Analyse Numérique
Equations de transport

Exercice 1 (Transport avec terme source)

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + c\,\partial_x u = f(t,x), \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

où $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ et c est une constante réelle donnée.
On suppose que u_0 et f sont des fonctions régulières données. Montrer qu'il **existe** une **unique** solution régulière u au problème (1) définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, que l'on calculera *explicitement* en fonction des données.

Exercice 2 (Transport avec terme de réaction linéaire)

On considère l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u + c(t,x)\,\partial_x u + a(t,x)u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2}$$

où $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ et a et c sont deux fonctions **régulières** et **bornées**.

1. On suppose (*seulement dans cette question*) que $c \equiv 0$. Résoudre explicitement le problème (2) pour une donnée initiale u_0 régulière donnée.
2. Rappeler la définition des courbes caractéristiques $(t,s,x) \mapsto X(t,s,x)$ associées à la fonction $c(\cdot,\cdot)$. Montrer que ces courbes caractéristiques sont **globalement** bien définies.
3. Si u est une solution régulière de (2), calculer la dérivée de u le long des courbes caractéristiques, c'est-à-dire (pour x fixé) la quantité
$$\frac{d}{dt}\left(u(t, X(t,0,x))\right).$$
4. Montrer que, si u_0 est régulière, le problème (2) admet une unique solution que l'on calculera explicitement en fonction de u_0, a et X.
5. Montrer que cette solution vérifie
$$\forall t > 0, \ \ \|u(t,\cdot)\|_{L^\infty} \leq e^{\|a\|_{L^\infty} t} \|u_0\|_{L^\infty}.$$
Cette estimation peut en réalité être grandement précisée. Montrer par exemple que si u_0 et a sont positives alors on a
$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \ \ 0 \leq u(t,x) \leq e^{-(\inf a)t}(\sup u_0).$$
6. Expliquer comment adapter de façon immédiate ce qui précède à la résolution du problème suivant (dit *sous forme conservative*) :
$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(c(t,x)u) + a(t,x)u = 0, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases}$$
Retrouver de cette façon la formule obtenue en cours pour la résolution du problème avec $a \equiv 0$ et c indépendante du temps, c'est-à-dire $\partial_t u + \partial_x(c(x)u) = 0$.

Exercice 3 (Transport avec terme de réaction non-linéaire)

Soit $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction régulière **bornée**. On s'intéresse au problème **non-linéaire** suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + c\,\partial_x u - u^2 = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{3}$$

1. On suppose dans cette question que la fonction u_0 est négative. Montrer que le problème (3) admet une unique solution régulière définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
   Calculer explicitement cette solution en fonction des données.
2. On suppose dans cette question que u_0 est positive (et non identiquement nulle). Montrer cette fois que le problème (3) admet une unique solution régulière définie sur un domaine maximal $[0, T^*[\times\mathbb{R}$.
   Calculer T^* et la solution u explicitement en fonction des données.
3. Reprendre les questions précédentes en remplaçant la vitesse constante c par une fonction régulière et bornée $(t,x) \mapsto c(t,x)$. Quel commentaire peut-on faire sur le temps d'existence T^* ?

Exercice 4 (Systèmes hyperboliques à coefficients constants)

On s'intéresse dans cet exercice à la résolution d'un **système** de transport monodimensionnel à coefficients constants de la forme

$$\begin{cases} \partial_t U + A\partial_x U = 0, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(0,x) = U_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4}$$

où $U(t,x) = \begin{pmatrix} u(t,x) \\ v(t,x) \end{pmatrix}$ est une inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et A une matrice carrée de taille 2.

1. On suppose que A est diagonalisable à valeurs propres réelles ; $A = P^{-1}DP$, avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
   Montrer que le problème (4) admet une unique solution U que l'on calculera explicitement en fonction de U_0, de P et des λ_i.
2. Vérifier que dans le cas précédent, il existe une constante $C > 0$ qui dépend de A, telle que
   $$\sup_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}} \|U(t,x)\| \leq C\|U_0\|_\infty.$$
3. On suppose que A est symétrique réelle et que U_0 est à support compact. Démontrer que la solution U de (4) vérifie
   $$\forall t \geq 0, \ \ \|U(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|U_0\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$
4. On souhaite comprendre ce qui passe dans le cas d'une matrice qui n'est pas diagonalisable.
   (a) Dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer explicitement la solution de (4) en fonction de U_0.
   Est-ce que la solution U est bornée sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$? Démontrer tout de même que :
   $$\forall T > 0, \ \exists C_T > 0, \ \ \sup_{[0,T]\times\mathbb{R}} \|U(t,x)\| \leq C_T\|U_0\|_{C^1}. \tag{5}$$
   (b) On considère maintenant le cas où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que, pour tout $n \geq 1$, la fonction U_n définie par
   $$U_n(t,x) = e^{tn}\begin{pmatrix} \sin(nx) \\ -\cos(nx) \end{pmatrix},$$
   est solution du système (4) pour une donnée initiale U_0 bien choisie.
   En déduire qu'une inégalité du type (5) ne peut pas être vraie dans ce cas.

