Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université

Année 2010-2011

Analyse Numérique
Equations différentielles ordinaires
Correction

Correction de l'exercice 1

1. On a affaire à une équation différentielle linéaire non-homogène. Pour la résoudre, il faut d'abord trouver la solution générale de l'équation homogène associée

$$y' = y,$$

puis une solution particulière de l'équation complète.
L'équation homogène se résout immédiatement comme suit

$$y = Ce^t,$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante indéterminée. Pour trouver une solution particulière, on peut utiliser la méthode de la variation de la constante qui consiste à chercher une telle solution sous la forme

$$y(t) = C(t)e^t.$$

On calcule

$$y'(t) = C'(t)e^t + C(t)e^t = C'(t)e^t + y(t).$$

Ainsi, une telle fonction y est solution de l'équation complète si et seulement si on a $C'(t)e^t = \sin(t)$. On obtient

$$C'(t) = e^{-t}\sin(t),$$

il nous faut donc trouver une primitive de cette fonction

$$C(t) = \int^t e^{-s}\sin(s)\,ds,$$

par une double intégration par parties

$$\begin{aligned} C(t) = -e^{-t}\sin(t) + \int^t e^{-s}\cos(s)\,ds = -e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t) - \int^t e^{-s}\sin(s)\,ds \\ = -e^{-t}\sin(t) - e^{-t}\cos(t) - C(t), \end{aligned}$$

d'où

$$C(t) = -\frac{e^{-t}}{2}(\sin(t) + \cos(t)).$$

En reportant ceci dans l'expression de y, on trouve la solution particulière

$$y(t) = -\frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)).$$

In fine, la solution générale de l'équation est donnée par

$$y(t) = Ce^t - \frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)),$$

où $C \in \mathbb{R}$ est une constante arbitraire. Ces solutions sont bien sûr globales (i.e. bien définies pour toute valeur de t).

2. On a affaire à un système d'équations différentielles **linéaire** et **à coefficients constants**. Si on note $U(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, ce système s'écrit
$$U'(t) = AU(t),$$
avec
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
On a vu en cours que les solutions de ce système sont alors données par
$$U(t) = e^{tA}U_0,$$
pour toute donnée initiale $U_0 \in \mathbb{R}^2$. Il s'agit donc de calculer l'exponentielle de la matrice tA. Pour ce faire, on remarque que A est diagonalisable avec
$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{5+3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{5+3\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{=P}.$$
Il vient
$$e^{tA} = P^{-1} \begin{pmatrix} \exp(t\frac{3+\sqrt{5}}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(t\frac{3-\sqrt{5}}{2}) \end{pmatrix} P.$$
Il suffit alors de calculer les produits matriciels pour obtenir le résultat explicite.

Correction de l'exercice 2

Le "piège" de cet exercice vient du fait que les équations différentielles considérées ne sont pas **résolues** sur $\mathbb{R}$ tout entier du fait que le coefficient t^3 devant le terme y' s'annule en $t = 0$. En particulier ces équations ne relèvent ni du théorème de Cauchy-Lipschitz, ni de la théorie des EDO linéaires sur $\mathbb{R}$ tout entier.
En revanche, si on exclut la valeur $t = 0$ (c'est-à-dire en travaillant sur $\mathbb{R}_*^+$ et sur $\mathbb{R}_*^-$ séparément), on peut utiliser les résultats connus.

1. Etudions la première équation :
   - Résolution sur $\mathbb{R}_*^+$: La fonction constante $y = 1$ est manifestement solution de l'équation. L'équation homogène $t^3y' + y = 0$ s'écrit $y' = -\frac{1}{t^3}y$ et sa solution est donnée par
   $$y = C_1 e^{\frac{1}{2t^2}}, \ \ C_1 \in \mathbb{R}.$$
   Bilan, la solution générale de cette équation sur $\mathbb{R}_*^+$ est donc donnée par
   $$y = 1 + C_1 e^{\frac{1}{2t^2}}, \ \ t > 0.$$
   - Résolution sur $\mathbb{R}_*^-$: le calcul est le même et on trouve les solutions suivantes :
   $$y = 1 + C_2 e^{\frac{1}{2t^2}}, \ \ t < 0.$$

   Quelles sont les solutions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier ? Il faut se demander si on peut recoller les deux familles de solutions en $t = 0$. On voit que cela n'est possible que si $C_1 = C_2 = 0$ (sinon les solutions obtenues précédemment explosent en 0).

   Bilan : La solution constante $y = 1$ est la seule solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, toutes les autres solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}_*^+$ ou sur $\mathbb{R}_*^-$. En particulier, le problème de Cauchy pour la donnée $(0, y_0)$ n'a de solution que si $y_0 = 1$, ce qui est bien très différent de la situation relevant du théorème de Cauchy-Lipschitz.

2. La méthode est identique au cas précédent.
   - Sur $\mathbb{R}_*^+$ on obtient les solutions
   $$y(t) = 1 + C_1 e^{-\frac{1}{2t^2}}.$$
   - Sur $\mathbb{R}_*^-$ on obtient les solutions
   $$y(t) = 1 + C_2 e^{-\frac{1}{2t^2}}.$$

   Cette fois-ci, on voit que ces deux familles de solutions se recollent pour toutes valeurs de C_1 et C_2 (car les deux fonctions y tendent vers 0 quand t tend vers 0 par valeurs positives ou négatives). Dans ce cas, toutes les solutions maximales de l'équation sont globales et données par
   $$y(t) = \begin{cases} 1 + C_2 e^{-\frac{1}{2t^2}} & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \\ 1 + C_1 e^{-\frac{1}{2t^2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$
   pour toutes valeurs de $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 3 (Les méthodes d'Euler dans le cas linéaire)

Rappellons pour commencer, la formule qui donne la méthode d'Euler explicite dans le cadre qui nous occupe
$$\begin{cases} \dfrac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = A y^n, \;\; \forall n \geq 0, \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$
et la méthode d'Euler implicite
$$\begin{cases} \dfrac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = A y^{n+1}, \;\; \forall n \geq 0, \\ y^0 = y_0 \end{cases}$$

1. Ici A est donc un nombre réel (i.e. une matrice de taille 1×1), et la suite des approximations donne donc
   $$y^M = (1 + \Delta t A)^M y_0.$$
   Par définition, on a $\Delta t = T/M$ et donc
   $$y^M = \left(1 + \frac{TA}{M}\right)^M.$$
   La limite de cette suite quand on augmente le nombre de pas de temps M est donnée par (passer au logarithme par exemple)
   $$\lim_{\Delta t \to 0} y^M = e^{TA},$$
   ce qui est bien la solution exacte en T de l'équation considérée.
   Pour la méthode d'Euler implicite, on trouve
   $$y^M = \frac{y_0}{(1 - \Delta t A)^M},$$
   qui n'est bien définie que si $1 - \Delta t A$ n'est pas nul (ce qui est vrai dès que Δt est assez petit !). On obtient ici
   $$\lim_{\Delta t \to 0} y^M = \frac{y_0}{e^{-TA}} = y_0 e^{TA},$$
   et la méthode est donc bien convergente aussi.

On suppose que $y_0 \geq 0$.

- Les itérées y^n de la méthode explicite sont toutes positives dès que $1 + \Delta t A$ est positif. Comme Δt est toujours positif, on voit que cette condition est toujours remplie si $A \geq 0$ et que si $A \leq 0$, elle n'est remplie que sous la condition
$$\Delta t \leq \frac{1}{|A|}.$$
- La situation pour la méthode implicite est symétrique. La condition de positivité est $1 - \Delta t A \geq 0$. Ainsi, si A est négative, ceci est toujours vrai alors que si A est positive, la condition n'est remplie que si
$$\Delta t \leq \frac{1}{|A|}.$$

On conclut de cela que selon le signe de A les méthodes explicites et implicites n'ont pas les mêmes propriétés. En général, on préfère choisir une méthode qui garantit les bonnes propriétés de la solution sans hypothèse sur le pas de temps (en effet si $|A|$ est grand, la condition sur Δt peut être très contraignante !)

2. (a) Calculons la dérivée par rapport au temps de la norme (euclidienne !) au carré de la solution. On trouve
$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = 2(y'(t), y(t)) = 2(Ay(t), y(t)),$$
or A étant définie négative (en fait, négative suffit) on sait que
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \ \ (A\xi, \xi) \leq 0.$$
Ainsi, on a montré que $t \mapsto \|y(t)\|^2$ est une fonction décroissante (et positive !), elle est donc bien bornée sur $[0, +\infty[$.

