Master $1^{ère}$ année de Mathématiques

CMI, Université de Provence
Année 2008-2009

Analyse Numérique - Projet

A rendre au plus tard le jour de l'examen final, en Janvier 2009.

• Ce qui vous est demandé :

– Rédiger les réponses aux questions de l'énoncé en les illustrant, le cas échéant, par les résultats numériques obtenus par vos programmes MATLAB.
– Fournir également vos programmes MATLAB. On fera un programme différent pour chacune des parties de l'énoncé (ce qui n'empêche pas d'utiliser le copier-coller si nécessaire).

• Conseils importants :

– Lire tout le sujet avant de commencer.
– Avant de vous lancer dans la programmation, écrire sur papier :
  – Un canevas rapide de ce que vous devez mettre dans votre programme principal et dans quel ordre (initialisation, calcul proprement dit, sortie numérique ou graphique des résultats, etc ...).
  – La liste des variables principales que vous allez utiliser (on choisira des noms de variables suffisament explicites), en précisant la taille des vecteurs et des matrices pour éviter les (**très fréquentes**) erreurs dans les indices ...
  – Les fonctions annexes que vous devrez éventuellement programmer (celles qui contiennent les données initiales par exemple).
– Ne pas hésiter à utiliser les lignes de commentaires dans MATLAB (les lignes qui commencent par $\%$) pour bien signaler les différentes parties du programme, la signification des variables, etc ...
  A la fin, le programme doit être lisible par quelqu'un d'autre que vous et on doit pouvoir comprendre à peu près ce que le programme fait.

• Les deux parties du projet sont indépendantes !

1 Un schéma d'ordre 2 pour le transport scalaire à vitesse constante

On étudie dans cette partie un nouveau schéma aux différences finies pour le problème de transport à vitesse constante :

$$\begin{cases} \partial_t u + c\partial_x u = 0, & \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ u(t=0,x) = u_0(x), & \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

On supposera u_0 aussi régulière que nécessaire et 1-périodique. La solution u de ce problème est donc 1-périodique, c'est pourquoi la résolution numérique du problème se fera sur l'intervalle borné $[0,1]$, en tenant compte de la périodicité de la solution.

On se donne un temps final $T > 0$, deux entiers N et M, on pose $\Delta t = T/(M-1)$, $\Delta x = 1/(N-1)$ et on définit les points de discrétisation en espace et en temps suivants :

$$x_i = (i-1)\Delta x,\ \forall i \in \{1, \cdots, N\},\ \ t^n = (n-1)\Delta t,\ \forall n \in \{1, \cdots, M\},$$

de sorte que $x_1 = 0$, $x_N = 1$, $t^1 = 0$ et $t^M = T$.

Le schéma numérique proposé est le suivant

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + c\dfrac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} - c^2\dfrac{\Delta t}{2}\dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} = 0, & \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \in \{1, \cdots, M-1\}, \\ u_i^1 = u_0(x_i), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2}$$

1. Vérifier que si la donnée initiale u_0 est 1-périodique, alors la solution $(u_i^n)_{i,n}$ du schéma (2) vérifie

$$\forall n \in \{1, \cdots, M\}, \ \forall i \in \mathbb{Z}, \ u_{i+N-1}^n = u_i^n.$$

En déduire une écriture du schéma (2) qui ne fasse intervenir que les $(u_i^n)_i^n$ pour $i \in \{1, \cdots, N\}$.

2. Démontrer que toute solution régulière de (1) vérifie également

$$\partial_t^2 u - c^2 \partial_x^2 u = 0, \ \forall t > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrer que le schéma (2) est consistant à l'ordre 2 en temps et à l'ordre 2 en espace avec le problème (1). Pour cela, on définira de façon précise l'erreur de consistance R_i^n puis on en proposera une estimation en fonction de Δt et Δx.

4. Ecrire le schéma (2) sous la forme

$$u_i^{n+1} = \gamma_{-1} u_{i-1}^n + \gamma_0 u_i^n + \gamma_1 u_{i+1}^n, \ \forall i \in \mathbb{Z}$$

où γ_{-1}, γ_0 et γ_1 sont trois coefficients à déterminer. On pourra, pour simplifier la suite, exprimer ces trois coefficients en fonction du nombre $\lambda = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$.

5. Pour quelles valeurs de λ, le schéma (2) est-il positif ?

6. Rappeler la définition du facteur d'amplification $a(\xi, \lambda) \in \mathbb{C}$ associé à un tel schéma numérique et le calculer pour le schéma (2). On pourra vérifier que :

$$|a(\xi, \lambda)|^2 = \mu + (1-\mu)^2 + 2\mu(1-\mu)\cos(\xi) - \mu(1-\mu)\cos(\xi)^2,$$

où pour simplifier l'écriture on a posé $\mu = \lambda^2$.

