Master $1^{ère}$ année de Mathématiques

Université de Provence, Université Paul Cézanne

Année 2010-2011

# Analyse Numérique - Correction de l'examen du Lundi 10 Janvier 2011

Aucun document autorisé - Durée : 3h

## Exercice 1

### Partie 1 : Existence et unicité de la solution

(a) Comme $H^1(]0,1[)$ est un espace de Hilbert. Il suffit de vérifier que $H$ est un sous-espace fermé de $H^1(]0,1[)$. Ceci est vrai car l'injection canonique de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ est continue.

(b) D'après le cours, on a pour toute fonction $v$ de $H^1$

$$v(x) = v(0) + \int_0^x v'(t)\,dt,$$

et donc si $v \in H$,

$$v(x) = \int_0^x v'(t)\,dt,$$

et ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\|v\|_{L^\infty} \leq \|v'\|_{L^2}$. Il vient ensuite $\|v\|_{L^2} \leq \|v'\|_{L^2}$.

D'après cette inégalité, il est clair que si $v \in H$ et $\|v'\|_{L^2} = 0$, alors $v = 0$, on a donc bien affaire à une norme. De plus,

$$\|v'\|_{L^2} \leq \sqrt{\|v\|_{L^2}^2 + \|v'\|_{L^2}^2} = \|v\|_{H^1} \leq \sqrt{2}\|v'\|_{L^2}, \ \ \forall v \in H,$$

et donc les normes sont équivalentes.

(c) $a$ est une forme bilinéaire et $L$ une forme linéaire. Vérifions les hypothèses du théorème de Lax-Milgram :

- $H$ est un Hilbert.
- $a$ est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons

$$|a(u,v)| \leq \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} = \|u\|_H\|v\|_H, \quad \forall u, v \in H.$$

- $a$ est coercive car on a

$$a(u,u) = \|u'\|_{L^2}^2 = \|u\|_H^2, \ \ \forall u \in H.$$

- $L$ est continue car d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et celle de Poincaré établie plus haut, nous avons

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_H, \ \ \forall v \in H.$$

Le théorème de Lax-Milgram peut donc s'appliquer et il nous donne l'existence et l'unicité de la solution $u \in H$ du problème $(\mathcal{P})$.

(d) L'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ est inclu dans $H$, on peut donc prendre $v = \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ comme fonction test dans $(\mathcal{P})$, ce qui donne

$$\int_0^1 u'\varphi'\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx,\ \ \forall\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

Ceci montre que $u' \in H^1(I)$ et que sa dérivée faible est $-f$, i.e. $(u')' = -f$.
Comme toute fonction de $H^1(I)$ est continue, on déduit que $u'$ est une fonction continue et donc $u$, qui est une primitive de $u'$, est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. De plus $u(0) = 0$ par définition de $H$.

(e) Si $f$ est continue, $u$ est bien $\mathcal{C}^2$ car $u'' = -f$.
On pose $v(x) = x$ qui est bien une fonction de $H^1$ nulle en 0, donc un élément de $H$.
Le problème $(\mathcal{P})$ donne

$$\int_0^1 u'(x)\,dx = \int_0^1 -u''(x)x\,dx.$$

Par intégration par parties, la seconde intégrale donne

$$\int_0^1 -u''(x)x\,dx = \big[-u'(x)x\big]_0^1 + \int_0^1 u'(x)\,dx = -u'(1) + \int_0^1 u'(x)\,dx.$$

Par comparaison des deux formules, on trouve bien $u'(1) = 0$.

**Partie 2 : Schéma numérique**

(a) On pose $U = (u_i)_{1\le i\le n+1}$ et le schéma s'écrit sous la forme

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} U = \underbrace{\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_n) \\ \frac{1}{3}f(x_{n+1}) + \frac{1}{6}f(x_n) \end{pmatrix}}_{=F}.$$

$A$ est bien symétrique et tridiagonale.

