Master Mathématiques et Applications $1^{ère}$ année

Aix-Marseille Université
Année 2010-2011

Analyse Numérique
Equations différentielles ordinaires

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes (i.e. trouver toutes les solutions maximales) :

$$y' = y + \sin(t) \tag{1}$$

$$\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x. \end{cases} \tag{2}$$

Exercice 2

1. Trouver toutes les solutions maximales de l'équation
$$t^3 y' + y = 1.$$
2. Même question avec l'équation
$$-t^3 y' + y = 1.$$

Exercice 3 (Les méthodes d'Euler dans le cas linéaire)

On s'intéresse dans cet exercice à la méthode d'Euler pour la résolution d'un problème de Cauchy linéaire dans $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0. \tag{3}$$

Dans tout l'exercice on fixe un temps final de calcul $T > 0$. Si $M \geq 1$, on pose $\Delta t = \frac{T}{M}$ et $t^n = n\Delta t$ pour $0 \leq n \leq M$.

1. **Le cas scalaire :** On suppose ici $d = 1$. Calculer explicitement les itérées $(y^n)_n$ données par la méthode d'Euler explicite et vérifier (à la main) sur cet exemple la convergence de la méthode. Même question avec la méthode d'Euler implicite.
   On suppose que $y_0 \geq 0$. Discuter, selon la valeur des paramètres $A \in \mathbb{R}$ et Δt, le signe des $(y^n)_n$ pour les deux méthodes étudiées. Quelles conclusions en tirez vous ?
2. **Le cas défini négatif :** On revient au cas général $d \geq 1$ et on suppose que A est symétrique définie négative.
   (a) Montrer (avec un minimum de calculs !) que la solution exacte de (3) est bornée sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que la méthode d'Euler implicite pour ce problème est parfaitement définie pour toute valeur du pas de temps.
   (c) Montrer que la solution approchée $(y^n)_n$ obtenue par cette méthode est également bornée.
3. **Le cas antisymétrique :** On suppose que A est antisymétrique réelle.
   (a) Montrer que la norme euclidienne de la solution exacte de (3) est constante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Etudier le comportement des suites $(\|y^n\|)_n$, où $(y^n)_n$ sont les approximations obtenues par les méthodes d'Euler explicite et implicite. Quels sont vos commentaires ?
   (c) Montrer que le schéma suivant est bien posé (avec $y^0 = y_0$)
   $$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = A \frac{y^{n+1} + y^n}{2}, \ \ \forall n \geq 0. \tag{4}$$
   Quel est le comportement, dans ce cas, de la suite $(\|y^n\|)_n$. Commentaires ?
   (d) Définir et estimer l'erreur de consistance pour le schéma (4). En déduire la convergence à l'ordre 2 de ce schéma vers la solution exacte.

Exercice 4

On s'intéresse dans cet exercice à l'équation différentielle ordinaire suivante

$$y' = \alpha y(1-y), \tag{5}$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre fixé.

1. Dans cette première question on n'essaiera pas de calculer explicitement la solution générale de cette équation.
   (a) Montrer que pour toute donnée de Cauchy $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$, l'équation (5) admet une unique solution maximale. On notera I l'intervalle de définition de cette solution.
   (b) Vérifier que $y_0 = 0$ et $y_0 = 1$ sont des points d'équilibre de cette équation. Discuter leur stabilité.
   (c) On suppose que $y_0 \in]0,1[$.
      i. Montrer que $y(t) \in]0,1[$ pour tout $t \in I$.
      ii. En déduire que $I = \mathbb{R}$.
      iii. Montrer que y est une fonction croissante de t.
      iv. En déduire que $\lim_{t\to+\infty} y = 1$ et $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$.
      v. Montrer que y' et y'' sont des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$.
   (d) On suppose que $y_0 > 1$.
      i. Montrer que $y(t) > 1$ pour tout $t \in I$.
      ii. Montrer que y est une fonction décroissante de t.
      iii. En déduire que $[0,+\infty[\subset I$ et que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1$.
   (e) On suppose que $y_0 < 0$.
      i. Montrer que $y(t) < 0$ pour tout $t \in I$.
      ii. Montrer que y est une fonction décroissante de t.
      iii. En déduire que $]-\infty, 0] \subset I$ et que $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$.
   (f) Tracer sur un même dessin l'allure de l'ensemble des solutions ainsi étudiées.
2. En justifiant soigneusement tous les calculs, calculer explicitement toutes les solutions de (5). Vérifier que les propriétés qualitatives établies à la première question sont bien vérifiées.
3. On suppose dorénavant que la donnée initiale y_0 est dans $]0,1[$. On s'intéresse à l'analyse de méthodes numériques pour approcher la solution de (5).
   (a) On commence par étudier la méthode d'Euler explicite donnée par