7. En déduire que le schéma (2) est L^2-stable sous la condition CFL

$$\left| \frac{c\Delta t}{\Delta x} \right| \leq 1.$$

8. Programmer le schéma ainsi obtenu dans MATLAB (on pourra se servir de la forme obtenue à la question 1) puis illustrer, en choisissant convenablement les divers paramètres du problème (i.e. le pas de temps, le pas d'espace, la vitesse c, la donnée initiale u_0, etc ...) les propriétés de ce schéma démontrées dans les questions 5 et 7.

9. En considérant une donnée initiale régulière de votre choix, illustrer le fait que le schéma proposé est d'ordre 2 en temps et en espace.

10. Comparer qualitativement les résultats obtenus avec le schéma (2) et ceux obtenus avec le schéma décentré amont pour la donnée initiale

$$u_0(x) = 1_{[1/3, 2/3]}.$$

2 Schémas numériques pour les systèmes hyperboliques linéaires à coefficients constants

On s'intéresse dans cette partie à la résolution numérique d'une équation de transport à valeurs vectorielles (se référer à l'exercice 6 de la feuille de TD numéro 1).

$$\begin{cases} \partial_t U + A \partial_x U = 0, \quad \forall t \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}, \\ U(0, x) = U_0(x), \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3}$$

où $U(t, x) = \begin{pmatrix} u(t, x) \\ v(t, x) \end{pmatrix}$ est une inconnue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et A une matrice carrée indépendante de t, x et de taille 2×2. On suppose dans toute la suite que A est diagonalisable à valeurs propres réelles.

2.1 Etude générale

1. Montrer, sous les hypothèses précédentes, que le problème (3) admet une unique solution et donner l'expression de la solution exacte en fonction des éléments propres de la matrice A, de U_0, de t et de x.
2. Programmer dans MATLAB les deux schémas suivants :

$$\frac{1}{\Delta t}(U_i^{n+1} - U_i^n) + A\frac{1}{\Delta x}(U_i^n - U_{i-1}^n) = 0, \;\; \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{SDAG}$$

$$\frac{1}{\Delta t}(U_i^{n+1} - U_i^n) + A\frac{1}{\Delta x}(U_{i+1}^n - U_i^n) = 0, \;\; \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{SDAD}$$

   Vérifier qu'en choisissant par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0.5 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

   que ces deux schémas sont instables pour toutes valeurs de Δt et Δx. Expliquer en quelques phrases la raison de ce phénomène.

   Dans la suite, on va proposer de nouveaux schémas qui présentent de meilleures propriétés de stabilité.
3. Démontrer qu'on peut écrire toute matrice A vérifiant les hypothèses ci-dessus sous la forme $A = A^+ + A^-$ où $A^+A^- = A^-A^+ = 0, \mathrm{Sp}(A^+) \subset \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{Sp}(A^-) \subset \mathbb{R}^-$. Comment calcule-t'on A^+ et A^- en pratique ?

   On considère maintenant le schéma suivant

$$\frac{1}{\Delta t}(U_i^{n+1} - U_i^n) + A^+\frac{1}{\Delta x}(U_i^n - U_{i-1}^n) + A^-\frac{1}{\Delta x}(U_{i+1}^n - U_i^n) = 0, \;\; \forall n \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}. \tag{SD}$$

   (a) Démontrer que ce schéma est L^∞-stable sous la condition CFL

$$\max(\rho(A^+), \rho(A^-))\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \tag{5}$$

   On pourra introduire un changement d'inconnue adapté qui ramène le problème à une situation bien connue.

   (b) Définir l'erreur de consistance R_i^n (qui est un élément de $\mathbb{R}^2$) pour ce schéma et démontrer que celle-ci est d'ordre 1 en temps et en espace.

   (c) Programmer le schéma (SD) dans MATLAB et illustrer ces propriétés de stabilité sur l'exemple (4) donné plus haut.

   (d) Choisir des données initiales u_0 et v_0 (non triviales !) et comparer sur les mêmes figures la solution exacte au temps final et la solution approchée au temps final (**ATTENTION** : comme la solution est à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ chaque figure doit comporter deux graphes : celui de u et celui de v).

   (e) Choisir convenablement plusieurs jeux de valeurs de Δt et Δx, en faisant varier Δt et Δx de façon proportionnelle. Calculer à chaque fois l'erreur commise à l'instant final, c'est-à-dire, la norme infinie de la différence entre la solution exacte et la solution approchée. Proposer ensuite un tracé, en échelle logarithmique, de l'erreur en fonction de Δt. Commenter la courbe obtenue.