   (b) Dans le cas présent, il s'agit de savoir, étant donnée l'approximation y^n au temps t^n, si la solution y^{n+1} définie par l'équation
$$y^{n+1} - y^n = \Delta t A y^{n+1},$$
est bien définie. Pour cela, on récrit cette équation sous la forme
$$(\,\mathrm{Id} - \Delta t A)y^{n+1} = y^n,$$
et on voit qu'il s'agit de savoir si $B = \mathrm{Id} - \Delta t A$ est une matrice inversible. Or, A étant définie négative elle n'a que des valeurs propres strictement négatives. En particulier $1/\Delta t$ n'est pas valeur propre de A et donc B est inversible. Ainsi, la suite $(y^n)_n$ est parfaitement définie !

   (c) On utilise ici aussi la négativité de la matrice A qui donne $(Ay^{n+1}, y^{n+1}) \leq 0$. En mettant ceci dans le schéma, on trouve
$$(y^{n+1} - y^n, y^{n+1}) \leq 0,$$
ce qui fournit
$$\|y^{n+1}\|^2 \leq (y^n, y^{n+1}).$$
On utilise maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir
$$\|y^{n+1}\| \leq \|y^n\|,$$
ce qui montre bien la décroissante de la suite $(\|y^n\|)_n$ et donc, en particulier, l'estimation cherchée
$$\|y^n\| \leq \|y^0\|, \ \ \forall n \geq 0.$$

3. (a) On calcule à nouveau la dérivée en temps de $t \mapsto \|y(t)\|^2$, ce qui donne
$$\frac{d}{dt}\|y(t)\|^2 = 2(y'(t), y(t)) = 2(Ay(t), y(t)),$$
mais comme A est supposée antisymétrique, cette quantité est nulle et donc on trouve bien que $t \mapsto \|y(t)\|^2$ est une fonction constante au cours du temps.

   (b) – Euler explicite : on prend le produit scalaire du schéma numérique à l'instant n par y^n, ce qui donne
$$(y^{n+1} - y^n, y^n) = \Delta t(Ay^n, y^n) = 0,$$

car A est antisymétrique. On utilise alors la formule algébrique suivante

$$(a-b,b)=\frac{1}{2}\|a\|^2-\frac{1}{2}\|b\|^2-\frac{1}{2}\|a-b\|^2,$$

ce qui montre que

$$\|y^{n+1}\|^2=\|y^n\|^2+\|y^{n+1}-y^n\|^2.$$

Ainsi, deux cas de figure se présentent :

– S'il existe un rang n_0 tel que $y^{n_0}=y^{n_0+1}$, alors bien entendu on a $\|y^{n_0+1}\|=\|y^{n_0}\|$ mais on a aussi (à cause du schéma) : $Ay^{n_0}=0$, autrement dit y^{n_0} est dans le noyau de A. Il est alors clair que la suite $(y^n)_n$ est stationnaire à partir du rang n_0.

– Sinon, la quantité $\|y^{n+1}-y^n\|^2$ est strictement positive et on voit alors que la suite des normes $(\|y^n\|)_n$ est strictement croissante.

– Euler implicite : on prend ici le produit scalaire du schéma numérique par y^{n+1} ce qui donne cette fois

$$(y^{n+1}-y^n,y^{n+1})=\Delta t(Ay^{n+1},y^{n+1})=0.$$

On utilise la même formule algébrique que dans le cas précédent (en réalité son opposé ...) pour obtenir cette fois

$$\|y^{n+1}\|^2=\|y^n\|^2-\|y^{n+1}-y^n\|^2.$$

Un raisonnement similaire au précédent montre que si la suite $(y^n)_n$ n'est pas stationnaire à partir d'un certain rang, alors la suite des normes $\|y^n\|_n$ est strictement décroissante.

En conclusion, sauf dans des cas très particuliers où la solution est dans le noyau de A (dans ce cas la solution exacte de l'équation est constante !), on voit qu'aucune des deux méthodes d'Euler ne préserve la propriété de l'équation initiale qui est que la norme de la solution est constante au cours du temps.

(c) Il s'agit de montrer que si y^n est connu, alors il existe une unique solution y^{n+1} à l'équation

$$(\,\mathrm{Id}-\Delta t/2A)y^{n+1}=(\,\mathrm{Id}+\Delta t/2A)y^n.$$

Autrement dit, il s'agit de vérifier que la matrice $B=\mathrm{Id}-\Delta t/2A$ est inversible. Pour cela, supposons qu'il existe un élément $x\in\mathbb{R}^d$ non nul dans le noyau de cette matrice B. On a donc $x=\Delta t/2Ax$. En prenant le produit scalaire avec x de cette expression et en utilisant l'antisymétrie de A, on obtient

$$\|x\|^2=\Delta t/2(Ax,x)=0,$$

et donc $x=0$, ce qui montre bien que B est inversible et donc que le schéma proposé est bien posé.

Prenons le produit scalaire de l'équation qui définit le schéma par la quantité $\frac{y^{n+1}+y^n}{2}$. Toujours en utilisant l'antisymétrie de A, on trouve

$$0=(y^{n+1}-y^n,y^{n+1}+y^n)=\|y^{n+1}\|^2-\|y^n\|^2,$$

et donc cette fois, le schéma préserve la norme de la solution au cours du temps. Ce nouveau schéma semble donc se comporter bien mieux que les précédents.

(d) Par définition, l'erreur de consistance associée à ce schéma et à une solution exacte de l'équation différentielle étudiée est définie par

$$R^n = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\Delta t} - A\frac{y^{t^{n+1}} + y^{t^n}}{2}.$$

Effectuons un développement de Taylor de y au point t^n

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + \Delta t y'(t^n) + \frac{DT^2}{2}y''(t^n) + O(\Delta t^3).$$

On utilise le fait que y est solution de l'équation différentielle pour en déduire

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + \Delta t A y(t^n) + \frac{\Delta t^2}{2}A^2 y(t^n) + O(\Delta t^3).$$

En reportant cette expression dans la définition de R^n, on trouve

$$R^n = Ay(t^n) + \frac{\Delta t}{2}A^2 y(t^n) + O(\Delta t^2) - A\left(y(t^n) + \frac{\Delta t}{2}Ay(t^n) + O(\Delta t^2)\right) = O(\Delta t^2).$$

Ainsi, l'erreur de consistance de ce schéma est d'ordre 2 ! Rappelons que les schémas d'Euler explicite et Euler implicite sont d'ordre 1.

Reprenons la démonstration du cours : on définit l'erreur d'approximation du schéma $e^n = y(t^n) - y^n$ et on écrit l'équation vérifiée par e^n en soustrayant la définition de R^n et le schéma numérique. On trouve

$$\frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} + A\frac{e^{n+1} + e^n}{2} = R^n.$$

On prend maintenant le produit scalaire de cette équation par $e^{n+1} + e^n$ (pour éliminer, par antisymétrie, le terme contenant A). Tous calculs faits, il reste

$$\|e^{n+1}\|^2 - \|e^n\|^2 = \Delta t(R^n, e^{n+1} + e^n).$$

On utilise alors les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young

$$\begin{aligned}\|e^{n+1}\|^2 &\leq \|e^n\|^2 + \Delta t\|R^n\|(\|e^{n+1}\| + \|e^n\|)\\ &\leq (1 + \Delta t/2)\|e^n\|^2 + \Delta t/2\|e^{n+1}\|^2 + \Delta t\|R^n\|^2.\end{aligned}$$

D'où on déduit

$$(1 - \Delta t/2)\|e^{n+1}\|^2 \leq (1 + \Delta t/2)\|e^n\|^2 + \Delta t\|R^n\|^2.$$

On suppose maintenant que $\Delta t < 1$ (ceci est bien raisonnable car on s'intéresse à la limite du schéma quand $\Delta t \to 0$), on peut donc obtenir

$$\|e^{n+1}\|^2 \leq \frac{1 + \Delta t/2}{1 - \Delta t/2}\|e^n\|^2 + \frac{\Delta t}{1 - \Delta t/2}\|R^n\|^2.$$

On utilise alors les inégalités suivantes (se convaincre qu'elles sont bien vraies ! !)

$$\forall \Delta t < 1, \quad \frac{1 + \Delta t/2}{1 - \Delta t/2} \leq 1 + 2\Delta t, \quad \text{et} \quad \frac{\Delta t}{1 - \Delta t/2} \leq 2\Delta t,$$

pour obtenir

$$\|e^{n+1}\|^2 \leq (1 + 2\Delta t)\|e^n\|^2 + 2\Delta t\|R^n\|^2.$$

On est alors typiquement dans une situation d'application du lemme de Gronwall discret. Pour le voir, on somme les inégalités ci-dessus pour $n = 0, ..., N$, en remarquant que l'erreur initiale est nulle

$$\forall \geq 0, \quad \|e^{N+1}\|^2 \leq 2\left(\sum_{n=0}^{N} \Delta t\|R^n\|^2\right) + 2\sum_{k=0}^{N} \Delta t\|e^k\|^2.$$

Le lemme de Gronwall discret s'applique bien et nous donne

$$\forall N \geq 0, \quad \|e^{N+1}\|^2 \leq 2\left(\sum_{n=0}^{N} \Delta t\|R^n\|^2\right) e^{2N\Delta t}.$$

On utilise la majoration $\|R^n\| \leq C\Delta t^2$ obtenue plus haut et on trouve

$$\sup_{N\Delta t\leq T} \|e^{N+1}\|^2 \leq 2C^2 N\Delta t\Delta t^4 e^{2N\Delta t} \leq 2C^2 T\Delta t^4 e^{2T}.$$

Ainsi, on a bien montré l'existence d'une certaine constante $\tilde{C}$ telle que

$$\sup_{N\Delta t\leq T} \|e^{N+1}\| \leq \tilde{C}\Delta t^2.$$

Le schéma est donc d'ordre 2 en temps.

