Master $1^{ère}$ année de Mathématiques

CMI, Université de Provence
Année 2009-2010

Analyse Numérique - Projet

A rendre au plus tard le jour de l'examen final, en Janvier 2010.

• Ce qui vous est demandé :

– Rédiger les réponses aux questions théoriques de l'énoncé en les illustrant, le cas échéant, par les résultats numériques obtenus par des programmes Scilab.
– Fournir également vos programmes Scilab (scripts et fonctions). On fera un programme différent pour chacune des deux parties de l'énoncé.

• Conseils importants :

– Lire tout le sujet avant de commencer.
– Avant de vous lancer dans la programmation, écrire sur papier :
  – Un canevas rapide de ce que vous devez mettre dans votre programme principal et dans quel ordre (initialisation, calcul proprement dit, sortie numérique ou graphique des résultats, etc ...).
  – La liste des variables principales que vous allez utiliser, en précisant la taille des vecteurs et des matrices pour éviter les (**très fréquentes**) erreurs dans les indices ...
  – Les fonctions annexes que vous devrez éventuellement programmer.
– Ne pas hésiter à utiliser les lignes de commentaires dans Scilab pour bien signaler les différentes parties du programme, la signification des variables, etc ...

• Les deux parties du projet sont totalement indépendantes !

I Un modèle de propagation d'une épidémie

On considère ici le système d'équations différentielles ordinaires suivant

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta I(t)S(t) + \gamma R(t), \\ R'(t) = \nu I(t) - \gamma R(t), \\ I'(t) = -\nu I(t) + \beta I(t)S(t), \end{cases} \tag{1}$$

avec les conditions initiales

$$\begin{cases} S(0) = S_0, \\ R(0) = R_0, \\ I(0) = I_0. \end{cases} \tag{2}$$

Dans ce système β, γ et ν sont trois paramètres strictement positifs. Ce système décrit l'évolution selon le temps (l'unité de temps étant *le jour*) d'une population soumise à une maladie contagieuse. Les hypothèses et les notations sont les suivantes :

– La population totale est constante au cours du temps : on ne tient pas compte dans ce modèle des effets de la natalité et de la mortalité, dont on suppose qu'ils se compensent exactement.
– $I(t) \in [0, 1]$ représente la proportion au temps t des individus qui sont *Infectés* par la maladie. Ces individus sont par ailleurs contagieux et sont le vecteur de la propagation de la maladie.
– $R(t) \in [0, 1]$ représente la proportion au temps t des individus qui sont *Résistants*, c'est-à-dire qui ont contracté la maladie, en ont guéri et en sont maintenant immunisés.
– $S(t) \in [0, 1]$ représente la proportion au temps t des individus qui sont *Susceptibles* de contracter la maladie. Il s'agit donc de tous les individus qui ne sont pas malades et qui ne sont pas immunisés.
– La signification des coefficients est la suivante :
  – $1/\nu$ est le temps moyen de guérison d'un patient infecté.
  – β est le facteur de contamination, c'est-à-dire la probabilité que, si un individu *Infecté* est en contact avec un individu *Susceptible* pendant 1 unité de temps, alors ce dernier va contracter la maladie.
  – $1/\gamma$ est le temps moyen durant lequel un individu ayant contracté la maladie va en être immunisé.

I.1 Etude théorique du modèle

1. Comment interprétez-vous les différents termes dans les équations (1) ? Essayez de donner une justification heuristique à la signification donnée ci-dessus pour les différents paramètres (ν, β et γ).

2. Justifiez en quelques mots que l'on peut appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz au système (1)-(2). Quelles informations obtient-on sur les solutions de celui-ci ?

   Soit donc (S, I, R) la solution maximale de ce problème, dont on note J l'intervalle de définition (qui contient 0). Le but des questions qui suivent est de montrer, sous de bonnes hypothèses, que $[0, +\infty[\subset J$.

