vecteurs propres associés.
   – Si on prend $U_0(x) = f_0(x)V_1$ avec $f_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Alors on a $U_i^0 = f_0(x_i)V_1$ et on peut voir que la solution du schéma (SDAG) s'écrit sous la forme $U_i^n = f_i^n V_1$ où f_i^n est solution de
   $$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} + \lambda_1 \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} = 0.$$
   On a donc affaire au schéma décentré à gauche usuel pour une vitesse $\lambda_1 < 0$, dont on sait qu'il est instable.
   – Si maintenant on prend $U_0(x) = g_0(x)V_2$ avec $g_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Alors on a $U_i^0 = g_0(x_i)V_2$ et on peut voir que la solution du schéma (SDAD) s'écrit sous la forme $U_i^n = g_i^n V_2$ où g_i^n est solution de
   $$\frac{g_i^{n+1} - g_i^n}{\Delta t} + \lambda_2 \frac{g_{i+1}^n - g_i^n}{\Delta x} = 0.$$
   On a maintenant un schéma décentré à droite pour une vitesse positive ce qui est également instable.
2. Comme A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, on écrit $A = P^{-1}DP$ avec D diagonale réelle. On définit D^+ et D^- les parties positive et négative de D. On a bien $D^+ + D^- = 0$, $D^+D^- = D^-D^+ = 0$ et donc en posant $A^+ = P^{-1}D^+P$ et $A^- = P^{-1}D^-P$, on a bien le résultat.
3. (a) En posant $V_i^n = PU_i^n$, on voit que V_i^n satisfait le schéma
   $$\frac{V_i^{n+1} - V_i^n}{\Delta t} + D^+ \frac{V_i^n - V_{i-1}^n}{\Delta x} + D^- \frac{V_{i+1}^n - V_i^n}{\Delta x} = 0,$$
   qui est un système de d équations découplées. Celles correspondant aux valeurs propres positives sont décentrées à gauche et celles pour les valeurs propres négatives sont décentrées à droite. Ainsi, chacune des équations fournit un schéma stable si $|\lambda_k|\Delta t \leq \Delta x$ pour $k = 1, 2$. Ces deux conditions reviennent bien à la condition $\rho(A^+)\Delta t \leq \Delta x$ et $\rho(A^-)\Delta t \leq \Delta x$.

   (b) Ce calcul est standard et ne présente aucune difficulté par rapport au calcul effectué en cours (voir aussi l'exercice précédent).

   (c) Si A est symétrique, on sait qu'on peut choisir P orthogonale et donc $A^+ =^t PD^+P$ est bien symétrique, de même que A^-.
   Le calcul proposé donne
   $$\frac{1}{2}\|U^{n+1}\|_2^2 - \frac{1}{2}\|U^n\|_2^2 - \frac{1}{2}\|U^{n+1} - U^n\|_2^2 + \Delta t \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(A^+(U_i^n - U_{i-1}^n), U_i^n \right) + \Delta t \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(A^-(U_{i+1}^n - U_i^n), U_i^n \right) = 0.$$
   Par des manipulations maintenant usuelles, on a
   $$\begin{aligned} &\|U^{n+1}\|_2^2 - \|U^n\|_2^2 - \|U^{n+1} - U^n\|_2^2 \\ &\quad + \Delta t \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(A^+(U_i^n - U_{i-1}^n), U_i^n - U_{i-1}^n \right) - \Delta t \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(A^-(U_{i+1}^n - U_i^n), U_{i+1}^n - U_i^n \right) = 0. \end{aligned}$$
   En repartant du schéma, et en utilisant le fait que $A^+A^- = A^-A^+ = 0$, la symétrie de ces matrices et le fait que $\mathrm{Sp}(A^+) \subset \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{Sp}(A^-) \subset \mathbb{R}^-$, on a pour tout i et tout n
   $$\begin{aligned} \|U_i^{n+1} - U_i^n\|^2 &= \left\| \frac{\Delta t}{\Delta x} A^+(U_i^n - U_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^-(U_{i+1}^n - U_i^n) \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{\Delta t}{\Delta x} A^+(U_i^n - U_{i-1}^n) \right\|^2 + \left\| \frac{\Delta t}{\Delta x} A^-(U_{i+1}^n - U_i^n) \right\|^2 \\ &\leq \frac{\rho(A^+)\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A^+(U_i^n - U_{i-1}^n), U_i^n - U_{i-1}^n \right) - \frac{\rho(A^-)\Delta t}{\Delta x} \left(A^-(U_{i+1}^n - U_i^n), U_{i+1}^n - U_i^n \right) \\ &\leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A^+(U_i^n - U_{i-1}^n), U_i^n - U_{i-1}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A^-(U_{i+1}^n - U_i^n), U_{i+1}^n - U_i^n \right). \end{aligned}$$

En remettant cela dans l'égalité ci-dessus, on obtient bien que $\|U^{n+1}\|_2 \leq \|U^n\|_2$ et le schéma est bien L^2-stable sous la condition donnée.

4. (a) Les valeurs propres de A^+ sont de la forme $(\mu + \lambda)/2$ où $\mu \in \mathrm{SpA}$. Donc si $\lambda \geq \rho(A)$, on a bien que les valeurs propres de A^+ sont positives. Idem pour A^-.

   (b) La condition s'écrit
$$\frac{\Delta t}{2\Delta x} \max\Big(\lambda + \max \mathrm{Sp}(A), \lambda - \min \mathrm{Sp}(A)\Big) \leq 1.$$
Il faut donc choisir λ qui minimise la quantité $\max\Big(\lambda + \max \mathrm{Sp}(A), \lambda - \min \mathrm{Sp}(A)\Big)$ tout en étant supérieure à $\rho(A)$. La valeur optimale est bien donnée par $\lambda = \rho(A)$ et la condition de stabilité est plus faible que la condition
$$\rho(A)\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

   (c) Comme le calcul de $\rho(A)$ peut ne pas être facile, on choisit $\lambda = \Delta x/\Delta t$. Dans ces conditions, la condition de stabilité s'écrit encore $\rho(A)\Delta t \leq \Delta x$ et le schéma devient
$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + A\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{-U_{i+1}^n + 2U_i^n - U_{i-1}^n}{2\Delta t} = 0,$$
ou encore
$$\frac{U_i^{n+1} - \frac{U_{i-1}^n + U_{i+1}^n}{2}}{\Delta t} + A\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0,$$
et on retrouve donc le schéma de Lax-Friedrichs.