Correction de l'exercice 4

1. (a) La fonction $F : y \mapsto \alpha y(1-y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique et donne le résultat souhaité.

   (b) Il est clair que 0 et 1 sont bien des zéros de F, donc des points d'équilibre de l'équation. Pour étudier la stabilité au voisinage de ce point, le théorème du cours nous invite à regarder la jacobienne de F en ces points (autrement dit, la dérivée usuelle dans ce cas !). On constate que

   $$F'(0) = \alpha > 0, \;\; F'(1) = -\alpha < 0.$$

   Ainsi, 0 est un point asymptotiquement instable et 1 est un point asymptotiquement stable.

   (c) i. D'après la propriété d'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, une solution ne peut prendre les valeurs 0 ou 1 (les points critiques !) que si c'est la solution constante. Ceci n'est donc pas possible si la donnée initiale est dans $]0, 1[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, ceci implique bien que $y(t) \in]0, 1[, \;\; \forall t \in I$

   ii. La propriété précédente montre que la solution y reste bornée aux bornes de son intervalle de définition. Il ne peut donc pas se produire d'explosion en temps fini, ce qui montre d'après le théorème du cours que $I = \mathbb{R}$.

   iii. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $y(t) \in]0, 1[$, et donc $y'(t) = \alpha y(t)(1 - y(t)) > 0$, ce qui montre bien que y est strictement croissante.

   iv. Comme y est une fonction croissante qui est minorée et majorée, elle admet des limites notées $y^{\pm}$ en $\pm\infty$. Par ailleurs, remarquons qu'on a nécessairement $y^+ \in]0, 1]$ et $y^- \in [0, 1[$.

   Comme $y' = \alpha y(1 - y)$ et que y a des limites en $\pm\infty$, on en déduit que y' a également des limites finies en $\pm\infty$. Ceci montre que l'on a forcément $\lim_{\pm\infty} y'(t) = 0$ (**s'en convaincre !**). On peut alors passer à la limite quand $t \to \pm$ dans l'équation différentielle, on obtient

   $$y^{\pm}(1 - y^{\pm}) = 0.$$

   D'après les bornes *a priori* sur les limites, on voit que l'on a nécessairement

   $$y^+ = 1, \;\; y^- = 0.$$

   v. On a déjà vu que y reste bornée entre 0 et 1, donc $y' = \alpha y(1 - y)$ reste bornée entre 0 et $\alpha/4$. De même, en dérivant l'équation, on a $y'' = y'(1 - 2y)$ qui est donc reste bornée entre $-\alpha$ et α.

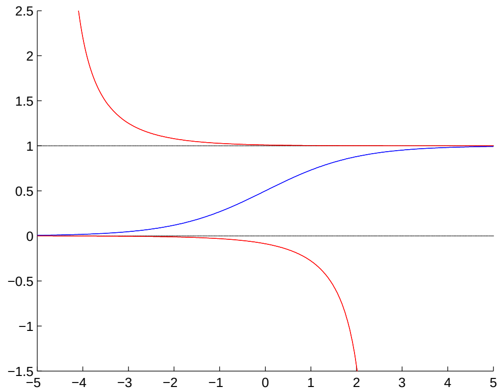
(d) i. Le raisonnement est similaire au cas précédent : s'il existe un temps t tel que $y(t) \leq 1$, alors nécessairement y atteint la valeur 1 à un certain instant. Comme 1 est un point critique de l'équation, ceci n'est possible que si y est constante égale à 1. Ceci est bien sûr impossible dans le cas $y_0 > 1$.

ii. Comme $y > 1$, on a $y' = \alpha y(1-y) < 0$ et y est donc bien strictement décroissante.

iii. y est décroissante sur I et elle est minorée par 1, donc elle est bornée au voisinage de $\sup I$, ce qui montre par le théorème d'explosion en temps fini que nécessairement $\sup I = +\infty$ et donc que $[0, +\infty[\subset I$. Par ailleurs, il est clair qu'une telle fonction y a une limite en $+\infty$. Celle-ci est nécessairement supérieure ou égale à 1 et ne peut-être qu'un point critique de l'équation par le même raisonnement que ci-dessus. Donc, la limite vaut 1.

(e) Cette question se traite exactement comme la précédente.

(f) Voici l'allure des solutions



2. On a vu ci-dessus que les solutions non-triviales (i.e. non constantes) de l'équation ne peuvent jamais atteindre les valeurs 0 et 1, ce qui signifie que $y(1-y)$ ne va jamais s'annuler. On peut donc diviser les deux membres de l'équation par $y(1-y)$ et obtenir

$$\frac{y'}{y(1-y)} = \alpha.$$

Le membre de gauche de transforme de façon usuelle

$$\frac{y'}{y} + \frac{y'}{1-y} = \alpha.$$

On reconnaît alors deux primitives usuelles (ne pas oublier les valeurs absolues ! ! !) :

$$\frac{d}{dt}\left(\log|y| - \log|1-y|\right) = \alpha.$$

On trouve donc

$$\log\left|\frac{y}{1-y}\right| = C + \alpha t,$$

où C est une constante d'intégration. Il vient maintenant

$$\left|\frac{y}{1-y}\right| = e^C e^{\alpha t}.$$

Si on note $K = e^C \in]0, +\infty[$, on trouve deux cas possibles

$$\frac{y}{1-y} = Ke^{\alpha t}, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{1-y} = -Ke^{\alpha t},$$

qui donnent respectivement (avec $K > 0$!)

$$y = \frac{Ke^{\alpha}t}{1+Ke^{\alpha t}}, \quad \text{ou} \quad y = -\frac{Ke^{\alpha t}}{1-Ke^{\alpha t}}.$$

Dans le premier cas, on obtient des solutions globales qui prennent leurs valeurs dans l'intervalle $]0,1[$. Dans le second cas, les solutions ne sont pas globales car elles explosent en $t = \log(1/K)/\alpha$.

3. (a) i. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a $g'(y) = 1+\alpha\Delta t - 2\alpha\Delta t y$. Sous l'hypothèse $\alpha\Delta t < 1$, on voit donc que g est strictement croissante sur $[0,1]$ et que $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. En conséquence $g([0,1]) = [0,1]$ et on a bien la propriété annoncée.

   ii. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc sa dérivée est bornée sur le compact $[0,1]$. On a même
$$\sup_{[0,3/2]} |F'| = \alpha.$$
Le théorème des accroissements finis montre alors que F est α-Lipschitzienne sur $[0,1]$.

   iii. On définit, comme en cours, l'erreur de consistance associée à la solution y considérée de l'équation
$$R^n = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\Delta t} - F(y(t^n)),$$
et on montre, par des développements de Taylor que l'on a
$$|R^n| \leq \frac{\Delta t}{2} \sup |y'| \leq \frac{\alpha\Delta t}{8},$$
d'après la question 1.c.v).
On note $e^n = y(t^n) - y^n$ l'erreur d'approximation du schéma et on écrit l'équation vérifiée par l'erreur
$$e^{n+1} = e^n + \Delta t\left(F(y(t^n)) - F(y^n)\right) + \Delta t R^n.$$
On a vu précédemment que pour tout n, on a d'une part $y(t^n) \in]0,1[$ et d'autre part $y^n \in]0,1[$. Comme F est α-Lipschitzienne sur cet intervalle, on en déduit que
$$|e^{n+1}| \leq |e^n| + \alpha\Delta t|e^n| + \Delta t|R^n|.$$
La suite de la démonstration, à l'aide du lemme de Gronwall discret est strictement identique à celle du cours.

(b) On reprend la fonction g définie plus haut et on constate que si $\alpha\Delta t > 1$, on a $g'(1) < 0$ et $g(1) = 1$. Donc pour toute valeur $y^0 < 1$ suffisamment proche de 1, on a $g(1) > 1$, ce qui montre bien le résultat.
Ceci n'est pas satisfaisant car on sait que la solution exacte doit rester entre 0 et 1. Cette propriété peut être cruciale selon l'interprétation que l'on veut faire de y. On voit donc que le schéma d'Euler ne respecte cette propriété que si $\alpha\Delta t < 1$. En particulier si α est grand, ceci donne une condition de petitesse sur le pas de temps qui est contraignante.