(b) Le principe du maximum discret pour $A$ s'énonce de la façon suivante : si $V \in \mathbb{R}^{n+1}$ est un vecteur vérifiant $AV \ge 0$, alors $V \ge 0$.
Démontrons cette propriété par l'absurde en supposant que l'on a $AV \ge 0$ mais que $V \not\ge 0$. On a donc $M = \min_{1\le i\le n+1} v_i < 0$. On pose alors

$$i_0 = \min\{1 \le i \le n+1,\ \ v_i = M\}.$$

Différencions deux cas :

* Si $i_0 = n+1$ : d'après la $i_0$-ième ligne de la matrice, on aurait

$$v_{n+1} - v_n \ge 0,$$

et donc $v_n \le v_{n+1} = M$, ce qui imposerait $v_n = M$, ce qui contredit la définition de $i_0$.

* Si $i_0 \leq n$ : la $i_0$-ième ligne de la matrice donne

$$-\underbrace{(v_{i_0+1} - v_{i_0})}_{\geq 0} + \underbrace{(v_{i_0} - v_{i_0-1})}_{\geq 0} \geq 0.$$

Ceci impliquerait donc, en particulier, que $v_{i_0} = v_{i_0-1}$.

– Si $i_0 = 1$, on aurait donc $M = v_{i_0} = v_0 = 0$, ce qui est absurde car on a supposé $M < 0$.

– Si $i_0 > 1$, on aurait $v_{i_0-1} = M$ ce qui contredit la minimalité de $i_0$.

Comme dans le cours, on déduit de ce principe du maximum que la matrice $A$ est inversible et que son inverse a tous ses coefficients positifs.

(c) La définition de $R_i$ est la suivante

$$R_i = -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{\Delta x^2} - f(x_i), \ \ \forall i \in \{1, \ldots, n\},$$

$$R_{n+1} = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_n)}{\Delta x^2} - \frac{1}{3} f(x_{n+1}) - \frac{1}{6} f(x_n).$$

L'estimation de $R_i$ pour $1 \leq i \leq n$ est exactement la même que celle vue en cours (le maillage étant uniforme, on obtient de l'ordre 2).

Détaillons l'estimation du cas $i = n + 1$, sachant que $x_{n+1} = 1$ correspond au bord du domaine. On effectue les développements de Taylor suivants

$$u(x_n) = u(1 - \Delta x) = u(1) - \Delta x \underbrace{u'(1)}_{=0!} + \frac{\Delta x^2}{2} u''(1) - \frac{\Delta x^3}{6} u'''(1) + \frac{\Delta x^4}{24} u^{(4)}(\xi_i),$$

$$f(x_n) = -u''(x_n) = -u''(1 - \Delta x) = -u''(1) + \Delta x u'''(1) - \frac{\Delta x^2}{2} u^{(4)}(\zeta_i),$$

et donc

$$\begin{aligned} R_{n+1} = -\frac{1}{2}u''(1) + \frac{\Delta x}{6}u'''(1) - \frac{\Delta x^2}{24}u^{(4)}(\xi_i) + \frac{1}{3}u''(1) - \frac{1}{6}\left(-u''(1) + \Delta x u'''(1) - \frac{\Delta x^2}{2}u^{(4)}(\zeta_i)\right) \\ = -\frac{\Delta x^2}{24}u^{(4)}(\xi_i) - \frac{\Delta x^2}{12}u^{(4)}(\zeta_i), \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat souhaité.

(d) La fonction $v$ est de la forme $v(x) = -x^2/2 + ax + b$ et il reste à déterminer $a$ et $b$ grâce aux conditions aux limites, ce qui donne

$$v(x) = x - x^2/2.$$

La relation $AV = D$ exprime le fait que le schéma est exact sur les fonctions dont la dérivée quatrième est nulle, en partculier pour la fonction $v$.