Exercice 5 (Stabilité au sens de Von Neumann)

1. Effectuer l'analyse de stabilité au sens de Von Neumann pour les trois schémas vus en cours (décentré à gauche, décentré à droite, centré) pour l'équation de transport à vitesse constante. De façon précise, il s'agit dans chaque cas de calculer le facteur d'amplification $a(\xi, \Delta t, \Delta x)$ pour toutes valeurs de $\Delta t, \Delta x > 0$ et tout $\xi \in \mathbb{R}$, puis de déterminer les conditions sur Δt et Δx qui assurent que $\max_\xi |a(\xi, \Delta t, \Delta x)| \leq 1$.
2. Même question pour le schéma suivant (schéma de Lax-Friedrichs) :

$$\frac{u_i^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{i-1}^n + u_{i+1}^n)}{\Delta t} + c\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} = 0.$$

Exercice 6 (Un schéma un peu exotique)

On s'intéresse à l'équation de transport à vitesse constante c avec une donnée initiale u_0 que l'on suppose $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}$. On considère le schéma suivant

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^n}{\Delta t} + \left(\dfrac{c}{\Delta x} - \dfrac{1}{\Delta t}\right)(u_{i-1}^n - u_{i-2}^n) = 0, \ \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \ \ \forall i \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

1. Déterminer la condition CFL sous laquelle le schéma proposé est monotone. Dans quels cas le schéma est-il exact ?
2. Démontrer, en utilisant l'analyse de Von Neumann, que le schéma est L^2-stable sous la même condition.
3. Déterminer les ordres de consistance en temps et en espace de ce schéma avec le problème considéré ? On pourra se placer dans le cadre de la condition CFL.
4. Enoncer et démontrer une estimation d'erreur L^∞ pour ce schéma.

Exercice 7 (Equation de transport avec terme de réaction linéaire)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et u_0 une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact. On s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x u + \alpha u = 0, \ \ \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t=0, x) = u_0(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{6}$$

1. Démontrer que le problème (6) admet une unique solution régulière que l'on calculera explicitement.
2. On considère le schéma aux différences finies suivant

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + \alpha u_i^n = 0, \ \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \ \ \forall i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{7}$$

   (a) Montrer que ce schéma est consistant avec le problème (6). Quel est l'ordre de consistance en temps et en espace de ce schéma ?

   (b) Déterminer sous quelles conditions le schéma (7) est positif. Commenter les conditions obtenues en fonction du signe de α.

   (c) Que vaut U^{n+1} si U^n est une constante ? En déduire que sous les conditions établies à la question précédente, on a

$$\|U^{n+1}\|_\infty \leq (1 - \alpha\Delta t)\|U^n\|_\infty, \ \ \forall n \geq 0.$$

   (d) En déduire que sous les conditions précédentes, le schéma (7) est L^∞-stable.

Exercice 8 (Schéma de Lax-Wendroff)

On étudie un nouveau schéma aux différences finies pour le problème de transport à vitesse constante

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t=0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{8}$$

On supposera u_0 aussi régulière que nécessaire et à support compact. Le schéma numérique proposé est le suivant

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\dfrac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - c^2\dfrac{\Delta t}{2}\dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0, & \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{9}$$

où Δt et Δx désignent respectivement le pas de temps et le pas d'espace. Les points de discrétisation sont définis par $x_i = i\Delta x$ et les instants de discrétisation par $t^n = n\Delta t$.