(c) i. L'équation définissant le schéma s'écrit
$$y^{n+1}(1 + \alpha\Delta t y^n) = y^n + \alpha\Delta t y^n,$$
et comme le coefficient devant y^{n+1} ne s'annule pas, cette formule définit bien y^{n+1} de façon unique et on a
$$y^{n+1} = \frac{(1+\alpha\Delta t)y^n}{1+\alpha\Delta t y^n}.$$
Bien que le schéma semble initialement implicite, on voit qu'il existe une formule explicite pour calculer les solutions approcher. Ce schéma est donc aussi aisé à implémenter que le schéma d'Euler.

   ii. De la formule ci-dessus, on voit immédiatement que si $y^n > 0$ alors $y^{n+1} > 0$. Mais de cette même formule on tire
$$1 - y^{n+1} = \frac{1-y^n}{1+\alpha\Delta t y^n},$$
qui montre également que si $y^n \in]0,1[$, on a $1 - y^{n+1} > 0$. D'où le résultat.

   iii. C'est une simple récurrence sur n.

   iv. L'erreur de consistance pour ce schéma associée à la solution exacte y est définie par

$$R^n = \frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{\Delta t} - \alpha y(t^n)\left(1 - y(t^{n+1})\right).$$

v. Il suffit de faire des développements de Taylor et d'utiliser le fait que y, y' et y'' sont bornées.

vi. Il suffit juste de soustraire la définition de R^n et la définition du schéma, puis de faire une petite manipulation algébrique.

vii. On utilise la formule précédente et on isole e^{n+1} en fonction de e^n et R^n

$$e^{n+1} = \frac{1}{1+\alpha\Delta t y^n}\left(e^n + \alpha\Delta t e^n(1 - y(t^{n+1})) + \Delta t R^n\right),$$

puis on passe aux valeurs absolues en utilisant le fait que y^n et $y(t^{n+1})$ sont dans $]0,1[$.

viii. La preuve se conclut de la même façon que dans le cours.

Correction de l'exercice 5

1. Il s'agit d'une équation linéaire du second ordre. L'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel de dimension 2. Ses solutions sont classiques :
   - Pour $\lambda = 0$:
   $$y(x) = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$
   - Pour $\lambda > 0$:
   $$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x).$$
   - Pour $\lambda < 0$:
   $$y(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}.$$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On se demande s'il est possible qu'une solution non-triviale de l'équation s'annule en $x = 0$ **et** en $x = 1$.
   - Pour $\lambda = 0$: cela n'est possible que si $A = B = 0$, c'est-à-dire si $y = 0$ (on a affaire à une fonction affine !).
   - Pour $\lambda < 0$: les conditions recherchées s'écrivent
   $$A + B = 0, \text{ et } Ae^{\lambda} + Be^{-\lambda} = 0.$$
   Ce système d'équations linéaires en (A, B) a pour matrice
   $$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda} & e^{-\lambda} \end{pmatrix},$$
   qui a pour déterminant $\det M = e^{-\lambda} - e^{\lambda} > 0$ car $\lambda < 0$. Ainsi M est inversible et la seule solution possible est $A = B = 0$.
   - Pour $\lambda > 0$: les conditions s'écrivent
   $$A = 0, \text{ et } B\sin\sqrt{\lambda} = 0.$$
   Ces équations admettent une solution non triviale si et seulement si
   $$\sin\sqrt{\lambda} = 0,$$
   ce qui donne
   $$\sqrt{\lambda} \in \pi\mathbb{N}^*.$$
   Ainsi pour tout $k \geq 0$, la valeur $\lambda_k = k^2\pi^2$ convient et fournit une solution unique (à constante multiplicative près) du problème donnée par
   $$y_k(x) = \sin(k\pi x).$$
3. Soit y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et qui s'annule en $x = 0$ et $x = 1$.

   On considère maintenant l'unique fonction $\tilde{y}$ définie sur $\mathcal{R}$ qui soit **impaire**, 2-périodique et qui coincide avec y sur $[0,1]$.

On a ainsi par exemple
$$\tilde{y}(x) = -y(-x), \quad \forall x \in [-1, 0],$$
$$\tilde{y}(x) = -y(2-x), \quad \forall x \in [1, 2].$$

Comme $y(0) = y(1) = 0$, on vérifie aisément que la fonction $\tilde{y}$ est continue. En réalité, on peut même montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{R}$ (il suffit pour cela d'étudier ce qui se passe en $x = 0$ et $x = 1$).

Comme $\tilde{y}$ est 2-périodique, on peut lui appliquer la théorie des séries de Fourier et plus précisément le théorème de Fejer (dans sa version la plus élémentaire) qui nous dit que la série de Fourier de $\tilde{y}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers $\tilde{y}$, ce qui signifie que l'on a

$$\tilde{y}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k\geq 1}(a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)), \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

où les a_k et b_k sont donnés par

$$a_k = \int_0^2 \tilde{y}(x)\cos(kx)\,dx, \ \ \forall k \geq 0,$$

$$b_k = \int_0^2 \tilde{y}(x)\sin(kx)\,dx, \ \ \forall k \geq 1.$$

Comme toutes les fonctions en jeu sont 2-périodiques, on peut remplacer les intégrales entre 0 et 2 par des intégrales entre -1 et 1

$$a_k = \int_{-1}^1 \tilde{y}(x)\cos(kx)\,dx, \ \ \forall k \geq 0,$$

$$b_k = \int_{-1}^1 \tilde{y}(x)\sin(kx)\,dx, \ \ \forall k \geq 1.$$

Comme $\tilde{y}$ est impaire (par construction !) et que $x \mapsto \cos(kx)$ est paire, on voit que tous les coefficients a_k sont nuls ! En conclusion, on obtient la formule souhaitée

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k\geq 1} b_k \sin(k\pi x), \ \ \forall x \in \mathcal{R},$$

qui donne bien le résultat souhaitée si on la spécialise à l'intervalle $[0, 1]$

$$y(x) = \sum_{k\geq 1} b_k \sin(k\pi x), \ \ \forall x \in [0, 1],$$

la convergence étant normale sur tout $[0, 1]$.

Correction de l'exercice 6

1. Le problème de Cauchy associé à cette équation s'écrit : pour $t_0, y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, trouver une fonction y vérifiant
$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0, \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$
En effet, si on pose $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, ce problème se met sous la forme d'un système du premier ordre
$$\begin{cases} Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & 0 \end{pmatrix}}_{=A(t)} Y, \\ Y(t_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Il s'agit donc d'un système linéaire de dimension 2 à coefficients définis et continus sur $\mathbb{R}$. Ce problème de Cauchy admet donc une unique solution **globale** pour toute donnée initiale.