   $$\frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} = \alpha y^n(1-y^n), \quad \forall n \geq 0, \tag{6}$$

   avec la donnée initiale $y^0 = y_0$. On suppose dans toute la suite que $\alpha\Delta t < 1$.
      i. En faisant une petite étude de la fonction $g : y \mapsto y + \Delta t \alpha y(1-y)$, montrer que l'on a

      $$\forall n \geq 0, \quad y^n \in]0,1[\,.$$

      ii. Montrer que la fonction $F : y \mapsto y(1-y)$ est globalement Lipschitzienne sur $[0,1]$. Quelle est sa constante de Lipschitz ?
      iii. Montrer la convergence à l'ordre 1 de la méthode d'Euler explicite pour le problème considéré en adaptant (légèrement !) la démonstration vue en cours.
   (b) Démontrer que si $\alpha\Delta t > 1$, il existe une valeur de la donnée initiale $y_0 \in]0,1[$ telle que la première itération y^1 de la méthode d'Euler vérifie $y^1 > 1$. Pourquoi ceci n'est pas satisfaisant ?

(c) On propose une nouvelle méthode numérique qui va corriger le défaut de la méthode d'Euler mis en lumière dans la question précédente. Celle-ci est définie par

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} = \alpha y^n(1-y^{n+1}), \;\; \forall n \geq 0. \tag{7}$$

i. Montrer que si $y^n \in]0,1[$, alors la formule (7) définit une unique valeur de y^{n+1} donc on donnera l'expression en fonction de y^n. Que pensez-vous de cette nouvelle méthode du point de vue de l'implémentation sur ordinateur ?

ii. Montrer, sans hypothèse sur α et Δt, que si $y^n \in]0,1[$, alors on a $y^{n+1} \in]0,1[$. Comparez au schéma d'Euler explicite étudié ci-dessus.

iii. En déduire que pour $y_0 \in]0,1[$, la méthode numérique proposée définit une unique suite de valeurs approchées $(y^n)_n$ qui sont toutes dans l'intervalle $]0,1[$.

iv. Définir l'erreur de consistance R^n associée au schéma (7) et à une solution exacte y du problème considéré.

v. Démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall n \geq 0, \;\; |R^n| \leq C\Delta t.$$

vi. On définit l'erreur d'approximation du schéma par $e^n = y(t^n) - y^n$, $\forall n \geq 0$. Démontrer que l'on a

$$\frac{e^{n+1}-e^n}{\Delta t} = \alpha e^n(1-y(t^{n+1})) - \alpha y^n e^{n+1} + R^n, \;\; \forall n \geq 0,$$

vii. En déduire que pour tout $n \geq 0$, on a

$$|e^{n+1}| \leq (1+\alpha\Delta t)|e^n| + \Delta t|R^n|.$$

viii. En conclure à l'aide du lemme de Gronwall discret que, si on fixe le temps final $T > 0$, on a l'estimation d'erreur d'ordre 1

$$\sup_{n\leq \frac{T}{\Delta t}} |e^n| \leq C_T\Delta t,$$

où C_T est une constante dépendant de T.