3. Montrer tout d'abord que l'on a

$$\forall t \in J, \quad S(t) + I(t) + R(t) = S_0 + I_0 + R_0.$$

   A quelle hypothèse de modélisation cette propriété correspond-t'elle ?

4. **Etude de I :**

   (a) Montrer que le système différentiel

$$\begin{cases} \tilde{S}'(t) = \gamma \tilde{R}(t), \\ \tilde{R}'(t) = -\gamma \tilde{R}(t), \end{cases}$$

   admet une unique solution associée à toute donnée de Cauchy.

   (b) En déduire que s'il existe $t_0 \in J$ tel que $I(t_0) = 0$, alors I est identiquement nulle, donner explicitement dans ce cas l'expression de la solution du problème (1)-(2).

   On suppose dorénavant que I est tout le temps strictement positive, c'est-à-dire que $I_0 > 0$.

5. **Etude de R :**

   (a) Montrer que si $R_0 = 0$, on a $R'(0) > 0$ en déduire que $R > 0$ sur un certain intervalle $]0, \varepsilon]$.

   (b) On souhaite montrer que si $R_0 \geq 0$, alors on a $R(t) > 0$ pour tout temps $t > 0$ où la solution est bien définie. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un temps $t > 0$ tel que $R(t) = 0$. On pose alors $t^* = \inf\{t \in J, t > 0, \text{tq } R(t) = 0\}$.

      i. Montrer que $t^* > 0$ et que $R(t^*) = 0$.

      ii. Montrer que $R'(t^*) > 0$ et conclure.

   On suppose dorénavant que $R_0 \geq 0$ et ainsi $R(t)$ ne s'annulle jamais pour $t > 0$.

6. **Etude de S :**

   (a) Montrer que si $S_0 = 0$ et $R_0 > 0$, alors $S'(0) > 0$. En déduire que $S > 0$ sur un certain intervalle $]0, \varepsilon]$.

   (b) Montrer que si $S_0 = 0$ et $R_0 = 0$, alors $S'(0) = 0$ et $S''(0) > 0$. En déduire que $S > 0$ sur un certain intervalle $]0, \varepsilon]$.

   (c) On veut maintenant montrer que si $S_0 \geq 0$, alors pour tout temps t on a $S(t) > 0$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un temps $t > 0$ tels que $S(t) = 0$. On pose alors $t^* = \inf\{t \in J, t > 0, \text{tq } S(t) = 0\}$.

      i. Montrer que $t^* > 0$ et que $S(t^*) = 0$.

      ii. Montrer que $S'(t^*) > 0$ et conclure.

7. **Conclusion :** En utilisant tout ce qui précède, montrer que pour toutes données initiales $S_0 \in [0, 1]$, $R_0 \in [0, 1]$ et $I_0 \in]0, 1]$ vérifiant $S_0 + R_0 + I_0 = 1$, la solution du problème (1)-(2) est bien définie sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$ et que par ailleurs, on a

$$\forall t > 0, \;\; 0 < S(t) < 1, 0 < R(t) < 1, \text{ et } 0 < I(t) < 1.$$

I.2 Etude numérique des épidémies

On considère désormais des conditions initiales de la forme

$$S_0 = 1 - \varepsilon, I_0 = \varepsilon, R_0 = 0, \tag{3}$$

où ε est un paramètre. Ainsi, à l'état initial aucun individu n'est immunisé.

Si $\varepsilon > 0$ est petit, cette situation correspond à une maladie qui se déclare initialement sur un petit nombre d'individus alors que les autres n'ont jamais été en contact avec celle-ci, par exemple dans le cas où la maladie est amenée depuis un autre continent par un individu malade.

Le type de questions qui nous intéresse est le suivant : est-ce qu'une épidémie va se déclencher ? comment va-t'elle évoluer ? Quelle proportion de la population sera touchée ? Peut-on évaluer le moment où le pic de l'épidémie va se produire ? On peut aussi envisager d'utiliser de tels modèles pour mettre au point des stratégies efficaces de vaccination, mais cela dépasse le cadre de ce projet ...