2. Raisonnons par l'absurde et supposons que les zéros de y ne sont pas isolés. Cela signifie qu'il existe une suite convergente $(t_k)_k$ de points tous distincts tels que $y(t_k) = 0$. Quitte à extraire une sous-suite convenable de $(t_k)_k$, on peut supposer que la suite $(t_k)_k$ est strictement monotone. On supposera que $(t_k)_k$ est strictement croissante (l'autre cas pouvant se traiter de façon tout à fait similaire).
   On note t^* la limite de la suite $(t_k)_k$. Par continuité de y, on sait que
$$y(t^*) = 0.$$
   Pour tout $k \geq 0$, on sait que $t_k < t_{k+1}$ et que $y(t_k) = y(t_{k+1})$, donc le théorème de Rolle nous donne l'existence d'un réel ξ_k tel que
$$t_k < \xi_k < t_{k+1}, \quad y'(\xi_k) = 0.$$
   Par le théorème des gendarmes, on sait que la suite $(\xi_k)_k$ converge vers t^* et donc par continuité de y', on en déduit que
$$y'(t^*) = 0.$$
   Au final, on a donc montré l'existence d'un instant t^* pour lequel on a simultanément $y(t^*) = 0$ et $y'(t^*) = 0$. Ainsi, y est solution du problème de Cauchy en t^* pour la donnée initiale $(0, 0)$. Comme on sait que la fonction identiquement nulle est la seule solution de ce problème de Cauchy, on en déduit que la fonction y est identiquement nulle, ce qui contredit l'hypothèse.
3. On suppose que y et z ne sont pas proportionnelles. Si aucune des deux fonctions n'a de zéro, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que y admet des zéros (qui sont donc isolés !).
   Introduisons la quantité suggérée dans l'énoncé $w(t) = y'(t)z(t) - y(t)z'(t)$ (qui s'appelle le Wronskien des deux solutions y et z) et calculons sa dérivée
$$w'(t) = y''(t)z(t) + y'(t)z'(t) - y'(t)z'(t) - y(t)z''(t) = q(t)y(t)z(t) - q(t)y(t)z(t) = 0.$$
   Ainsi, la fonction w est une constante. Etudions la situation selon si la fonction w est nulle ou pas.
   - Supposons que $\forall t \in \mathbb{R}, w(t) = 0$.
     Dans ce cas, tout zéro de y est un zéro de z. En effet si $y(t^*) = 0$, alors on a
$$0 = w(t^*) = y'(t^*)z(t^*) - \underbrace{y(t^*)z'(t^*)}_{=0} = y'(t^*)z(t^*).$$
     Par ailleurs $y'(t^*)$ ne peut pas être nul (sinon y serait identiquement nulle !) donc on a bien $z(t^*) = 0$.
     Réciproquement, tout zéro de z est un zéro de y.
     Les deux fonctions y et z ont donc exactement les mêmes zéros. Soit t^* un tel point. On sait que $y'(t^*) \neq 0$ et $z'(t^*) \neq 0$ car les deux fonctions ne sont pas identiquement nulles.
     On pose alors $\tilde{y}(t) = \frac{y'(t^*)}{z'(t^*)}z(t)$. Cette nouvelle fonction est solution de l'équation différentielle et vérifie
$$\tilde{y}(t^*) = 0 = y(t^*),$$
$$\tilde{y}'(t^*) = y'(t^*).$$
     Ainsi y et $\tilde{y}$ sont solutions du même problème de Cauchy pour l'équation considérée. Par unicité d'une telle solution, on a donc $y = \tilde{y}$, ce qui montre que y et z sont proportionnelles.
   - Si on suppose maintenant que $w(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Un raisonnement semblable à celui qui précède montre qu'un zéro de y ne peut pas être un zéro de z et réciproquement. Ainsi, y et z n'ont aucun zéro en commun.
     Soient $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de y (cela a un sens car les zéros de y sont isolés). On sait que z ne s'annule pas en t_1 et t_2 et on veut montrer qu'elle s'annule dans $]t_1, t_2[$. On raisonne par l'absurde en supposant que z garde un signe (strict) constant dans $[t_1, t_2]$.

Comme y ne s'annule pas dans $]t_1, t_2[$, on sait que $y'(t_1)$ et $y'(t_2)$ sont nécessairement de signe différents (et non nuls). En conséquence de tout ce qui précède, on sait que $y'(t_1)z(t_1)$ et $y'(t_2)z(t_2)$ sont de signe contraire. Mais par ailleurs, on a

$$w(t_1) = y'(t_1)z(t_1) - \underbrace{y(t_1)z'(t_1)}_{=0},$$

$$w(t_2) = y'(t_2)z(t_2) - \underbrace{y(t_2)z'(t_2)}_{=0}.$$

Donc, on a montré que $w(t_1)$ et $w(t_2)$ sont de signe différent. Le théorème des valeurs intermédiaires nous dit alors que w doit s'annuler dans $]t_1, t_2[$, ce qui n'est pas possible car w est une constante non nulle !

Ainsi, entre deux zéros consécutifs de y, il y a un zéro de z. Réciproquement entre deux zéros consécutifs de z il y a un zéro de y. On déduit de tout cela qu'il ne peut y avoir qu'un **unique** zéro de z entre deux zéros consécutifs de y. Supposons en effet qu'il existe t_3 et t_4 tels que

$$t_1 < t_3 < t_4 < t_2, \quad z(t_3) = z(t_4) = 0.$$

D'après la propriété établie juste avant il existerait alors un zéro de y dans $]t_3, t_4[$ et donc dans $]t_1, t_2[$, ce qui contredirait le fait que t_1 et t_2 sont deux zéros **consécutifs** de y.

4. La méthode d'Euler explicite pour le système équivalent s'écrit

$$\frac{Y^{n+1} - Y^n}{\Delta t} = A(t^n)Y^n, \ \ \forall n \geq 0,$$

avec la donnée initiale $Y^0 = (y_0, y_1)$. Si on note $Y^n = \begin{pmatrix} y^n \\ z^n \end{pmatrix}$, on voit que la méthode devient

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = z^n$$
$$\frac{z^{n+1} - z^n}{\Delta t} = -q(t^n)y^n,$$

avec $y^0 = u_0$ et $z^0 = y_1$. En remplaçant la valeur de z^n donnée par la première équation dans la seconde équation, on obtient le schéma annoncé. De plus, les conditions initiales sont données par $y^0 = y_0$ et $y^1 = y_0 + \Delta t y_1$, ce qui est assez naturel.

Comme on l'a vu en cours, la méthode d'Euler explicite est d'ordre 1, il en est donc de même pour ce schéma qui lui est équivalent.

5. L'erreur de consistance R^n associée à ce schéma et à une solution y suffisament régulière du problème est définie par

$$R^n = \frac{y(t^{n+1}) - 2y(t^n) + y(t^{n-1})}{\Delta t^2} + q(t^n)y(t^n).$$

En effectuant des développements de Taylor dans le premier terme et en utilisant le fait que y est solution de l'équation considérée, on montre aisément que

$$|R^n| \leq C\|y^{(4)}\|_\infty \Delta t^2,$$

et donc que le schéma est d'ordre 2, ce qui explique son intérêt par rapport au précédent (pour un coût en termes d'implémentation strictement identique).

Correction de l'exercice 7

1. La solution générale de l'équation homogène est bien connue et donnée par

$$y(t) = A\cos t + B\sin t.$$

Appliquons la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière de l'équation complète. **ATTENTION : pour une équation du second ordre il <u>faut</u> chercher la solution particulière sous la forme suivante :**

$$\begin{cases} y(t) = A(t)\cos t + B(t)\sin t, \\ y'(t) = -A(t)\sin t + B(t)\cos t. \end{cases}$$

Si on dérive une fois la première équation et qu'on utilise la seconde, on obtient

$$A'(t)\cos t + B'(t)\sin t = 0.$$

Si on dérive la seconde équation, on trouve

$$y''(t) = -A(t)\cos t - B(t)\sin t - A'(t)\sin t + B'(t)\cos t = -y(t) - A'(t)\sin t + B'(t)\cos t.$$

Ainsi, y est solution de notre problème si on a

$$-A'(t)\sin t + B'(t)\cos t = f(t).$$

On a donc obtenu deux équations linéaires liant A' et B' qui s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}.$$

La matrice en jeu dans ce problème étant orthogonale, on peut l'inverser aisément et on obtient

$$\begin{pmatrix} A'(t) \\ B'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix},$$

ou encore

$$A'(t) = -f(t)\sin t,$$
$$B'(t) = f(t)\cos t.$$

On trouve donc

$$A(t) = A_0 - \int_0^t f(s)\sin s\,ds, \quad B(s) = B_0 + \int_0^t f(s)\cos s\,ds.$$

La solution générale de notre équation est donc

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0\cos t + B_0\sin t + \int_0^t f(s)(\cos s\sin t - \sin s\cos t)\,ds \\ &= A_0\cos t + B_0\sin t + \int_0^t f(s)\sin(t-s)\,ds. \end{aligned}$$

2. (a) Si y est une solution de l'équation proposée, on pose $f(t) = -p(t)y(t)$, de sorte que y satisfait

$$y'' + y = f(t).$$

D'après la question précédente, on obtient

$$y(t) = A_0\cos t + B_0\sin t - \int_0^t y(s)p(s)\sin(t-s)\,ds.$$

Attention : cette formule ne donne pas une expression explicite de y car y apparaît en second membre dans l'intégrale. Néanmoins, cela va nous permettre d'obtenir des informations précieuses sur y.

Pour $t \geq 0$ (le cas $t \leq 0$ se traitant de manière analogue), majorons en valeur absolue le membre de droite de cette formule. Il vient

$$|y(t)| \leq |A_0| + |B_0| + \int_0^t |y(s)||p(s)|\, ds, \quad \forall t \geq 0.$$

Le lemme de Gronwall nous donne alors la majoration suivante

$$|y(t)| \leq (|A_0| + |B_0|)e^{\int_0^t |p(s)|\, ds}, \quad \forall t \geq 0.$$

Comme l'intégrale de $|p|$ est convergente par hypothèse, on a bien montré que y est une fonction bornée (sur $\mathbb{R}^+$, puis sur $\mathbb{R}^-$ en raisonnant avec les $t \leq 0$).