1. Démontrer que toute solution régulière de (8) vérifie également

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0, \ \ \forall t > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Démontrer que le schéma (9) est consistant à l'ordre 2 en temps et à l'ordre 2 en espace avec le problème (8). Pour cela, on définira de façon précise l'erreur de consistance R_i^n puis on en proposera une estimation en fonction de Δt et Δx.
3. Ecrire le schéma (9) sous la forme

$$u_i^{n+1} = \gamma_{-1}u_{i-1}^n + \gamma_0 u_i^n + \gamma_1 u_{i+1}^n,$$

où γ_{-1}, γ_0 et γ_1 sont trois coefficients à déterminer. On pourra, pour simplifier la suite, exprimer ces trois coefficients en fonction du nombre $\nu = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$.
4. Pour quelles valeurs de ν, le schéma (9) est-il positif ?
5. Rappeler la définition du facteur d'amplification $a(\xi, \nu) \in \mathbb{C}$ associé à un tel schéma numérique et le calculer pour le schéma (9). On pourra vérifier que :

$$|a(\xi,\nu)|^2 = \mu + (1-\mu)^2 + 2\mu(1-\mu)\cos(\xi) - \mu(1-\mu)\cos(\xi)^2,$$

où pour simplifier l'écriture on a posé $\mu = \nu^2$.
6. En déduire que le schéma (9) est L^2-stable sous la condition CFL

$$\left|\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right| \leq 1.$$

7. Enoncer et démontrer une estimation en norme L^2 de l'erreur, sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

Exercice 9 (Schéma pour le transport à vitesse variable)

On considère l'équation de transport à vitesse variable

$$\begin{cases} \partial_t u + c(x)\partial_x u = 0, & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t=0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{10}$$

où c et u_0 sont deux fonctions régulières données, que l'on supposera bornées ainsi que leurs dérivées. On supposera également que la fonction u_0 est à support compact.

On se propose d'étudier le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c_i^+ \dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - c_i^- \dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0, \ \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \ \ \forall i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{11}$$

où on a posé $c_i = c(x_i)$. Par ailleurs, on a noté $a^+ = (|a| + a)/2$ et $a^- = (|a| - a)/2$ les parties positives et négatives de n'importe quel réel a. On pourra vérifier et utiliser les formules suivantes

$$\forall a \in \mathbb{R}, \ \ a^+ \geq 0, \ \ a^- \geq 0, \ \ a^+ - a^- = a, \ \ a^+ + a^- = |a|, \ \ a^+ a^- = 0.$$

1. Quel nom pouvez-vous donner à ce schéma ?
2. Définir l'erreur de consistance associée à ce schéma et en donner une estimation en fonction de Δt et Δx pour une solution régulière u du problème (10).
3. Montrer que le schéma est monotone sous la condition

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|c_i| \Delta t}{\Delta x} \leq 1. \tag{12}$$

   Montrer que sous ces conditions le schéma est L^∞-stable.
4. Enoncer et démontrer une estimation d'erreur en norme L^∞ pour le schéma (11). Quel est l'ordre du schéma ?
5. On veut démontrer que sous la même condition (12), le schéma proposé est L^2-stable.
   (a) Peut-on utiliser l'analyse de stabilité de Von Neumann sur ce schéma ?
   (b) En multipliant (10) par u, puis en intégrant par rapport à x sur $\mathbb{R}$ et enfin en intégrant par parties, démontrer que la solution exacte u du problème (10) vérifie l'inégalité

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t, \cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{\|\partial_x c\|_\infty T} \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{13}$$

   Pour établir la stabilité L^2 du schéma numérique, on va essayer d'établir une estimation L^2 sur la solution du schéma inspirée de (13)

   (c) Pour tout $U \in \mathbb{R}^\mathbb{Z}$ on note $\|U\|_2 = \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Montrer que toute solution de (11) vérifie

$$\begin{aligned} &\|U^{n+1}\|_2^2 - \|U^n\|_2^2 - \|U^{n+1} - U^n\|_2^2 \\ &\quad + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x \left(\frac{c_i^+ \Delta t}{\Delta x} |u_i^n - u_{i-1}^n|^2 + \frac{c_i^- \Delta t}{\Delta x} |u_{i+1}^n - u_i^n|^2 \right) \\ &\qquad + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta t \Delta x \left(\frac{c_i^+ - c_{i+1}^+}{\Delta x} |u_i^n|^2 + \frac{c_i^- - c_{i-1}^-}{\Delta x} |u_i^n|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

   (d) Montrer que, sous la condition (12), on a

$$\|U^{n+1} - U^n\|_2^2 \leq \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta x \left(\frac{c_i^+ \Delta t}{\Delta x} |u_i^n - u_{i-1}^n|^2 + \frac{c_i^- \Delta t}{\Delta x} |u_{i+1}^n - u_i^n|^2 \right).$$