(e) Soit $U \in \mathbb{R}^{n+1}$, on écrit (en prenant garde au coefficient $1/2$ de la dernière ligne de $D$)

$$-2\|U\|_\infty D \leq U \leq 2\|U\|_\infty D,$$

puis on multiplie cette inégalité par $A^{-1}$ qui est à coefficients positifs, ce qui donne

$$-2\|U\|_\infty \underbrace{A^{-1}D}_{=V} \leq A^{-1}U \leq 2\|U\|_\infty \underbrace{A^{-1}D}_{=V},$$

et donc

$$\|A^{-1}U\|_\infty \leq 2\|V\|_\infty \|U\|\infty \leq 2 \underbrace{\|v\|_{L^\infty}}_{=1/2} \|U\|_\infty.$$

Cette propriété est la stabilité $L^\infty$ du schéma.

(f) La démonstration est la même que celle du cours. On écrit d'une part le schéma

$$AU = F,$$

et d'autre part la définition de l'erreur de consistance

$$A\bar{U} = F + R,$$

Par soustraction, il vient

$$\bar{U} - U = A^{-1}(R).$$

La stabilité puis la consistance établies plus haut donnent

$$\|\bar{U} - U\|_\infty \leq C\Delta x^2 \|u^{(4)}\|_{L^\infty}.$$

**Partie 3 : Etude de conditions aux limites non-homogènes**

(a) La seule chose ayant changé par rapport au problème précédent est la forme linéaire $L$, il faut donc juste vérifier que $L_\alpha$ est continue. Ceci est vrai car l'injection de $H^1(]0,1[)$ dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ est continue, donc le terme supplémentaire est continu.

(b) En prenant $v = \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, le nouveau terme dans $L_\alpha$ n'intervient pas et on obtient donc le même résultat que dans la première partie, c'est-à-dire que $u' \in H^1$ et $u'' = -f$. De plus, on a $u(0) = 0$ par définition de $H$.

(c) Comme dans la première partie, on prend $v(x) = x$ dans la formulation faible du problème $(\mathcal{P}_\alpha)$ ce qui donne après intégration par parties

$$u'(1) = \alpha.$$

On vient donc de résoudre le problème

$$\begin{cases} -u'' = f(x), \quad \forall x \in ]0,1[, \\ \quad u(0) = 0, \\ \quad u'(1) = \alpha. \end{cases}$$

(d) Le nouveau schéma comporte un terme supplémentaire dans le second membre, à la ligne correspondant au point du bord concerné par la nouvelle condition aux limites. On obtient

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} = f(x_i), \quad \forall i \in \{1, \cdots, n\}, \\ \dfrac{u_{n+1} - u_n}{\Delta x^2} = \dfrac{1}{3} f(x_{n+1}) + \dfrac{1}{6} f(x_n) + \dfrac{\alpha}{\Delta x}. \end{cases}$$

avec $u_0 = 0$.

La matrice $A$ est donc inchangée et le nouveau second membre se déduit du précédent par l'ajout du terme $\alpha/\Delta x$ dans la dernière ligne.

(e) La matrice $A$ n'ayant pas changé, la seule chose à modifier dans l'analyse précédente c'est la définition et l'estimation de l'erreur de consistance. Celle-ci ne change qu'au point $i = n+1$ et devient

$$
\begin{aligned}
R_{n+1} = \frac{\alpha}{\Delta x} - \frac{1}{2}u''(1) + \frac{\Delta x}{6}u'''(1) - \frac{\Delta x^2}{24}u^{(4)}(\xi_i) - \frac{\alpha}{\Delta x} \\
+ \frac{1}{3}u''(1) - \frac{1}{6}\left(-u''(1) + \Delta x u'''(1) - \frac{\Delta x^2}{2}u^{(4)}(\zeta_i)\right) \\
= -\frac{\Delta x^2}{24}u^{(4)}(\xi_i) - \frac{\Delta x^2}{12}u^{(4)}(\zeta_i),
\end{aligned}
$$

le résultat final est donc exactement le même avec cette nouvelle condition aux limites : le schéma est d'ordre 2.