(b) Comme on sait que y est bornée, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} y(s)p(s)\cos s\, ds, \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} y(s)p(s)\sin s\, ds,$$

sont absolument convergentes et donc convergentes. Il vient alors

$$y(t) = A_0' \cos t + B_0' \sin t + \int_t^{+\infty} y(s)p(s)\sin(t-s)\, ds.$$

Le dernier terme de cette formule tend vers 0 quand t tend vers l'infini. En conséquence, si on suppose que $y(t)$ tend vers 0 en $+\infty$, cela implique nécessairement que $A_0' = B_0' = 0$. Il reste donc

$$y(t) = \int_t^{+\infty} y(s)p(s)\sin(t-s)\, ds.$$

En majorant, on trouve

$$|y(t)| \leq \int_t^{+\infty} |y(s)||p(s)|\, ds, \quad \forall t \geq 0.$$

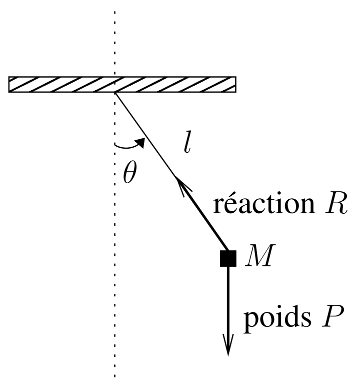
D'après le lemme de Gronwall à l'infini (avec une constante $C = 0$), on obtient

$$\forall t \geq 0, \quad |y(t)| = 0,$$

d'où le résultat.

Correction de l'exercice 8 (Equation du pendule)

1. Voici le schéma de la situation



Les forces exercées sur la masse M sont de deux sortes : le poids P et la force de réaction R (celle exercée par le fil sur la masse !). Que savons-nous sur ces forces ?

– Le poids P est dirigé vers le bas et son module est Mg. Autrement dit, dans le repère usuel, on a

$$P = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix}.$$

– La force de réaction est orientée le long du fil, mais on ignore *a priori* son intensité. Cette force s'écrit donc
$$R = R_0 \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le principe fondamental de la dynamique (loi de Newton) nous dit que la somme des forces exercées sur la masse est égale au produit de la masse avec l'accélération. Calculons cette accélération. A l'instant t, si l'angle entre le pendule et la verticale vaut $\theta(t)$, la position $X(t)$ de la masse M est donnée par

$$X(t) = \begin{pmatrix} l\sin\theta(t) \\ -l\cos\theta(t) \end{pmatrix},$$

et donc sa vitesse $X'(t)$ et son accélération $X''(t)$ valent respectivement

$$X'(t) = l\theta'(t)\begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}, \quad X''(t) = l\theta''(t)\begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} + l(\theta'(t))^2\begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}.$$

La de Newton s'écrit $MX''(t) = P + R$ c'est-à-dire

$$Ml\theta''(t)\begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix} + Ml(\theta'(t))^2\begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + R_0\begin{pmatrix} -\sin\theta(t) \\ \cos\theta(t) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dans cette équation on ne connaît pas R_0 (qui peut dépendre du temps !), la seule chose que l'on peut faire pour tirer partie de l'équation, c'est d'essayer de se débarasser de ce terme. Pour cela, on prend le produit scalaire de l'équation (1) par le vecteur $\begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}$. Il reste ainsi, en utilisant $\cos^2 + \sin^2 = 1$, la formule
$$Ml\theta''(t) = -Mg\sin\theta(t).$$

En simplifiant par M (qui n'intervient donc plus dans l'équation !) on trouve bien l'équation annoncée

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0.$$

2. Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire **non-linéaire** du second ordre. Une donnée de Cauchy pour cette équation porte sur le couple (θ, θ'). Comme par ailleurs, la fonction $(\theta, \theta') \mapsto -g/l\sin\theta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, pour toute donnée de Cauchy (θ_0, θ_1), il existe une unique solution maximale θ vérifiant

$$\begin{cases} \theta''(t) + \frac{g}{l}\sin\theta(t) = 0 \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = \theta_1 \end{cases}$$

Il reste à montrer que cette solution est globale. On note I l'intervalle de définition de cette solution et on constate que la solution θ vérifie
$$\forall t \in I, \ \ |\theta''(t)| \leq \frac{g}{l},$$

puisque le sinus est borné par 1. En conséquence, on a

$$\forall t \in I, t \geq 0, \ \ |\theta'(t)| \leq |\theta_1| + \frac{g}{2}t.$$

$$\forall t \in I, t \geq 0, \ \ |\theta(t)| \leq |\theta_0| + |\theta_1|t + \frac{g}{2l}t^2.$$

Cette inégalité montre que la solution (θ, θ') ne peut pas exploser en temps fini et donc que $[0, +\infty[\subset I$. On montre un résultat similaire pour les $t \leq 0$ et donc que $I = \mathbb{R}$.

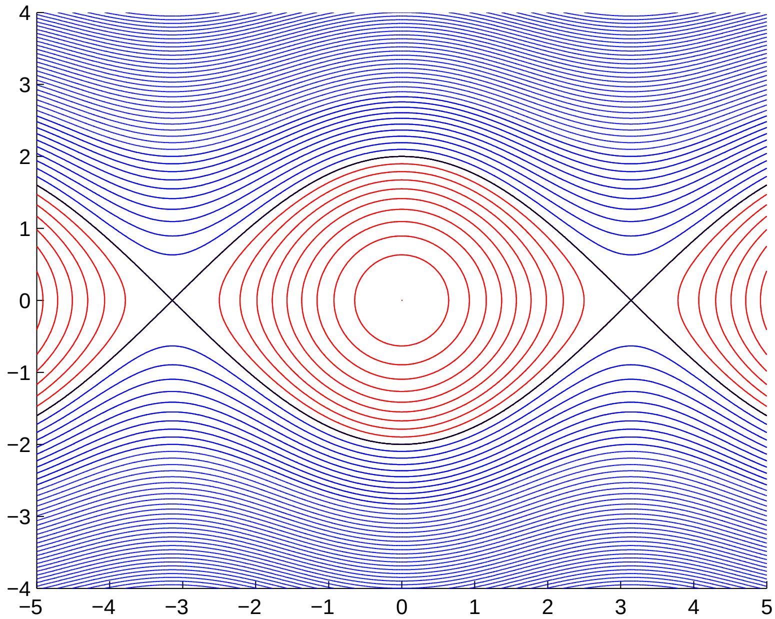
3. Il suffit de dériver par rapport à t la fonction $t \mapsto E(\theta(t), \theta'(t))$ pour une solution de l'équation.

$$\frac{d}{dt}E(\theta(t), \theta'(t)) = \theta''(t)\theta'(t) + \frac{g}{l}\theta'(t)\sin\theta(t) = 0,$$

ce qui montre bien que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \ E(\theta(t), \theta'(t)) = E(\theta_0, \theta_1) = \text{constante}.$$

4. Voici le tracé des lignes de niveau de E (θ est en abscisse et θ' en ordonnée) :



On peut apprendre beaucoup de choses sur les solutions du problème à partir de ce graphique :

– Tout d'abord la question précédente nous montre que toute solution, que l'on peut voir comme une courbe $t \mapsto (\theta(t), \theta'(t))$ dans le plan du graphique, vérifie $E(\theta(t), \theta'(t)) = \text{constante} = E_0$. Autrement dit, nous savons que les trajectoires du systèmes sont entièrement contenues dans l'une des courbes de niveau de E. Celle-ci est complètement déterminée par la valeur de la donnée initiale.
– Premier cas : la courbe de niveau de E est une courbe non fermée (les courbes bleues sur le dessin). Ceci correspond au cas $E_0 > 2g/l$ (pourquoi ?).
  Comme ces courbes ne touchent pas l'axe des abscisses, on sait que dans ce cas la solution va vérifier $\theta'(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Donc θ est strictement croissante, ou strictement décroissante (ceci est déterminé par le signe de $\theta'(0)$).
  En réalité, on a même $\inf_{\mathbb{R}} |\theta'(t)| > 0$, et donc θ tend vers $\pm\infty$ en $\pm\infty$.
– Deuxième cas : la courbe de niveau de E est une courbe fermée (les courbes rouges ressemblant à des ovales sur le dessin). Ceci correspond au cas $E_0 < 2g/l$. Grâce à la 2π-périodicité par rapport à θ de l'énergie, on peut toujours supposer que la courbe rouge en question est "centrée" en $(0, 0)$.
  Dans ce cas, θ' peut éventuellement s'annuler et changer de signe car la courbe de niveau traverse l'axe des abscisses. En regardant le signe de θ' selon le quart de plan dans lequel on se trouve, on conclut immédiatement que la solution parcours la courbe dans le sens des aiguilles d'une montre.
  On va maintenant démontrer que la solution parcours entièrement la courbe. Pour cela on adopte les notations suivantes pour les quatre quarts de plan fermés

$$Q_{++} = \{(\theta, \theta'),\ \theta \geq 0, \theta' \geq 0\},$$

$$Q_{+-} = \{(\theta, \theta'),\ \theta \geq 0, \theta' \leq 0\},$$
$$Q_{--} = \{(\theta, \theta'),\ \theta \leq 0, \theta' \leq 0\},$$
$$Q_{-+} = \{(\theta, \theta'),\ \theta \leq 0, \theta' \geq 0\}.$$

  Pour fixer les idées on va supposer que la donnée initiale est telle que $(\theta(0), \theta'(0)) \in Q_{++}$ et on va montrer que la solution va nécessairement sortir de Q_{++}. On raisonne par l'absurde en supposant que $\forall t \geq 0, (\theta(t), \theta'(t)) \in Q_{++}$.