   (f) Démontrer que si A est symétrique, on peut alors supposer que A^+ et A^- sont symétriques. Dans ce cas, en prenant le produit scalaire (dans $\mathbb{R}^2$) de l'équation (SD) avec U_i^n puis en sommant sur i, démontrer que le schéma est L^2-stable sous la condition CFL

$$\rho(A)\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

4. La décomposition $A = A^+ + A^-$ proposée ci-dessus n'est pas toujours agréable à calculer (en particulier si la matrice A dépend de x, ce qui n'est pas le cas ici ...). On propose donc de choisir $A^+ = (A + \lambda \mathrm{Id})/2$ et $A^- = (A - \lambda \mathrm{Id})/2$.

   (a) Démontrer que si $\lambda \geq \rho(A)$, alors on a $\mathrm{Sp}(A^\pm) \subset \mathbb{R}^\pm$.

   (b) Pour de telles valeurs de λ, comment s'écrit la condition (5). Quelle valeur de λ a-t'on intérêt à choisir ?

   (c) On prend $\lambda = \Delta x/\Delta t$. Réécrire astucieusement le schéma (SD). Quel schéma, vu en cours dans le cas scalaire, retrouve-t'on ici ? D'après ce qui précède, sous quelle condition liant $\Delta t, \Delta x, \lambda$ et la matrice A, ce schéma est-il L^∞-stable ?

   (d) Illustrer à nouveau numériquement les propriétés de ce schéma (i.e. (SD) avec la nouvelle décomposition de A) sur l'exemple (4).

2.2 Application à un modèle de trafic routier

On reprend la modélisation du trafic routier vue en cours. On suppose cette fois que l'ensemble des véhicules peut être séparé en deux catégories : les véhicules "lents" et les véhicules "rapides". On suppose que l'autoroute possède plusieurs voies de circulation et donc que des véhicules lents et rapides peuvent coexister en tout point x et à tout instant t. On note ρ_r et ρ_l les densités respectives des véhicules rapides et des véhicules lents.

On suppose que pour tout (t, x), les véhicules lents ont une vitesse $v_l(t, x)$ alors que les véhicules rapides ont une vitesse $v_r(t, x)$.

On admet dans ces conditions, que le principe de conservation des véhicules (en réalité le principe de conservation de chacune des catégories de véhicules[1]) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho_l + \partial_x(\rho_l v_l) = 0, \\ \partial_t \rho_r + \partial_x(\rho_r v_r) = 0. \end{cases}$$

Pour compléter le modèle il faut maintenant relier v_l et v_r à ρ_l et ρ_r. En l'absence d'interaction entre les deux groupes de véhicules, on peut admettre que $v_l(t, x) = V_l$ et que $v_r(t, x) = V_r$ pour tout (t, x) où $V_r > V_l$ sont deux constantes strictement positives. Néanmoins, en pratique, les deux groupes de véhicules interagissent :

– Si la densité de véhicules lents est importante, alors les véhicules rapides sont obligés de ralentir.
– Si la densité de véhicules rapides est importante, alors les véhicules lents sont obligés d'accélérer un peu pour faciliter le passage des véhicules rapides.

On va modéliser ce comportement en adoptant les lois empiriques suivantes :

$$v_l = V_l + \beta \frac{\rho_r}{\rho_l},$$

$$v_r = V_r - \beta \frac{\rho_l}{\rho_r}.$$

1. Bien que ce modèle soit très critiquable, expliquer en quelques phrases pourquoi on peut espérer qu'il reflète le comportement attendu.
2. Montrer que le modèle obtenu *in fine*, peut se mettre sous la forme générale étudiée dans la section 2.1, avec $U = \begin{pmatrix} \rho_r \\ \rho_l \end{pmatrix}$. On précisera la matrice A du système.
3. Prenons les paramètres physiques suivants :

   $$V_r = 2, \;\; V_l = 1, \;\; \beta = 0.3, \;\; T = 1,$$

   et les paramètres numériques :

   $$N = 800, \;\; M = 1600.$$

   Proposer une animation MATLAB qui montre l'évolution du trafic sur cette autoroute à partir des données initiales suivantes :

   $$\rho_{r,0}(x) = 0.2 + 0.2 \times \frac{1}{2} \left(\tanh\left(\frac{x - 1/8}{0.05}\right) - \tanh\left(\frac{x - 3/8}{0.05}\right) \right),$$

   $$\rho_{l,0}(x) = 0.5 + 0.3 \times \frac{1}{2} \left(\tanh\left(\frac{x - 5/8}{0.05}\right) - \tanh\left(\frac{x - 7/8}{0.05}\right) \right).$$

   Commenter les résultats obtenus. Est-ce que le comportement observé semble refléter les propriétés attendues du modèle ?

[1] on suppose implicitement qu'une Ferrari ne va pas subitement se transformer en 2CV et réciproquement