   (e) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $|c_i^+ - c_{i+1}^+| \leq \Delta x \|\partial_x c\|_\infty$ et $|c_i^- - c_{i-1}^-| \leq \Delta x \|\partial_x c\|_\infty$.
   (f) Déduire de tout ce qui précède que, sous la condition (12), on a

$$\|U^{n+1}\|_2^2 \leq \Big(1 + 2\|\partial_x c\|_\infty \Delta t\Big) \|U^n\|_2^2, \ \ \forall n \geq 0.$$

   (g) Conclure à la stabilité L^2 du schéma en montrant l'estimation suivante, que l'on comparera à (13) :

$$\sup_{n \leq \frac{T}{\Delta t}} \|U_n\|_2^2 \leq e^{2\|\partial_x c\|_\infty T} \|U_0\|_2^2. \tag{14}$$

Exercice 10 (Schémas pour les systèmes hyperboliques à coefficients constants)

On s'intéresse dans cet exercice à des schémas numériques pour le problème étudié dans l'exercice 4

$$\begin{cases} \partial_t U + A\partial_x U = 0, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(0,x) = U_0(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où U est une fonction inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et A une matrice diagonalisable à valeurs propres réelles. On a vu dans l'exercice 4 que ce problème admet une unique solution pour tout donnée initiale $x \in \mathbb{R} \mapsto U_0(x) \in \mathbb{R}^2$.

1. On considère tout d'abord les deux schémas suivants

$$\frac{1}{\Delta t}(U_i^{n+1} - U_i^n) + A\frac{1}{\Delta x}(U_i^n - U_{i-1}^n) = 0, \ \ \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{SDAG}$$

$$\frac{1}{\Delta t}(U_i^{n+1} - U_i^n) + A\frac{1}{\Delta x}(U_{i+1}^n - U_i^n) = 0, \ \ \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{SDAD}$$

En choisissant par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

justifier que ces deux schémas sont instables pour toutes valeurs de Δt et Δx.

Dans la suite, on va proposer de nouveaux schémas qui présentent de meilleures propriétés de stabilité.

2. Démontrer qu'on peut écrire toute matrice A vérifiant les hypothèses ci-dessus sous la forme $A = A^+ + A^-$ où $A^+A^- = A^-A^+ = 0$, $\mathrm{Sp}(A^+) \subset \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{Sp}(A^-) \subset \mathbb{R}^-$.

3. On considère maintenant le schéma suivant

$$\frac{1}{\Delta t}(U_i^{n+1} - U_i^n) + A^+\frac{1}{\Delta x}(U_i^n - U_{i-1}^n) + A^-\frac{1}{\Delta x}(U_{i+1}^n - U_i^n) = 0, \ \ \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{SD}$$

   (a) Démontrer que ce schéma est L^∞-stable sous la condition CFL

$$\max(\rho(A^+), \rho(A^-))\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \tag{16}$$

   On pourra introduire un changement d'inconnue adapté qui ramène le problème à une situation bien connue.

   (b) Définir l'erreur de consistance R_i^n (qui est un élément de $\mathbb{R}^2$) pour ce schéma et démontrer que celle-ci est d'ordre 1 en temps et en espace.

   (c) Démontrer que si A est symétrique, on peut alors supposer que A^+ et A^- sont symétriques. Dans ce cas, en prenant le produit scalaire (dans $\mathbb{R}^2$) de l'équation (SD) avec U_i^n puis en sommant sur i, démontrer que le schéma est L^2-stable sous la condition CFL

$$\rho(A)\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

4. La décomposition $A = A^+ + A^-$ proposée ci-dessus n'est pas toujours agréable à calculer (en particulier si la matrice A dépend de x, ce qui n'est pas le cas ici ...). On propose donc de choisir $A^+ = (A + \lambda \mathrm{Id})/2$ et $A^- = (A - \lambda \mathrm{Id})/2$.

   (a) Démontrer que si $\lambda \geq \rho(A)$, alors on a $\mathrm{Sp}(A^\pm) \subset \mathbb{R}^\pm$.

   (b) Pour de telles valeurs de λ, comment s'écrit la condition (16). Quelle valeur de λ a-t'on intérêt à choisir ?

   (c) On prend $\lambda = \Delta x/\Delta t$. Réécrire astucieusement le schéma (SD). Quel schéma vu dans le cas scalaire, retrouve-t'on ici ?