Dans ces conditions, on aurait que θ est une fonction croissante (car $\theta' \geq 0$) et bornée (car on est sur la courbe de niveau de E !) sur $[0, +\infty[$, et donc θ admettrait une limite θ_* en $+\infty$ et donc θ' aussi admettrait une limite θ'_*. On sait alors que (θ_*, θ'_*) doit nécessairement être un point d'équilibre du système, c'est-à-dire vérifier

$$\theta'_* = 0, \ \sin(\theta_*) = 0.$$

Les seuls points possibles sont ceux de coordonnées $(k\pi, 0)$ et on vérifie immédiatement que de tels points n'appartiennent pas aux courbes (rouges) de niveau d'énergie strictement inférieur à $2g/l$. Ceci est donc absurde et on en déduit que la solution quitte nécessairement le quart de plan Q_{++} à un moment ou à un autre ! Il existe donc $t_1 > 0$ tel que $(\theta(t_1), \theta'(t_1)) \in Q_{+-}$ avec de plus $\theta'(t_1) < 0$.
On peut alors reprendre le raisonnement précédent et montrer que la solution quitte ce quart de plan au bout d'un certain temps, et ainsi de suite on peut démontrer que la solution traverse tous les quarts de plan (tout en restant sur la courbe rouge !).
On déduit en particulier de tout ce qui précède, que la solution va nécessairement passer deux fois (à deux instants distincts notés $t_1 < t_2$) par un même point, par exemple l'unique point de la courbe de niveau de la forme $(\bar{\theta}, 0)$, avec $\bar{\theta} > 0$. Rappelons la propriété vue en cours : pour un système différentiel **autonome** vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, toute solution passant deux fois par un même point est nécessairement périodique et le résultat est donc finalement démontré.

– Il reste à étudier le cas critique $E_0 = 2g/l$ il s'agit des courbes de niveau en noir sur le dessin qui semblent se couper et relier les points de $\pi\mathbb{Z} \times \{0\}$.
Remarquons tout d'abord que les points de $\pi\mathbb{Z} \times \{0\}$ sont des points critiques (ou d'équilibre) du système donc les seules solutions passant par ces points sont les solutions constantes ! Une solution contenue dans une courbe de niveau noire ne peut donc jamais passer par les points de croisement. En conséquence θ' va y garder un signe constant et l'angle $t \mapsto \theta(t)$ sera une fonction monotone (et toujours bornée !) du temps. Il va donc bien exister deux limites $\theta^\pm$ en $\pm\infty$ associées à deux limites de la dérivée θ'. In fine, les points limites sont nécessairement des points critiques du système et donc de la forme $(k\pi, 0)$ et $((k+1)\pi, 0)$.

Correction de l'exercice 9 (Modèle de Lotka-Volterra)

1. Les sardines se nourissent de plancton ou de petits éléments nutritifs présents dans la mer en quantité infinie (en première approximation ...) donc, en l'absence de prédateurs, elle peuvent vivre et se reproduire potentiellement à l'infini. Au contraire, les requins se nourrissant de sardines (en tout cas dans ce modèle ...), ils sont dépendant de la population de sardines. S'il n'y a plus de sardines, ils vont finir par mourir et ne plus se reproduire.
– Si $x \equiv 0$, y vérifie l'équation $y' = -cy$, ce qui traduit la décroissance (exponentielle !) de y.
– Si $y \equiv 0$, x vérifie l'équation $x' = ax$, ce qui traduit le croissance exponentielle de x.
Ainsi, d'après les remarques initiales x semble représenter la population de sardines alors que y représente la population de requins.
Le coefficient a est un taux de reproduction des sardines en l'absence de prédateurs, et c est un taux de mortalité des requins en l'absence de proies. Notons que a et c ont pour dimension (au sens "physicien" du term) l'inverse d'un temps. Essayons de les interpréter de façon plus précise.
En l'absence de prédateurs, la population de sardines à un temps $t + \Delta t$ s'exprime sous la forme

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + a\Delta t x(t),$$

ainsi la quantité $a\Delta t x(t)$ représente le nombre de naissance de sardines dans la période considérée et donc le rapport

$$\frac{a\Delta t x(t)}{x(t)\Delta t} = a$$

représente le nombre moyen de naissances par individu et par unité de temps. Dit autrement, $1/a$ représente le temps moyen qui sépare deux naissances pour un individu donné.
On peut faire un raisonnement similaire avec le coefficient c.

Etudions les autres termes de la même façon. En présence de requins, l'évolution du nombre de sardines x entre t et $t + \Delta t$ est à peu près décrite par

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t a x(t) - \Delta t b x(t) y(t).$$

On a déjà décrit le terme de naissances, étudions donc le dernier terme. Celui-ci étant négatif, il semble s'agir d'un terme de mortalité des sardines qui est d'autant plus grand que x et y sont grands. Ce terme rend donc compte du fait que si un requin rencontre une sardine, la sardine va être mangée ... La forme particulière de ce terme vient du fait que la probabilité de rencontre entre une sardine et un requin est supposé proportionnel au produit du nombres d'individus de chaque espèce.

Une autre façon d'écrire les équations est la suivante

$$x(t + \Delta t) \approx x(t) + \Delta t(a - by(t))x(t).$$

On peut dès lors interpréter le terme $by(t)$ comme un correcteur du taux de naissances dû à la présence de requins et prenant en compte la mortalité que cela engendre.

De la même façon, le terme dxy dans l'équation de y rend compte du fait que le phénomène de mortalité naturelle des requins est ralenti (voire même renversé et transformé en croissance) par la présence de nourriture, et ce de façon proportionnelle à la quantité de sardines en présence.

2. La fonction $F : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}$, est polynômiale donc de classe $\mathcal{C}^1$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc sans soucis et nous permet d'affirmer que, pour toute donnée de Cauchy, le système admet une unique solution maximale.

3. Intuitivement, on comprend bien que s'il n'y a pas de sardines à l'instant initial, il n'y en aura jamais et que les requins vont donc manquer de nourriture et finir par mourir. D'un point de vue mathématique, on peut démontrer cela de façon très rigoureuse de la façon suivante :
   – On considère l'équation différentielle suivante

   $$\tilde{y}' = -c\tilde{y},$$

   et la donnée de Cauchy $\tilde{y}(0) = y_0$. Celle-ci admet une unique solution que l'on peut bien sûr calculer car l'EDO est linéaire. On obtient

   $$\tilde{y}(t) = y_0 e^{-ct}.$$

   On constate maintenant que le couple $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{y}(t) \end{pmatrix}$ satisfait le système complet de Lotka-Voltera et la donnée initiale voulue $\begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Comme il y a une unique solution de ce problème, on a bien démontré que x restait tout le temps nulle et que y évoluait de manière exponentielle.

   De la même façon, si $x_0 \neq 0$ et $y_0 = 0$, la solution est donnée par $x(t) = x_0 e^{at}$, $y(t) = 0$.

4. On suppose maintenant $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$ et on veut montrer que x et y restent strictement positives. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que x prend une valeur négative ou nulle à un certain instant t_0 (le raissonement serait identique pour y). Comme $x_0 > 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc un temps $0 < t_1 \leq t_0$ tel que $x(t_1) = 0$. Ainsi, (x, y) est solution du problème de Cauchy au temps t_1 pour la donnée $(0, y(t_1))$. Mais on a vu dans la question précédente qu'un tel problème de Cauchy avait pour unique solution quelque chose de la forme $t \mapsto (0, Ke^{-ct})$, ceci impliquerait en particulier que x serait nulle au temps initial 0, ce qui n'est pas le cas puisqu'on a justement supposé $x_0 > 0$. En conséquence, la fonction x ne peut pas s'annuler et reste donc strictement positive !

   Du point de vue de la modélisation ceci est très rassurant car cela démontre que les solutions du système sont compatibles avec l'interprétation biologique des quantités x et y qui sont des effectifs ou des densités de population, qui se doivent bien sûr d'être positives.

5. – La donnée initiale étant positive, on a vu que x et y sont toujours positives au cours du temps. Ainsi le second terme dans l'équation pour x est négatif et on obtient donc l'inégalité différentielle suivante

   $$x'(t) \leq ax(t), \quad \forall t \in [0, T[.$$

Celle-ci fournit immédiatement l'estimation

$$x(t) \leq x_0 e^{at}, \ \ \forall t \in [0, T[,$$

en remarquant que la fonction $e^{at}x(t)$ est décroissante (Cf. la démonstration du lemme de Gronwall).