1. Ecrire en Scilab un programme qui mette en oeuvre la méthode d'Euler explicite sur le problème (1) avec les données initiales (3). On considèrera un temps final de calcul $T > 0$ et un pas de temps $\Delta t = T/(M+1)$.
2. Utiliser ce programme pour tracer les courbes donnant S, R et I en fonction du temps pour diverses valeurs des paramètres :

Cas 1 : **Extinction d'une épidémie** : On suppose la moitié de la population infectée à l'instant initial de simulation, c'est-à-dire $\varepsilon = 0.5$. La maladie étudié est peu virulente : la durée moyenne d'infection est de 2 jours, soit $\nu = 1/2$, la probabilité de contagion est de $\beta = 1/30$ et l'immunité disparaît au bout d'une dizaine de jours, soit $\gamma = 1/10$.

Cas 2 : **Déclenchement d'une épidémie de grippe à New-York dans les années 60** : 10 individus infectés initialement sur une population totale de 8 millions d'habitants, ce qui donne $\varepsilon = 1.25\,10^{-6}$. Durée moyenne de l'infection : 3 jours, ce qui donne $\nu = 1/3$. Probabilité de contagion $\beta = 1/2$. L'immunité est supposée permanente : $\gamma = 0$.

Montrer que l'hypothèse $\gamma = 0$ implique que la quantité $N = \nu \int_0^{+\infty} I(t)\, dt$ est finie. Expliquer pourquoi ce nombre N peut-être il être interprété comme la proportion de la population totale qui aura été, à un moment ou à un autre, infectée par la maladie. Calculer à l'aide de Scilab, une évalutation de N pour les valeurs des paramètres données ci-dessus. Comment peut-on lire directement cette valeur sur les courbes que vous avez tracées ?

Cas 3 : **Evolution à long terme d'une épidémie d'un virus susceptible de muter** : On considère une maladie ayant pour propriété que l'immunité acquise suite à une infection disparaît en moyenne au bout de 10 ans (par exemple à cause d'un phénomène de mutation du virus). Supposons que la durée d'infection est de 14 jours et la probabilité de contamination est évaluée à 0.3. On regardera dans ce cas l'évolution du système sur plusieurs années.

Dans chacun des cas, on choisira convenablement le temps final T de telle sorte que l'essentiel du phénomène intéressant puisse être observé. On prendra également soin de bien choisir le pas de temps pour que l'on puisse avoir confiance dans les résultats numériques présentés.

On commentera les comportements observés et on en proposera quelques éléments d'interprétation.

II Schémas numériques pour le transport à vitesse variable

On considère l'équation de transport à vitesse variable

$$\begin{cases} \partial_t u + c(x)\partial_x u = 0, \ \ \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t=0,x) = u_0(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4}$$

où c et u_0 sont deux fonctions régulières données, que l'on supposera bornées ainsi que leurs dérivées. On supposera également que la fonction u_0 est à support compact.

On se propose d'étudier le schéma numérique suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c_i^+ \dfrac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} - c_i^- \dfrac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} = 0, \ \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}, \\ u_i^0 = u_0(x_i), \ \ \forall i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{5}$$

où on a posé $c_i = c(x_i)$. Par ailleurs, on a noté $a^+ = (|a| + a)/2$ et $a^- = (|a| - a)/2$ les parties positives et négatives de n'importe quel réel a. On pourra vérifier et utiliser les formules suivantes

$$\forall a \in \mathbb{R}, \;\; a^+ \geq 0, \;\; a^- \geq 0, \;\; a^+ - a^- = a, \;\; a^+ + a^- = |a|, \;\; a^+ a^- = 0.$$

II.1 Etude mathématique du schéma

1. Quel nom pouvez-vous donner à ce schéma ?
2. Définir l'erreur de consistance associée à ce schéma et en donner une estimation en fonction de Δt et Δx pour une solution régulière u du problème (4).
3. Montrer que le schéma est monotone sous la condition

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} \frac{|c_i|\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \tag{6}$$