Exercice 5

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle suivante :

$$-y'' - \lambda y = 0. \tag{8}$$

1. Résoudre l'équation (8). On pourra discuter selon le signe de λ.

2. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante de nombres réels strictement positifs $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ et une suite de fonctions $(y_k)_{k\geq 1}$ (que l'on calculera explicitement) telles que

   Il existe une solution non triviale y de (8) vérifiant $y(0) = y(1) = 0$

   $\Longleftrightarrow$

   Il existe $k \geq 1$ tel que $\lambda = \lambda_k$ et y est proportionnelle à y_k.

3. Démontrer que toute fonction y de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et nulle en $x=0$ et $x=1$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$y(x) = \sum_{k\geq 1} b_k y_k(x), \;\; \forall x \in [0,1],$$

   où $b_k \in \mathbb{R}, \forall k \geq 1$. On précisera la nature de la convergence de la série.

Exercice 6

On considère dans cet exercice l'équation différentielle suivante

$$y'' + q(t)y = 0, \tag{9}$$

où $t \in \mathbb{R} \mapsto q(t) \in \mathbb{R}$ est une fonction continue.

1. Mettre cette équation sous la forme d'un système du premier ordre $Y' = A(t)Y$. En déduire la forme que prend le problème de Cauchy pour (9) et montrer que ce problème de Cauchy admet une unique solution globale pour toute donnée.
2. Soit y une solution **non identiquement nulle** de (9). Montrer que les zéros de y sont isolés.
3. Soit z une **autre** solution **non identiquement nulle** de (9). Montrer que l'une des deux situations suivantes se produit :
   – Les fonctions y et z sont proportionnelles.
   – Les fonctions y et z n'ont aucun zéro en commun et entre deux zéros consécutifs de y il existe un et un seul zéro de z et réciproquement.

   Indication : On pourra s'intéresser à la quantité $w(t) = y'(t)z(t) - y(t)z'(t)$. (Pourquoi ? ? ?)
4. Montrer que la méthode d'Euler explicite pour le système du premier ordre $Y' = A(t)Y$ est équivalent au schéma suivant
   $$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\Delta t^2} + q(t^{n-1})y^{n-1} = 0, \;\; \forall n \geq 1,$$
   dont on précisera les données initiales. Quel est l'ordre de ce schéma ?
5. On considère le nouveau schéma
   $$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{\Delta t^2} + q(t^n)y^n = 0, \;\; \forall n \geq 1.$$
   En étudiant l'erreur de consistance associée à ce schéma, expliquer pourquoi ce schéma est souvent préféré au précédent. On peut montrer la convergence de ce schéma mais c'est un peu délicat et ça n'est pas demandé.

Exercice 7

1. En utilisant la formule de Duhamel (la variation de la constante), déterminer la solution générale de l'équation différentielle suivante
   $$y'' + y = f(t),$$
   où f est une fonction continue donnée.
2. Soit p une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |p(t)|\, dt < +\infty$. On considère l'équation
   $$y'' + (1 + p(t))y = 0. \tag{10}$$
   (a) Montrer que toute solution de (10) est bornée sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que la seule solution de (10) qui tend vers 0 en $+\infty$ est la solution identiquement nulle.

   Indication : On pourra utiliser la première question et les lemmes de Gronwall.

Exercice 8 (Equation du pendule)

On considère un pendule suspendu à un point fixe et soumis à la gravité. Celui-ci est composé d'une tige rigide dont on négligera le poids au bout de laquelle est accrochée une masse ponctuelle M. On note g l'accélération de la pesanteur et l la longueur du pendule.
On repère la position du pendule à tout instant grâce à l'angle θ entre la tige et la verticale.