– On ne peut pas appliquer un raisonnement exactement similaire à y car le second terme de l'équation qui régit y est positif, on ne peut donc l'ignorer. En revanche le premier terme de cette équation est positif et on a donc

$$y'(t) \leq dx(t)y(t), \ \ \forall t \in [0, T[.$$

Or on vient de voir que, sur $[0, T[$, on a la borne $x(t) \leq x_0 e^{aT}$ donc

$$y'(t) \leq dx_0 e^{aT} y(t), \ \ \forall t \in [0, T[.$$

ce qui donne à nouveau l'estimation

$$y(t) \leq y_0 e^{dx_0 e^{aT} t}, \ \ \forall t \in [0, T[.$$

– En conclusion des deux inégalités obtenues, on a montré que x **et** y sont toutes les deux bornées sur l'intervalle $[0, T[$. Le théorème d'explosion en temps fini nous dit alors que le temps d'existence de la solution maximale ne peut pas être fini. Ainsi cette solution maximale est bien définie sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$.

Notons au passage que les bornes obtenues pour x et y sont très loin d'être optimales puisqu'on verra par la suite que les deux fonctions x et y sont en fait bornées (et même périodiques).

6. Un petit calcul immédiat montre que le seul point d'équilibre dans Q est le point $E = \begin{pmatrix} a/b \\ c/d \end{pmatrix}$. Pour essayer d'appliquer le résultat du cours, il nous faut calculer le linéarisé en ce point du système, c'est-à-dire la matrice

$$A = J_E F = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de A est strictement positif et sa trace est nulle donc les valeurs propres de A sont complexes conjuguées de partie réelle nulle. On est donc précisément dans un cas où le théorème de stabilité vu en cours ne s'applique pas. On verra plus loin (par d'autres méthodes !) que ce point d'équilibre est stable mais pas asymptotiquement stable.

7. Il s'agit juste de calculer la dérivée de $H(x(t), y(t))$

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = -c\frac{x'}{x} + dx' - a\frac{y'}{y} + by' = -c(a-by) + d(ax-bxy) - a(-c+dx) + b(-cy+dxy) = 0.$$

Une étude de fonctions élémentaire montre que $x \mapsto -c\log(x) + dx$ et $y \mapsto -a\log(y) + by$ sont deux fonctions continues qui tendent vers $+\infty$ en 0 et en $+\infty$. En particulier, elles sont minorées sur $]0, +\infty[$. On notera $\alpha \in \mathbb{R}$ un minorant commun à ces deux fonctions (on pourrait calculer α mais ça n'est pas utile).

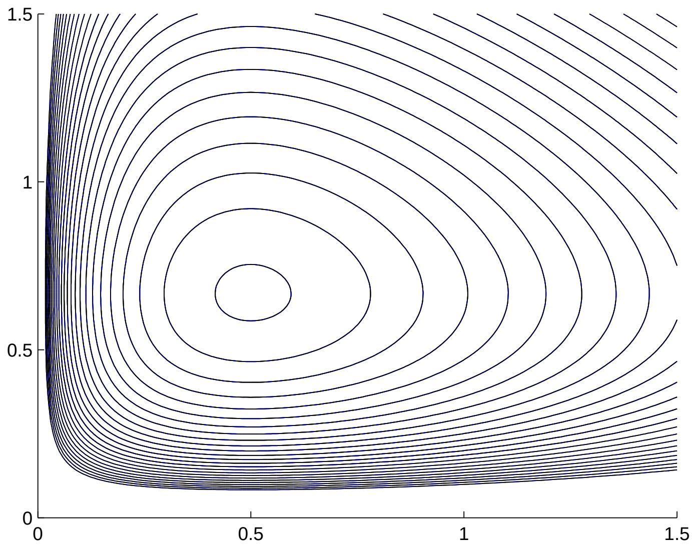
D'après la conservation de H le long des solutions, on a par exemple

$$-c\log(x(t)) + dx(t) \leq H_0 - \alpha,$$

pour tout t dans l'intervalle de définition de la solution. On déduit de cela que x est une fonction bornée sur tout son intervalle de définition. On peut aussi en déduire, même si cela n'était pas demandé, que $t \mapsto x(t)$ ne peut s'approcher de 0.

De la même façon, on montre que y est bornée. On déduit de cela et du théorème d'explosion en temps fini que les solutions maximales sont définies sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$.

8. Traçons les courbes de niveau de la fonction H dans la figure suivante



On observe que ce sont des courbes régulières simples fermées dans le quart de plan Q (ceci peut se démontrer aisément en utilisant notamment le fait que H est la somme d'une fonction de x et d'une fonction de y : **le faire !**).

On vérifie aussi que ces courbes sont parcourues dans le sens trigonométrique. On peut alors reprendre la méthode de démonstration de l'exercice précédent pour montrer que la solution parcours effectivement toute la courbe et finit par repasser à un moment donné sur le point initial. Dans ces conditions, on sait (Cf. le cours) que la solution est effectivement périodique.

On peut récrire les équations sous la forme

$$(\log(x))' = a - by, \ \ (\log(y))' = -c + dx.$$

On intègre ces équations entre 0 et T et on obtient

$$\log(x(T)) - \log(x(0)) = aT - b\int_0^T y(t)\,dt, \ \ \log(y(T)) - \log(y(0)) = -cT + d\int_0^T x(t)\,dt.$$

Comme x et y sont T-périodiques, les membres de gauche de ces égalités sont nuls et on obtient le résultat annoncé.

On en déduit donc que les valeurs moyennes du nombre de sardines et du nombre de requins sont données par c/d et a/b respectivement. Il est remarquable que ces nombres sont indépendants de la données initiale (y compris si x_0 et y_0 sont très petits !). Bien entendu, la valeur de la période T dépend, elle, fortement des données initiales.

9. Il faut rajouter à l'équation sur x un terme de compétition interne, qui modélise le fait que le taux de croissance des sardines doit être diminué si x est trop grand. On obtient

$$x' = ax(1 - \gamma x) - bxy,$$

le coefficient γ étant positif (et en général assez petit). L'équation sur y est inchangée.

On constate tout d'abord que si y est nul (pas de requins, les sardines sont seules), alors l'équation devient $x' = ax(1 - \gamma x)$ et on vérifie alors que toute solution positive de cette équation est bornée et a une limite en $+\infty$ (qui vaut $1/\gamma$), ce qui est très différent du comportement exponentiel observé dans le premier modèle.

Etudions les points d'équilibre du système et leur stabilité. On a bien sûr le point $(0,0)$, puis le point $(1/\gamma, 0)$ et enfin le point $(c/d, a/b(1-\gamma c/d))$. Ce dernier point n'a ses coordonnées positives que sous l'hypothèse $\gamma c/d < 1$ (ceci correspond bien au fait que γ est petit [a]).

– Le point $(0,0)$ n'est pas stable car 0 n'est pas un point stable pour l'équation scalaire $x' = ax(1-\gamma x)$. Donc, pour toute donnée initiale de la forme $(\varepsilon, 0)$, la solution correspondante $(x(t), 0)$ s'éloigne de $(0,0)$.
– Le point $(1/\gamma, 0)$: la matrice du système linéarisé est donnée par

$$\begin{pmatrix} -a & -\frac{b}{\gamma} \\ 0 & \frac{d}{\gamma} - c \end{pmatrix},$$

dont on voit immédiatement qu'une valeur propre est strictement positive et l'autre strictement négative. Ce point n'est donc pas stable (ce résultat est difficile à démontrer avec les outils vus en cours !)
– Le point $(c/d, a/b(1-\gamma c/d))$: la matrice du linéarisé est donnée ici par

$$\begin{pmatrix} -a\frac{\gamma c}{d} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b}\left(1 - \frac{\gamma c}{d}\right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Sous la condition donnée plus haut $\gamma c/d < 1$, on voit que le déterminant de cette matrice est strictement positif et que sa trace est strictement négative. En conséquence, ses valeurs propres sont ou bien toutes les deux réelles strictement négatives, ou bien complexes conjuguées à partie réelle négative. Dans les deux cas, le théorème vu en cours s'applique et affirme que le point d'équilibre étudié est asymptotiquement stable.

On voit donc que le comportement du système est très différent du modèle initiale car on observe que certaines solutions non triviales convergent vers un point d'équilibre du système. En particulier les solutions en questions ne sont certainement pas périodiques !

10. Cette question sera traitée en TP si le temps le permet.
11. Idem.

[a] il est tout à fait possible d'étudier le système dans le cas $\gamma c/d \geq 1$ mais on ne le fera pas ici