   Montrer que sous ces conditions le schéma est L^∞-stable.
4. Enoncer et démontrer une estimation d'erreur en norme L^∞ pour le schéma (5). Quel est l'ordre du schéma ?
5. On veut démontrer que sous la même condition (6), le schéma proposé est L^2-stable.
   (a) Peut-on utiliser l'analyse de stabilité de Von Neumann sur ce schéma ?
   (b) En multipliant (4) par u, puis en intégrant par rapport à x sur $\mathbb{R}$ et enfin en intégrant par parties, démontrer que la solution exacte u du problème (4) vérifie l'inégalité

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u(t,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} \leq e^{\|\partial_x c\|_\infty T} \|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{7}$$

   Pour établir la stabilité L^2 du schéma numérique, on va essayer d'établir une estimation L^2 sur la solution du schéma inspirée de (7)

   (c) Pour tout $U \in \mathbb{R}^\mathbb{Z}$ on note $\|U\|_2 = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta x |u_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Montrer que toute solution de (5) vérifie

$$\begin{aligned}\|U^{n+1}\|_2^2 - \|U^n\|_2^2 - \|U^{n+1} - U^n\|_2^2 \\ + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta x \left(\frac{c_i^+ \Delta t}{\Delta x} |u_i^n - u_{i-1}^n|^2 + \frac{c_i^- \Delta t}{\Delta x} |u_{i+1}^n - u_i^n|^2 \right) \\ + \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta t \Delta x \left(\frac{c_i^+ - c_{i+1}^+}{\Delta x} |u_i^n|^2 + \frac{c_i^- - c_{i-1}^-}{\Delta x} |u_i^n|^2 \right) = 0.\end{aligned}$$

   (d) Montrer que, sous la condition (6), on a

$$\|U^{n+1} - U^n\|_2^2 \leq \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta x \left(\frac{c_i^+ \Delta t}{\Delta x} |u_i^n - u_{i-1}^n|^2 + \frac{c_i^- \Delta t}{\Delta x} |u_{i+1}^n - u_i^n|^2 \right).$$

   (e) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a $|c_i^+ - c_{i+1}^+| \leq \Delta x \|\partial_x c\|_\infty$ et $|c_i^- - c_{i-1}^-| \leq \Delta x \|\partial_x c\|_\infty$.
   (f) Déduire de tout ce qui précèdre que, sous la condition (6), on a

$$\|U^{n+1}\|_2^2 \leq \Big(1 + 2\|\partial_x c\|_\infty \Delta t\Big) \|U^n\|_2^2, \;\; \forall n \geq 0.$$

   (g) Conclure à la stabilité L^2 du schéma en montrant l'estimation suivante, que l'on comparera à (7) :

$$\sup_{n\leq \frac{T}{\Delta t}} \|U_n\|_2^2 \leq e^{2\|\partial_x c\|_\infty T} \|U_0\|_2^2. \tag{8}$$

II.2 Illustrations numériques

Préliminaire : Vérifier que si u_0 et c sont des fonctions 1-périodiques, alors la solution u de (4) est également 1-périodique en espace :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \;\; u(t, x+1) = u(t, x).$$

Programmer en Scilab le schéma numérique (5) sur l'intervalle $[0, 1]$ avec des conditions aux limites de périodicité. On prendra les données suivantes :

$$u_0(x) = \sin^4(\pi x),$$

$$c(x) = \cos^2(\pi x).$$

1. Définir les courbes caractéristiques associées à ce problème. Donner une formule explicite, dans ce cas particulier, pour ces caractéristiques. En déduire une formule analytique donnant la solution exacte du problème (4) pour ces données.
2. Tracer sur un même graphique, à l'instant $T = 1$, la solution exacte et la solution approchée obtenue par le schéma proposé. On pourra présenter plusieurs graphiques correspondant à plusieurs jeux de paramètres Δt et Δx et ainsi illustrer les propriétés démontrées dans la partie précédente de stabilité (ou non) du schéma et son ordre de convergence en norme L^∞ par exemple.