**Exercice 2**

1. (a) Il s'agit du problème de Cauchy suivant

$$
\begin{cases} \dfrac{d}{dt}X(t,s,x_0) = 1 + X(t,s,x_0), \\ X(s,s,x_0) = x_0. \end{cases}
$$

(b) Un calcul immédiat donne

$$X(t,s,x_0) = -1 + (x_0+1)e^{t-s}.$$

(c) On sait que pour le problème considéré, la solution $u$ est constante le long des caractéristiques (on le montre en dérivant la fonction $t \mapsto u(t, X(t,s,x_0))$). On a donc

$$u(t, X(t,0,x_0)) = u_0(x_0), \ \ \forall t, x_0.$$

Si on fixe $t$ et $x$, on va donc chercher $x_0$ tel que $X(t,0,x_0) = x$. Celui-ci n'est autre que $x_0 = X(0,t,x) = -1 + (x+1)e^{-t}$.
On obtient donc

$$u(t,x) = u_0\left(-1 + (x+1)e^{-t}\right).$$

2. Les caractéristiques associées à ce nouveau problème sont les mêmes que précédemment car la vitesse $c$ n'a pas changé. En revanche, la solution n'est plus constante le long des caractéristiques. Si on pose $\varphi(t) = u(t, X(0,t,x_0))$, on trouve (en utilisant l'équation ! !)

$$
\begin{aligned}
\varphi'(t) = \partial_t u(t, X(t,0,x_0)) + c(X(t,0,x_0))\partial_x u(t, X(t,0,x_0)) = X(t,0,x_0)u(t, X(t,0,x_0)) \\
= X(t,0,x_0)\varphi(t) = \left(-1 + (x_0+1)e^t\right)\varphi(t).
\end{aligned}
$$

Comme de plus on a $\varphi(0) = u(0, x_0) = u_0(x_0)$, on peut résoudre cette nouvelle équation différentielle en $\varphi$ pour obtenir

$$\varphi(t) = u_0(x_0)e^{\left(-t+(x_0+1)e^t\right)}.$$

Il reste à revenir aux variables $(t, x)$ comme on l'a fait précédemment

$$u(t, x) = u_0\left(-1 + (x + 1)e^{-t}\right) e^{-t+x+1}.$$

**Exercice 3**

1. Tous calculs faits, on trouve

$$u_i^{n+1} = \underbrace{\frac{1}{2}(1-\nu)(2-\nu)}_{\alpha_0} u_i^n + \underbrace{\nu(2-\nu)}_{\alpha_{-1}} u_{i-1}^n + \underbrace{\frac{1}{2}\nu(\nu-1)}_{=\alpha_{-2}} u_{i-2}^n.$$

   Le schéma est monotone si tous les $\alpha_k$ sont positifs, ce qui n'est le cas que pour trois valeurs particulières du paramètre $\nu$ : 0, 1 ou 2.

2. Le schéma proposé est linéaire et invariant par translation donc l'analyse de Von Neumann est possible. La définition du facteur d'amplification est

$$a(\xi) = \alpha_0 + \alpha_{-1}e^{-\sqrt{-1}\xi} + \alpha_{-2}e^{-2\sqrt{-1}\xi}.$$

3. On a $|a(\xi)|^2 = |e^{\sqrt{-1}\xi}a(\xi)|^2$, ce qui donne

$$\begin{aligned} |a(\xi)|^2 &= \left|\alpha_0 e^{\sqrt{-1}\xi} + \alpha_{-1} + \alpha_{-2}e^{-\sqrt{-1}\xi}\right|^2 \\ &= \left|\alpha_{-1} + (\alpha_0 + \alpha_{-2})\cos\xi + \sqrt{-1}(\alpha_0 - \alpha_{-2})\sin\xi\right|^2 \\ &= \left|\nu(2-\nu) + (1-\nu)^2\cos\xi + \sqrt{-1}(1-\nu)\sin\xi\right|^2. \end{aligned}$$

   En utilisant $(\sin\xi)^2 = 1 - (\cos\xi)^2$, on obtient le résultat annoncé.