1. Faire un dessin de la situation considérée. Quelles sont les forces subies par la masse M durant son mouvement ? En utilisant le principe fondamental de la dynamique (ou loi de Newton), montrer que l'angle θ vérifie l'équation différentielle suivante
$$\theta'' + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0. \tag{11}$$
2. Démontrer que pour toute donnée de Cauchy (préciser !) l'équation (11) admet une unique solution globale (i.e. définie pour tout temps t).
3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos(x))$.
Démontrer que pour toute solution $t \mapsto \theta(t)$ de (11), il existe $E_0 \in \mathbb{R}$ telle que
$$E(\theta(t), \theta'(t)) = E_0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$
4. Tracer dans le plan les lignes de niveau de la fonction E. On pourra s'aider du logiciel Scilab.
En déduire qu'il existe exactement trois types de solutions pour le problème (11) :
   - Les solutions périodiques (ou constantes)
   - Les solutions non bornées et telle que $t \mapsto \theta(t)$ est strictement monotone.
   - Les solutions telles qu'il existe deux valeurs $\theta_{+\infty} \in \mathbb{R}$ et $\theta_{-\infty} \in \mathbb{R}$ telles que
$$\lim_{t\to+\infty} \theta(t) = \theta_{+\infty}, \ \ \lim_{t\to-\infty} \theta(t) = \theta_{-\infty}.$$

Exercice 9 (Modèle de Lotka-Volterra)

On s'intéresse à l'étude du système différentiel suivant
$$\begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases} \tag{12}$$
où les constantes a, b, c et d sont strictement positives.

1. Ce système a été introduit pour modéliser l'évolution des effectifs de population de proies (disons des sardines) et de prédateurs (disons des requins). Dans ces conditions, que représentent à votre avis les quantités $x(t)$ et $y(t)$ et interprétez les différents termes dans les équations considérées.
2. Démontrer que le problème admet une unique solution maximale pour toute donnée de Cauchy (x_0, y_0).
3. Calculez explicitement ces solutions dans le cas où $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$ puis dans le cas $x_0 \neq 0$ et $y_0 = 0$.
4. Démontrez que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors pour tout temps t en lequel la solution est définie on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$. Que pensez-vous de cette propriété du point de vue de la modélisation ?
5. Soit (x, y) une solution maximale pour une donnée initiale positive. Soit $T > 0$ tel que la solution est définie sur $[0, T[$.
   - Démontrez que x est bornée sur $[0, T[$.
   - En déduire que y est également bornée sur $[0, T[$.
   - Que peut-on déduire de ces deux résultats ?
6. Déterminer les points d'équilibre du système situés dans le quart de plan positif $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0\}$. En utilisant les résultats vus en cours, pouvez-vous étudier la stabilité asymptotique de ces points d'équilibre ?
7. Pour tout $(x, y) \in Q$ on pose
$$H(x, y) = -c\log(x) + dx - a\log(y) + by.$$
Vérifier que si $t \mapsto (x(t), y(t)) \in Q$ est une solution de (12), alors il existe $H_0 \in \mathbb{R}$ telle que
$$H(x(t), y(t)) = H_0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$
En déduire que les trajectoires du systèmes sont bornées.

8. Si $(x_0, y_0) \in Q$, montrer qu'il existe $T > 0$ tel que la solution $(x(t), y(t))$ de (12) est T-périodique. Montrer que l'on a
$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{c}{d},$$
$$\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt = \frac{a}{b}.$$
9. En réalité, les sardines se nourissent de plancton et celui-ci peut venir à manquer si elles sont en nombre trop important, ce qui à pour effet de ralentir leur croissance. Comment modeliseriez-vous ce nouveau phénomène à partir du système (12) ? Que deviennent les résultats théoriques des questions 2 à 6 pour ce nouveau système ?
10. Programmez en Scilab différentes méthodes numériques (Euler explicite, méthode de Heun, les solveurs de Scilab, etc ...) sur le modèle (12). Commentez les résultats numériques obtenus par les différentes méthodes, au regard des résultats théoriques établis plus haut.
11. Adaptez vos programmes au système obtenu à la question 9. Observez les différences de comportement qualitatif entre les deux systèmes.