4. Il s'agit de déterminer si $\sup_\xi |a(\xi)|^2 \leq 1$. D'après le calcul précédent, ce supremum est égal au maximum sur l'intervalle $[0, 2]$ de la fonction quadratique

$$\varphi : X \mapsto \nu^2(2-\nu)^2 + (1-\nu)^2 + \nu(1-\nu)^2(2-\nu) - \nu(1-\nu)^2(2-\nu)X^2.$$

   Cette fonction $\varphi$ admet son extremum local en $X = 0$ et de plus, par construction $\varphi(0) = |a(0)|^2 = 1$. Donc, la condition $\sup_\xi |a(\xi)|^2 \leq 1$ est vérifiée si et seulement si $X = 0$ est un maximum local pour $\varphi$, c'est-à-dire si $\varphi''(0) \leq 0$, autrement dit si

$$\nu(2-\nu)(1-\nu)^2 \geq 0,$$

   ce qui est équivalent à

$$\nu \in [0, 2].$$

5. De façon usuelle, l'erreur de consistance s'obtient en remplaçant formellement les valeurs exactes de la solution sur le maillage dans la formule qui définit le schéma. On obtient

$$\begin{aligned} R_i^n = \frac{u(t^{n+1},x_i) - u(t^n,x_i)}{\Delta t} + c\frac{3u(t^n,x_i) - 4u(t^n,x_{i-1}) + u(t^n,x_{i-2})}{2\Delta x} \\ - \frac{c^2\Delta t}{2}\frac{u(t^n,x_i) - 2u(t^n,x_{i-1}) + u(t^n,x_{i-2})}{\Delta x^2}, \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0. \end{aligned}$$

6. On cherche une estimation à l'ordre 2, il est donc nécessaire de faire des développements de Taylor autour du point $(t^n, x_i)$ à l'ordre 3

$$u(t^{n+1},x_i) = u + \Delta t \partial_t u + \frac{\Delta t^2}{2}\partial_t^2 u + O(\Delta t^3),$$

$$\begin{aligned} u(t^n,x_{i-1}) &= u - \Delta x \partial_x u + \frac{\Delta x^2}{2}\partial_x^2 u + O(\Delta x^3), \\ u(t^n,x_{i-2}) &= u - 2\Delta x \partial_x u + 2\Delta x^2 \partial_x^2 u + O(\Delta x^3). \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} R_i^n &= \partial_t u + \frac{\Delta t}{2}\partial_t^2 u + O(\Delta t^2) + c\partial_x u + O(\Delta x^2) - \frac{c^2\Delta t}{2}\left(\partial_x^2 u + O(\Delta x)\right) \\ &= (\partial_t u + c\partial_x u) + \frac{\Delta t}{2}(\partial_t^2 u - c^2\partial_x^2 u) + O(\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta t \Delta x). \end{aligned}$$

Le premier terme est nul car $u$ est solution de l'équation, et le second terme aussi car $u$ vérifie en sus l'équation des ondes. On obtient bien le résultat attendu.

7. Si on note $\bar{U}^n = (u(t^n,x_i))_{i\in\mathbb{Z}}$ le vecteur infini des valeurs exactes de la solution au temps $t^n$ sur les noeuds du maillage et $U^n$ la solution approchée au temps $t^n$, l'estimation d'erreur (en norme $L^2$ !) s'écrit pour $T > 0$ fixé

$$\sup_{n\Delta t \leq T} \|\bar{U}^n - U^n\|_2 \leq M_T(\Delta t^2 + \Delta x^2),$$

où la norme $\|\cdot\|_2$ est la norme $l^2(\mathbb{Z})$ pondérée par la taille des mailles $\Delta x$ comme on l'a vu en cours.